Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 6 (1924)

Artikel: Les quanta du rayonnement et la théorie des gaz [suite et fin]
Autor: Schidlof, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741897

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES QUANTA DU RAYONNEMENT

ET LA THÉORIE DES GAZ

PAR

A. SCHIDLOF

(Suite et fin.)

DEUXIÈME PARTIE.

III. *La loi du rayonnement noir déduite de l'hypothèse des quanta de lumière.*

L'idée la plus simple, suggérée par la loi des quanta, au sujet de la constitution de l'énergie rayonnante est incontestablement celle des quanta de lumière. Selon cette conception, le rayonnement est composé de grains d'énergie de grandeur

$$E = h\nu$$

qui se déplacent avec la vitesse c. A la fréquence ν des oscillations, selon la théorie classique, correspond la grandeur E du quantum de lumière, le coefficient de proportionnalité h étant une constante universelle.

Tout élément E de l'énergie rayonnante a de plus une quantité de mouvement représentée par un vecteur dont la direction est celle de la propagation du quantum, et dont la grandeur est:

$$\frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Enfin, le quantum présente une certaine symétrie par rapport à un plan parallèle à la direction de propagation, symétrie

correspondant à l'état de polarisation des oscillations monochromatiques classiques.

En appliquant aux quanta de lumière d'Einstein les principes de la mécanique statistique, modifiés, selon l'hypothèse de Planck, par l'introduction des cellules de grandeur finie, Bose[1] a pu déduire de ces notions extrêmement simples la loi générale du rayonnement noir, sans avoir recours à aucune hypothèse supplémentaire.

Supposons le rayonnement enfermé dans une enceinte de volume V. L'énergie rayonnante totale U contenue dans le volume V soit donnée. Cette énergie se compose d'un nombre énorme de quanta de lumière $h\nu^s$ qui ont les fréquences (grandeurs) les plus diverses. Soit N^s le nombre des quanta dont la fréquence est comprise entre les limites ν^s et $\nu^s + d\nu^s$, $d\nu^s$ signifiant l'un des intervalles monochromatiques du spectre du rayonnement. Le spectre entier est divisé en une infinité d'intervalles marqués par les indices s allant de zéro à l'infini.

Soit $\varrho_\nu d\nu$ la densité de l'énergie rayonnante monochromatique dont la fréquence est comprise entre les limites ν et $\nu + d\nu$. L'énergie rayonnante totale qui remplit l'enceinte tout entière est:

$$U = V \int_0^\infty \varrho_\nu d\nu = \sum_s N^s h\nu^s \ . \tag{19}$$

Pour déterminer les nombres N^s par des considérations statistiques, il faut avant tout évaluer la probabilité d'une répartition arbitraire des quanta. L'expression générale de cette probabilité trouvée, la condition de probabilité maximum définit la répartition d'équilibre. Celle-ci, jointe à l'équation (19), fournira les N^s et, par conséquent, la densité d'énergie de toutes les radiations monochromatiques qui composent le rayonnement noir.

Les grandeurs caractérisant l'état d'un élément d'énergie

$$E^s = h\nu^s$$

sont, abstraction faite de la polarisation du quantum, les trois coordonnées de configuration q_1, q_2, q_3 et les trois impulsions

[1] Bose, *l. c.* (voir première partie du mém.).

p_1, p_2, p_3. Le quantum est donc, au point de vue mécanique, un système à trois degrés de liberté dont l'état est représenté par un point dans une multiplicité à 6 dimensions. Pour tous les quanta de lumière dont la fréquence est ν^s, la relation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{h^2 \nu^{s2}}{c^2} = \text{const}$$

définit une multiplicité cylindrique à 5 dimensions, lieu géométrique de leurs points d'état. Les quanta appartenant à l'intervalle des fréquences allant de ν^s à $\nu^s + d\nu^s$ ont des points d'état situés à l'intérieur d'une couche cylindrique infiniment mince dont le volume est:

$$\int\int\int\int\int\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 = \mathrm{V} \,.\, 4\pi \frac{h^3 \nu^{s2}}{c^3}\, d\nu^s \,.$$

Si nous divisons ce volume par le volume des cellules, h^3, nous obtenons le nombre des cellules sur lesquelles se répartissent les N^s quanta en question.

