Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 8 (1926)

Artikel: Sur les mouvements internes et la stratification des corps célestes
Autor: Wavre, Rolin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742410

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur les mouvements internes et la stratification des corps célestes

PAR

Rolin WAVRE

On sait que le Soleil, Jupiter, Saturne ne tournent pas d'un bloc autour de leur axe de rotation. L'équateur fait un tour en moins de temps que le voisinage des pôles.

C'est un résultat d'observation que la vitesse augulaire est fonction de la latitude sur la surface libre.

Montrons qu'il est très vraisemblable que *toutes les particules d'une même parallèle à l'axe tournent avec la même vitesse.*

Cette propriété si simple sur les mouvements internes ne semble pas avoir été aperçue par les auteurs qui après Clairaut, Poincaré et M. Volterra se sont occupés des figures des planètes et du mouvement d'une masse fluide hétérogène sous l'influence de l'attraction de ses particules.

M. Véronnet ne la mentionne pas dans le numéro du *Mémorial* (fasc. XIII, 1926) où il synthétise les résultats obtenus sur ce sujet.

Envisageons donc un fluide parfait composé de couches de densité ρ qui soient des surfaces de révolution autour de l'axe des z. Chaque molécule décrira un parallèle avec une vitesse angulaire $\omega\ (x^2 + y^2, z)$. Soit $p(x, y, z)$ la pression et $U\ (x, y, z)$ le potentiel de Newton.

§ 1. *Les mouvements internes.*

Les équations de l'hydrodynamique qui régissent ce mouvement s'écrivent:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{et ici :} \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d^2z}{dt^2} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} .$$

Elles donnent lieu à la relation:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho H ,$$
$$H = dU + \omega^2 (x\,dx + y\,dy) ;$$

ρ joue donc le rôle d'un facteur intégrant, et il est facile de vérifier que l'expression H en admet un.

Avec les auteurs précédemment mentionnés imposons-nous la condition très naturelle :

La pesanteur doit être en chaque point normale à la surface d'égale densité passant par ce point.

Alors la quantité H sera nulle ainsi que dp, il ne faut pas l'oublier, sur toute surface à ρ constant.

La pression p sera donc constante à densité constante; ρ est fonction de p seulement.

Le facteur intégrant ρ (x, y, z) a donc sous la condition A) une forme extrêmement simple :

$$\rho = f(p) .$$

Mais alors H est la différentielle totale de la fonction :

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} ,$$

et les équations du mouvement s'écrivent:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \omega^2 x$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y \quad \text{ou} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \omega^2 y$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

en posant :

$$P - U = Q .$$

Mais Q ne dépend pas de z, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ non plus, de sorte que ω ne saurait en dépendre.

On a donc :

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \omega = f(x^2 + y^2) .$$

Et il existe un potentiel des accélérations :

$$Q = \int_0^l \omega^2(l) \frac{1}{2} dl^2 ,$$

obtenu en posant $l^2 = x^2 + y^2$.

La vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe.

C'est une conséquence des équations de l'hydrodynamique et de la condition imposée par les auteurs précédents.

Ce résultat relatif à un fluide parfait obtenu, doit-on le transformer dans le concret pour les corps célestes?

1° La *température*. Si les surfaces, voisines de sphères concentriques, d'égale pression et d'égale densité sont aussi isothermes lorsque la profondeur est appréciable, *ce qui est très vraisemblable*, cette intervention de la température n'altère pas nos conclusions.

2° Le *frottement*. S'il y avait une *viscosité* dont il fallût tenir compte, il y a longtemps que le Soleil, Saturne et Jupiter tourneraient d'un seul bloc, le frottement aurait rendu imperceptible le mouvement des zones les unes par rapport aux autres. A-t-on jamais observé un ralentissement des mouvements relatifs des zones parallèles ? La viscosité est donc très faible et il ne semble pas qu'il y ait lieu de la faire intervenir en première approximation.

Notre proposition ne laisse donc subsister dans le concret, pour le soleil et les grosses planètes, que de très faibles doutes. Et pour un fluide parfait nous l'avons démontrée.

Un fait à remarquer c'est que *notre propriété est indépendante de la stratification, c'est-à-dire de la répartition des matières.*

§ 2. *La stratification.*

Le but de ce paragraphe est d'indiquer de nouvelles équations fonctionnelles pour la détermination des figures d'équilibre des planètes.

Distinguons quatre degrés de difficulté du problème.

I. *Masse liquide homogène incompressible au repos.*

Soit V le volume liquide considéré, S la surface qui le limite; a, b, c un point de V, x, y, z un point de l'espace.

Le potentiel au point x, y, z sera:

$$U(x, y, z) = \rho \int_V \int \int \frac{dV}{r},$$

ρ étant la densité du liquide et r la distance des deux points a, b, c et x, y, z.

La variation du potentiel sera:

$$dU = \rho \int_V \int \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dz \right] dV ;$$

or on a:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c},$$

d'où:

$$dU = - \rho \int_V \int \int \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{dx}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{dy}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{dz}{r}\right) \right] da\, db\, dc ,$$

mais la quantité entre crochets est une divergence; $d\varphi$ s'exprimera donc au moyen d'un flux au travers de la surface S:

$$dU = - \rho \int_S \int \frac{\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz}{r} d\sigma ,$$

α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale n à la surface S au point a, b, c de celle-ci.

On peut donc écrire :

$$dU = -\rho\, ds \int\int_S \frac{\cos(d, n)}{r}\, d\sigma ,$$

d désignant la direction du déplacement ds du point potentié x, y, z.

