Sur une généralisation d'une formule utile pour la géodésie

Autor(en): **Dive, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **10 (1928)**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-742824

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

uniquement sur une même surface d'égale densité. Elles sont valables pour tout mouvement de seconde espèce. L'expression (3) de la déviation de la verticale était déjà connue dans le cas particulier de l'équilibre relatif; elle s'étend donc au cas où la vitesse angulaire ω ne dépend que de la distance l à l'axe de rotation.

On sait[1] que le coefficient g est entièrement déterminé sur la surface libre à partir des éléments de Stokes généralisés:

Surface libre S, vitesse angulaire $\omega(l)$, masse totale M.

De sorte que: L'accroissement des deux rayons de courbure principaux et la déviation de la verticale, dans le passage de la surface libre à une surface d'égale densité infiniment voisine, sont entièrement déterminés par les éléments de Stokes généralisés.

Pierre Dive. — *Sur une généralisation d'une formule utile pour la Géodésie.*

Poursuivant ses recherches sur la rotation autour d'un axe d'une masse fluide hétérogène, dans le cas important où la densité ne dépend que de la pression, M. Rolin Wavre a obtenu récemment[2] une intéressante relation entre l'accélération de la pesanteur g, la dérivée $\frac{dg}{dn}$ prise normalement à la couche de densité ρ passant au point considéré, la courbure moyenne C de cette couche en ce point et le laplacien du potentiel Q des accélérations:

$$\frac{dg}{dn} = Cg + \Delta Q - 4\pi\varepsilon\rho \ , \qquad (1)$$

ε désignant la constante de la gravitation universelle.

Nous nous proposons d'établir, au moyen d'un procédé qui nous a été suggéré par les calculs de M. Wavre, une formule, analogue à la précédente, mais qui puisse s'appliquer au cas

[1] Voir notre note de la séance du 3 novembre 1927.

[2] Compte Rendu des séances de la *Société de physique et d'histoire naturelle de Genève*. Vol. 44, N° 3. Août-décembre 1927.

général, dont nous avons montré la possibilité [1], *où les surfaces d'égale densité ne coïncident pas nécessairement avec les surfaces d'égale pression.*

Le champ de la pesanteur à l'intérieur d'un astre fluide *peut* alors ne pas être normal aux couches de densité constante, contrairement à ce qu'avaient admis et considéré comme nécessaire les auteurs qui, après Laplace, se sont occupés de la rotation autour d'un axe d'un fluide hétérogène.

M. Wavre a donné le nom de mouvements de troisième espèce aux mouvements internes d'un tel fluide, lorsque la condition d'orthogonalité en question n'est pas satisfaite [2].

Supposons que *oz* soit l'axe de rotation de la planète; et soient U le potentiel newtonien des forces d'attraction mutuelle des molécules, g_x, g_y, g_z les composantes de la pesanteur $\vec{g}$ suivant les axes de référence, ω la vitesse angulaire de la molécule passant au point (x, y, z).

On a:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x \ , \\ g_y &= \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y \ , \\ g_z &= \frac{\partial U}{\partial z} \ , \end{aligned} \qquad (2)$$

Divisons les deux membres de ces relations respectivement par rapport à x, y, z et ajoutons les; on obtient l'équation:

$$\mathrm{Div}\,\vec{g} = \Delta U + x\frac{\partial \omega^2}{\partial x} + y\frac{\partial \omega^2}{\partial y} + 2\omega^2 \ , \qquad (3)$$

Δ étant le symbole de Laplace.

La densité s'introduit immédiatement en utilisant la relation de Poisson:

$$\Delta U = -4\pi f \rho \ , \qquad (4)$$

où f représente la constante de la gravitation universelle.

[1] Compte Rendu des séances de la *Société de physique et d'histoire naturelle de Genève.* Vol. 44, N° 2. Avril-juillet 1927.

[2] C. R. Ac. des Sc. Paris, t. 185, p. 1113, séance du 21 novembre 1927.

Soient, d'autre part, α, β, γ les cosinus directeurs de la pesanteur $\vec{g}$ par rapport aux axes de référence; on a:

$$g_x = \alpha g \ , \qquad g_y = \beta g \ , \qquad g_z = \gamma g \tag{5}$$

et, par suite:

$$\mathrm{Div}\,\vec{g} = g\,\mathrm{Div}\,(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma) + \alpha\frac{\partial g}{\partial x} + \beta\frac{\partial g}{\partial y} + \gamma\frac{\partial g}{\partial z}\ . \tag{6}$$

Mettons en évidence la signification géométrique remarquable du terme Div (α, β, γ).

Pour cela, considérons la famille des surfaces orthogonales au champ de la pesanteur. Les cosinus directeurs α, β, γ sont également ceux de la normale à l'une de ces surfaces; de sorte que, C désignant la courbure moyenne [1] de cette surface au point considéré, une relation importante de la théorie des surfaces [2] nous donne:

$$\mathrm{Div}\,(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma) = -\,2\mathrm{C}\ .$$

D'ailleurs, on remarquera que les équations fondamentales de l'hydrodynamique mises, en vertu de nos notations, sous la forme:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g_x \ , \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = g_y \ , \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g_z \ . \tag{7}$$

exprimant la proportionnalité des paramètres directeurs $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ de la normale aux *surfaces à pression constante* et des paramètres directeurs g_x, g_y, g_z des surfaces orthogonales dont nous venons de parler, impliquant la coïncidence de ces deux systèmes de surfaces.