En réalité, le nombre des cellules pouvant contenir les points d'état des quanta de lumière considérés est deux fois plus grand. Il faut, en effet, tenir compte de l'anisotropie des éléments d'énergie, correspondant, au point de vue optique, à leur état de polarisation. Selon la théorie des ondulations, il y a deux possibilités de polarisation linéaire pour une direction donnée de propagation de la lumière. Le nombre des cellules dans lesquelles se trouvent les points d'état des N^s quanta est donc:

$$\mathrm{A}^s = 8\pi \mathrm{V} \frac{\nu^{s2} d\nu^s}{c^3} \,. \tag{20}$$

Dans une répartition quelconque des quanta il y aura un certain nombre p_0^s de cellules vides; le nombre des cellules contenant un seul quantum sera p_1^s; le nombre des cellules contenant deux quanta sera p_2^s, et ainsi de suite. Le nombre des répartitions, différentes les unes des autres, auxquelles correspondent les mêmes nombres $p_0^s, p_1^s, p_2^s \ldots$ est:

$$\frac{\mathrm{A}^s\,!}{p_0^s\,!\, p_1^s\,!\, p_2^s\,! \ldots}$$

Dans cette expression, A^s est défini par l'équation (20), et les nombres p_r^s doivent satisfaire aux deux conditions:

$$A^s = p_0^s + p_1^s + p_2^s + \dots \qquad = \sum_r p_r^s \,. \tag{21}$$

$$N^s = 0 \,.\, p_0^s + 1 \,.\, p_1^s + 2 \,.\, p_2^s + \dots = \sum_r r p_r^s \,. \tag{22}$$

La probabilité de l'état du rayonnement défini par l'ensemble des p_r^s qui correspondent à toutes les valeurs possibles des indices s et r, comprises entre les limites 0 et ∞, est:

$$W = \prod_s \frac{A^s!}{p_0^s! \, p_1^s! \, p_2^s! \dots} \,.$$

On peut supposer que les nombres p_r^s sont très grands, et utiliser, par conséquent, pour le calcul du logarithme de W, la formule d'approximation usuelle (voir le deuxième chapitre) qui fournit:

$$\log W = \sum_s A^s \log A^s - \sum_s \sum_r p_r^s \log p_r^s \,. \tag{23}$$

Nous postulons que cette expression soit maximum, en imposant, de plus, aux nombres p_r^s les deux conditions:

$$U = \sum_s N^s h \nu^s = \text{const} \,,$$

$$A^s = \sum_r p_r^s = \text{const} \,.$$

En variant les p_r^s, nous obtenons alors les équations suivantes dont le nombre est $s + 2$:

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s \left(1 + \log p_r^s\right) = 0 \,,$$

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s \, r \,.\, h \nu^s = 0 \,,$$

$$\sum_r \delta p_r^s = 0 \,.$$

Ce système d'équations peut être remplacé par une seule équation:

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s \left(1 + \log p_r^s + \lambda^s + \frac{rh\nu^s}{\beta}\right) = 0 \qquad (24)$$

renfermant les constantes indéterminées λ^s et β. Grâce à l'introduction de ces constantes, les δp_r^s peuvent être considérés comme arbitraires, et on peut tirer de l'équation (24) la solution du problème:

$$p_r^s = B^s e^{-\frac{rh\nu^s}{\beta}} .$$

La valeur du coefficient B^s résulte de l'équation (21) qui conduit au résultat suivant:

$$A^s = \sum_r p_r^s = \sum_r B^s e^{-\frac{rh\nu^s}{\beta}} = \frac{B^s}{1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}} .$$

D'où

$$B^s = A^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right) .$$

On a d'autre part, selon (22):

$$N^s = \sum_r r p_r^s = \sum_r A^s \left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right) r e^{-\frac{rh\nu^s}{\beta}} = \frac{A^s e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}} .$$