On sait que Gauss a obtenu pour le potentiel lui-même l'expression suivante :

$$U = -\frac{1}{2}\rho \int\int_S \cos(r, n)\, d\sigma ;$$

notre expression en est la forme différentielle.

Pour que la masse fluide soit en équilibre, il faut et suffit que la surface S soit équipotentielle ; de sorte que, pour toute direction d tangente à S, on doit avoir :

$$\int\int_S \frac{\cos(d, n)}{r}\, d\sigma = 0 ; \qquad (1)$$

c'est la première équation fonctionnelle que je me proposais de donner.

Permet-elle de démontrer que la sphère seule est figure d'équilibre, je n'ai pas entrepris cette recherche.

II. *Equilibre relatif d'une masse fluide homogène et incompressible.*

La masse tourne maintenant d'un mouvement d'ensemble autour d'un axe oz avec une vitesse angulaire constante ω. Il suffira d'adjoindre à U le potentiel de la force centrifuge.

La condition d'équilibre s'exprimera sous la forme :

$$\omega^2\left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds}\right) = \rho \int\int_S \frac{\cos(d, n)}{r}\, d\sigma , \qquad (2)$$

équation à satisfaire quel que soit le déplacement ds sur S.

III. *Equilibre relatif d'une masse fluide hétérogène.*

Distinguons la répartition $S_t (0 \leqq t \leqq 1)$ des surfaces à densité constante et la densité $\rho(t)$ de la couche répartie sur la surface S_t.

En appliquant au calcul du potentiel de notre masse de configuration quelconque un procédé indiqué par MM. Hamy

et Véronnet pour des couches ellipsoïdales, en considérant le fluide hétérogène comme une superposition de fluides homogènes remplissant les volumes V_t limités aux surfaces S_t, le potentiel s'écrira, en affectant d'un indice ce qui est lié aux variables d'intégration:

$$U = \int_0^1 \frac{d\rho(t')}{dt'} dt' \int\int_{V_{t'}} \int \frac{dV_{t'}}{r} .$$

L'artifice de calcul indiqué sous la rubrique I s'applique ici et donne :

$$dU = -\int_0^1 \frac{d\rho(t')}{dt'} dt' \int\int_{S_{t'}} \frac{\cos(d, n')}{r} d\sigma' .$$

Exprimons que le potentiel total est constant sur chaque surface S_t et nous obtiendrons l'équation :

$$\omega^2 \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right) = \int_0^1 \frac{d\rho(t')}{dt'} dt' \int\int_{S_{t'}} \frac{\cos(d, n')}{r} d\sigma' . \quad (3)$$

Nous avons supposé la densité nulle sur la surface extérieure. Si elle n'est pas nulle, il faut ajouter aux seconds membres des trois équations précédentes un terme qu'on imagine facilement. Soit:

$$a = a(u', v', t') , \qquad b = b(u', v', t') , \qquad c = c(u', v', t')$$

et

$$x = x(u, v, t) , \qquad y = y(u, v, t) , \qquad z = z(u, v, t)$$

la représentation paramétrique des surfaces $S_{t'}$ et S_t. Il faudra que l'équation (3) soit satisfaite quelles que soient la valeur de t et les différentielles du et dv, de sorte que cette équation (3) donne lieu à deux équations de la forme:

$$F(t, u, v) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 H(t') \Phi(t, u, v, t', u', v') dt' du' dv' .$$

C'est là une équation fonctionnelle du type de Fredholm. En supposant la répartition géométrique S_t donnée, H qui repré-

sente la dérivée de la densité sera seule fonction inconnue et l'équation précédente est bien une équation de Fredholm de première espèce. Si les surfaces S_t sont de révolution, nous n'aurons qu'une équation à satisfaire: celle qui correspond à un déplacement suivant un méridien.

La théorie des équations intégrales laisse prévoir qu'il n'y a que certaines répartitions géométriques qui seront susceptibles de provoquer un mouvement d'ensemble quand encore on les aura chargées convenablement.

IV. *Le cas général.*

Il ne diffère du précédent qu'en ceci: au lieu de supposer ω constant, on pourra se donner un ω variable, pourvu que cette vitesse angulaire ne dépende que de la distance à l'axe comme le veut notre propriété $\omega = f(x^2 + y^2)$.

On pourra se donner $\omega(x^2 + y^2)$, quantité connue, puisqu'elle est observable à la surface libre. Les surfaces d'égale densité sont ici de révolution et l'unique équation de Fredholm (3) donne lieu aux mêmes remarques que le cas précédent.

La stratification s'obtiendra en cherchant les noyaux:

$$\Phi = \int_{S_{t'}} \int \frac{\cos(d, n')}{r} d\sigma' ,$$

qui assurent l'existence d'une solution $\frac{d\rho(t')}{dt'}$. C'est sous cette forme que se traduit pour nous la recherche du domaine d'intégration qui est précisément l'inconnue.

Pratiquement, quand il faudra rejoindre les mesures, on tiendra compte des données suivantes:

1° la masse totale qui fournit un invariant intégral connu,

2° la répartition des vitesses dans toute la masse,

3° la surface libre S_0 ou, ce qui revient au même, les fonctions:

$$x = x(u, v, 0) , \qquad y = y(u, v, 0) , \qquad z = z(u, v, 0) .$$

Peut-être ces données permettent-elles de résoudre l'équation (3) de proche en proche.