Quant au terme $\alpha\frac{\partial g}{\partial x} + \beta\frac{\partial g}{\partial y} + \gamma\frac{\partial g}{\partial z}$, il est précisément égal à la dérivée $\frac{dg}{dn}$ de g dans la direction de la normale intérieure à la surface d'égale pression passant au point (x, y, z).

[1] Nous appelons ainsi la *moyenne* des courbures des sections principales.

[2] Voir par ex. Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitésimale*, p. 431, N° 372.

Enfin, ω^2 ne dépendait que de la cote de la molécule envisagée et du carré l^2 de sa distance à l'axe de rotation, on a:

$$x\frac{\partial \omega^2}{\partial x} + y\frac{\partial \omega^2}{\partial y} = 2l^2\frac{\partial \omega^2}{\partial l^2}. \qquad (8)$$

Si l'on porte alors les expressions obtenues dans l'équation (3), on obtient la relation cherchée:

$$\boxed{\frac{dg}{dn} = 2gC - 4\pi f\rho + 2l^2\frac{\partial \omega^2}{\partial l^2} + 2\omega^2} \qquad (9)$$

Cette relation s'applique, en particulier, à la surface du fluide qui, selon notre hypothèse, est la limite des surfaces à pression constante.

Nous avons donc ainsi une expression exacte de la variation normale de la pesanteur à la surface d'une planète, en fonction des éléments superficiels C_e, g_e, ρ_e, ω_e directement observables.

Lorsque la couche superficielle tourne en bloc, condition qui peut être considérée comme très sensiblement réalisée sur la Terre, ω_e est une constante, le terme $2l^2\frac{\partial \omega^2}{\partial l^2}$ disparaît et il reste:

$$\left(\frac{dg}{dn}\right)_e = 2g_eC_e - 4\pi f\rho_e + 2\omega_e^2. \qquad (10)$$

On peut expérimentalement mesurer la valeur de $\left(\frac{dg}{dn}\right)_e$; il suffit pour cela de comparer les nombres d'oscillations effectuées, pendant une même durée, par un pendule de longueur déterminée placé successivement à l'origine et au fond d'un puits de mine [1]. Il est donc, inversement, possible de calculer la courbure moyenne C_e au moyen des éléments connus $\left(\frac{dg}{dn}\right)_e$, ω_e, ρ_e, g_e.

Dès lors, on voit tout l'intérêt que présente la relation (10) pour la détermination de la forme d'équilibre du géoïde terrestre [2].

[1] Cette expérience a été effectuée en 1854, par Airy, dans un des puits de la mine de Harton, dont la profondeur était de 385 mètres.

[2] Cf. TISSERAND. Traité de Mécanique céleste, T. II, p. 327 et 328.

La formule (9) est à rapprocher de celle de Saigey [1]

$$\frac{dg}{da} = 4\pi f\left(\rho - \frac{2}{a^3}\int_0^a \rho a^2 da\right)$$

qui donne, une valeur approximative [2] de la variation de g en fonction de la distance au centre a et de la densité ρ, dans un sphéroïde hétérogène.

La formule (9) a l'avantage d'être rigoureuse, plus générale et d'introduire un élément géométrique important.

Royat, janvier 1928.

L. Duparc et E. Rogovine. — *Sur un nouvel indicateur pour le dosage volumétrique de l'acide phosphorique.*

La titration d'une solution d'acide phosphorique par l'acétate d'uranyle se fait ordinairement soit avec de la cochenille comme indicateur, soit avec du ferrocyanure de potassium par la méthode de la touche. La titration doit se faire en solution faiblement acide, de sorte qu'on est forcé de neutraliser en grande partie l'excès d'acide par l'acétate d'ammoniaque. La cochenille ne donne pas de virage net et est inutilisable avec les urines, la réaction au ferrocyanure est délicate, longue, et souvent incertaine. Nous avons remarqué que la solution aqueuse de salycilate de soude donne avec quelques gouttes d'acétate d'uranyle une coloration intense orangé qui, avec un petit excès de la solution d'urane, devient de plus en plus rouge. Pour nous rendre compte du groupement de la molécule de salycilate qui réagit avec le groupe UO^2, nous avons répété la même expérience avec deux corps, l'aspirine et le salol, dans lesquels tantôt le groupement phénolique, tantôt le carboxyle était combiné. L'aspirine ne donne aucune coloration, tandis que le salol donne une coloration jaune orangé plus faible que le

[1] SAIGEY. Petite Physique du globe, t. II, p. 185.

[2] La formule de Saigey est rigoureuse pour une masse hétérogène immobile stratifiée en couches sphériques.