On en tire, selon (19) et (20),

$$U = \sum_s \frac{8\pi h \nu^{s^3}}{c^3} d\nu^s . V . \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{\beta}} - 1} .$$

L'entropie du rayonnement est exprimée par:

$$S = k \log W = k \sum_s A^s \log A^s - k \sum_s \sum_r p_r^s \log p_r^s .$$

En y substituant la valeur précédemment trouvée de p_r^s on a:

$$\sum_s \sum_r p_r^s \log p_r^s = \sum_s A^s \log A^s + \sum_s A^s \log\left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right) - \frac{U}{\beta} .$$

D'où

$$S = k\left[\frac{U}{\beta} - \sum_s A^s \log\left(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}\right)\right]. \qquad (25)$$

La relation thermodynamique $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ fournit la valeur de la constante β:

$$\beta = kT.$$

L'entropie de chaque portion monochromatique du rayonnement noir dans le vide étant une fonction bien définie des variables V, T, ν^s, de la largeur $d\nu^s$ de l'intervalle spectral et des constantes universelles k, h et c, il n'y a pas lieu d'adjoindre au second membre de l'équation (25) une constante additive. De même, l'énergie est complètement définie par la formule:

$$U = \sum_s \frac{8\pi h \nu^{s^3}}{c^3} d\nu^s . V . \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (26)$$

qui exprime la loi du rayonnement de Planck.

IV. *Application de la méthode statistique de Bose à la théorie des gaz.*

Au lieu de répartir des quanta de lumière sur les cellules de la multiplicité des phases, nous pouvons appliquer la même méthode aux molécules d'un gaz monoatomique qui sont également des systèmes à trois degrés de liberté. Le cas des molécules monoatomiques est même un peu plus simple, puisqu'il n'y a pas lieu de prendre en considération une anisotropie quelconque.

Soient donc q_1, q_2, q_3 les coordonnées, p_1, p_2, p_3 les impulsions d'une molécule monoatomique de masse m et de vitesse u; on a:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = m^2 u^2 = \text{const}.$$

Cette équation définit, comme précédemment, une multiplicité cylindrique à 5 dimensions dans laquelle doit se trouver le point d'état de la molécule considérée. Soit V le volume du

récipient qui contient le gaz; le « volume » de la couche cylindrique infiniment mince, contenant les points d'état de toutes les molécules dont la vitesse a une grandeur comprise entre u et $u + du$, est exprimé par

$$\int\int\int\int\int\int dp_1\, dp_2\, dp_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 = 4\pi V m^3 u^2 du \ .$$

La multiplicité des phases étant divisée en cellules de grandeur h^3, le nombre des cellules appartenant à la couche cylindrique considérée est:

$$A^u = \frac{4\pi m^3}{h^3} V u^2 du \ . \qquad (27)$$

Soit N^u le nombre des molécules du gaz dont les points d'état se trouvent dans la couche cylindrique en question et dont l'énergie est voisine de:

$$E^u = \frac{mu^2}{2} \ .$$

Ces molécules se répartissent sur les cellules de la portion considérée de la multiplicité des phases de la même façon que précédemment les quanta de lumière.

En désignant par p_r^u les nombres de répartition, nous obtenons l'expression:

$$\frac{A^u!}{p_0^u!\, p_1^u!\, p_2^u!\, \ldots}$$

qui indique le nombre de modes de distribution distincts correspondant à des valeurs données des p_r^u.

Le nombre des molécules de l'espèce considérée est:

$$N^u = 0 \,.\, p_0^u + 1 \,.\, p_1^u + 2 \,.\, p_2^u + \ldots = \sum_r r p_r^u \ . \qquad (28)$$

La probabilité de l'état du gaz défini par l'ensemble des nombres de répartition p_r^u est:

$$W = \prod_u \frac{A^u!}{p_0^u!\, p_1^u!\, p_2^u!\, \ldots} \ .$$

On en déduit une formule analogue à l'équation (23) du chapitre III:

$$\log W = \sum_u A^u \log A^u - \sum_u \sum_r p_r^u \log p_r^u \ . \qquad (29)$$

La condition de probabilité maximum de l'état d'équilibre thermodynamique est accompagnée, dans le cas présent, des conditions accessoires suivantes. Les nombres A^u définis par l'équation (27) et l'énergie totale

$$U = \sum_u \sum_r E^u r p_r^u$$

doivent être constants de même que précédemment; mais, de plus, le nombre N des molécules contenues dans le volume considéré est ici également donné d'avance, et par conséquent constant. Ce nombre est exprimé par:

$$N = \sum_u \sum_r r p_r^u .$$

On obtient donc, en variant les p_r^u, les équations suivantes:

$$\sum_u \sum_r \delta p_r^u \left(1 + \log p_r^u\right) = 0 ,$$

$$\sum_u \sum_r \delta p_r^u \cdot r E^u = 0 ,$$

$$\sum_u \sum_r \delta p_r^u \cdot r = 0 ,$$

$$\sum_r \delta p_r^u = 0 .$$

En y introduisant des coefficients indéterminés, on remplace ce système d'équations par l'équation unique:

$$\sum_u \sum_r \delta p_r^u \left(1 + \log p_r^u + \lambda^u + \frac{r E^u}{\beta} + \rho r\right) = 0 \qquad (30)$$

qui fournit pour les nombres p_r^u l'expression:

$$p_r^u = B^u e^{-r\left(\frac{E^u}{\beta} + \rho\right)} .$$

En déterminant le coefficient B^u de la même façon que précédemment (chapitre III), on trouve:

$$p_r^u = A^u \left(1 - e^{-\left(\frac{E^u}{\beta} + \rho\right)}\right) e^{-r\left(\frac{E^u}{\beta} + \rho\right)} .$$

Les nombres N^u, définis par l'équation (28), sont:

$$N^u = \frac{A^u e^{-\left(\frac{E^u}{\beta}+\rho\right)}}{1 - e^{-\left(\frac{E^u}{\beta}+\rho\right)}} . \tag{31}$$

L'équation (31) est équivalente à la loi de répartition des vitesses de Maxwell

$$N^u = \alpha A^u e^{-\frac{E^u}{\beta}} ,$$

si l'on introduit l'abréviation:

$$e^{-\rho} = \alpha ,$$

et si l'on suppose ρ suffisamment grand pour qu'on puisse, au dénominateur de l'expression (31), négliger, vis-à-vis de 'unité, le terme affecté du coefficient $e^{-\rho}$. Nous montrerons plus loin que, dans les conditions expérimentalement réalisables, la quantité ρ est effectivement toujours très grande. Dans la suite du calcul nous nous bornerons à inscrire les termes de premier ordre en $e^{-\rho}$.

Le nombre total des molécules est:

$$N = \alpha \sum_u A^u e^{-\frac{E^u}{\beta}} . \tag{32}$$

On en déduit la valeur de l'exposant ρ:

$$\rho = - \log \alpha = \log \sum_u A^u e^{-\frac{E^u}{\beta}} - \log N . \tag{33}$$

L'énergie du gaz est:

$$U = \sum_u N^u E^u = \alpha \sum_u A^u e^{-\frac{E^u}{\beta}} E^u . \tag{34}$$

Pour l'entropie du gaz on trouve:

$$S = k \log W + \text{const} = k\left[\frac{U}{\beta} + N\rho\right] + \text{const} . \tag{35}$$

Le terme jouant le rôle principal dans l'expression de l'entropie du rayonnement noir, et qui dans le cas présent aurait la valeur:

$$-\sum_u A^u \log\left(1 - e^{-\left(\frac{E^u}{\beta}+\rho\right)}\right),$$

ne figure pas dans notre formule (35). Il se réduit en effet, au degré d'approximation adopté, à:

$$\sum_u \alpha A^u e^{-\frac{E^u}{\beta}} = N ,$$

et le nombre N est à négliger parce que nous supposons ϱ très grand par rapport à l'unité.

En dérivant S par rapport à T, on trouve (voir les chapitres II et III) pour la constante β la valeur:

$$\beta = kT .$$

La somme:

$$\sum_u A^u e^{-\frac{E^u}{\beta}} = \sum_u A^u e^{-\frac{mu^2}{2kT}}$$

est à remplacer, selon (27), par l'intégrale:

$$\frac{4\pi m^3 V}{h^3}\int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2 du = \left(\frac{2\pi kmT}{h^2}\right)^{3/2} V .$$

On en tire, selon (33), la valeur de la grandeur ϱ:

$$\rho = \log\left\{\left(\frac{2\pi kmT}{h^2}\right)^{3/2}\frac{V}{N}\right\} . \tag{36}$$

L'énergie du gaz est exprimée par l'intégrale:

$$U = \frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi kmT}\right)^{3/2}\frac{2\pi m^4 V}{h^3}\int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^4 du .$$

D'où l'on déduit la formule bien connue:

$$U = \frac{3}{2} NkT . \tag{37}$$

Les valeurs (36) et (37) de ϱ et de U, substituées dans la formule (35), fournissent:

$$S = kN \log \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi kmeT}{h^2} \right)^{3/2} \right\} + \text{const} . \qquad (38)$$

Cette expression est identique à l'expression (8) obtenue au premier chapitre.

La présente théorie statistique fournit donc sans autres les expressions complètes des fonctions thermodynamiques des gaz parfaits, mais elle indique de plus les limites de validité des formules obtenues, sans qu'il soit nécessaire d'y faire intervenir des considérations relatives à la forme des cellules d'état. En effet, l'approximation avec laquelle les formules précédentes ont été calculées devient insuffisante si le facteur

$$\alpha = e^{-\varrho}$$

n'est pas très petit vis-à-vis de l'unité. Selon (36), on peut formuler cette condition de la façon suivante:

$$\left(\frac{h^2}{2\pi kmT} \right)^{3/2} \frac{N}{V} << 1 . \qquad (39)$$

Les conditions dans lesquelles la théorie cinétique des gaz perd sa signification peuvent être caractérisées par l'introduction d'une grandeur Θ, définie par la formule:

$$\Theta = \frac{h^2}{2\pi km} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} .$$

En désignant par L le nombre d'Avogadro, par R la constante des gaz parfaits, par M la masse moléculaire du gaz monoatomique en question, on peut aussi écrire:

$$\Theta = \frac{h^2 L^2}{2\pi RM} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} .$$

Remplaçons les constantes universelles par leurs valeurs numériques:

$$h = 6{,}525 \,.\, 10^{-27} ,$$
$$L = 6{,}074 \,.\, 10^{23} ,$$
$$R = 8{,}315 \,.\, 10^{7} .$$

On trouve:

$$\Theta = \frac{3,00}{M} \cdot 10^{-14} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} . \tag{40}$$

La condition (39) peut alors être exprimée par:

$$T >> \Theta . \tag{41}$$

Si la température absolue du gaz, T, n'est pas très grande par rapport à Θ, *toute la théorie cinétique perd sa signification.*

Pour l'hélium (M = 4), en prenant

$$\frac{N}{V} = 2,71 \cdot 10^{19} ,$$

chiffre indiquant le nombre des molécules contenues dans 1 cm^3 d'un gaz parfait à 0° et 1 atm., on trouve:

$$\Theta = 0,07 \text{ degrés abs.}$$

Cette valeur paraît être assez petite pour qu'une contradiction avec les données expérimentales actuelles ne soit pas à craindre.

La méthode statistique de Bose, qui conduit à l'établissement de la loi du rayonnement noir par des considérations basées uniquement sur des principes de quanta, permet aussi de démontrer que les formules de la théorie cinétique des gaz sont en accord avec la théorie des quanta. De plus, on arrive, à l'aide de cette méthode, à prévoir les conditions dans lesquelles aura lieu la « dégénérescence » du gaz. Ces conditions découlent de la théorie elle-même, sans qu'on ait besoin de faire intervenir des hypothèses plus ou moins arbitraires sur la « forme » des cellules d'état.