Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 10 (1928)

Artikel: Sur les formules de Clairaut relatives à la géodésie
Autor: Wavre, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742855

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Séance du 6 décembre 1928.

R. Wavre. — *Sur les formules de Clairaut relatives à la géodésie.*

Considérons une masse fluide hétérogène dont les différentes particules s'attirent suivant la loi de Newton. Supposons que l'équilibre relatif soit réalisé et que cette masse que nous appellerons une planète tourne avec une vitesse angulaire ω autour de son axe polaire. Ses surfaces d'égale densité seront définies par un paramètre t, elles doivent avoir un même plan équatorial de symétrie et elles seront supposées de révolution. Nous désignerons par $\rho(t)$ la densité, par $g(t)$ la pesanteur sur l'axe polaire. Soit encore $a(t)$ le rayon polaire, $b(t)$ le rayon équatorial, $c_P(t)$ la courbure moyenne sur l'axe polaire, $c_E(t)$ la courbure moyenne dans le plan équatorial, de la surface t. D'une relation (formule 4) donnée dans la séance du 16 février 1928 [1] que je ne reproduis pas ici, on déduit très aisément la suivante ou i désigne la constante de la gravitation universelle et où les accents représentent des dérivées par rapport à t:

$$\frac{4\pi i\,\rho(t) - 2\omega^2}{g(t)} = \frac{c_E\,b' - c_P\,a' + \dfrac{a''}{a'} - \dfrac{b''}{b'}}{b'^2 - a'^2} \qquad (1)$$

relation rigoureuse et générale s'appliquant à toute figure d'équilibre. Elle lie comme on le voit, les variations des rayons a et b, les courbures moyennes c_E et c_P à la densité et à la pesanteur. Le second membre comme le premier est à calculer sur la surface t.

Considérons, maintenant, le cas spécial très important pour la pratique, où s'est placé Clairaut. Celui d'une vitesse angulaire très faible et d'une stratification en ellipsoïdes très peu aplatis. Posons $\varepsilon = b - a$ (différence des axes), puis faisons $a = t$, ce qui ne restreint nullement la valeur des déductions suivantes; cela donne:

$$a' = 1 \quad a'' = 0 \quad b = 1 + \varepsilon(t) \quad b' = 1 + \varepsilon' \quad b'' = \varepsilon''$$

[1] C. R. des séances Soc. phys., Vol. 45, n° 1, page 39 (1928).

Puis cherchons, en première approximation, les valeurs des deux membres de l'équation (1). Prenons d'abord le second. En négligeant les termes du second ordre en ε, ε', ε'', vis-à-vis de ceux du premier ordre, on trouve tout d'abord

$$c_E = \frac{2}{t} \qquad c_P = \frac{2}{t}\left(1 - 2\frac{\varepsilon}{t}\right)$$

et l'équation (1) devient à cet ordre d'approximation

$$\frac{4\pi i\,\rho(t) - 2\omega^2}{g(t)} = \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} . \tag{2}$$

Le second membre, on le voit, ne dépend que des rapports $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ et $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$. Lorsque ω et ε tendent vers 0 ce membre ne tend pas vers zéro. Calculons, ensuite, le premier membre approximativement. On le fera dans l'hypothèse d'une stratification sphérique très voisine de celle que l'on envisage, cela ne présente pas de difficulté et l'on trouve la valeur

$$\frac{2\omega^2 - 4\pi i\,\rho(t)}{g(t)} = \frac{3}{t} + \frac{D'}{D} \tag{3}$$

où D (t) est la densité moyenne de la matière intérieure à la surface t. En rapprochant (2) et (3) on obtient

$$\frac{2}{t} + \frac{D'}{D} = \frac{2}{t^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \tag{4}$$

et en introduisant l'aplatissement e de la surface t

$$e = \frac{\varepsilon}{t} = \frac{b-a}{a} ,$$

on trouve après un calcul tout élémentaire la relation

$$e''D + 2e'D' + \frac{2}{t}eD' + \frac{6}{t}e'D = 0 . \tag{5}$$

C'est l'*équation de Clairaut* qui est à la base de la géodésie. Elle lie l'aplatissement e des couches d'égale densité à la densité moyenne à l'intérieur de chacune d'elles.

L'équation de Clairaut (5) n'est valable que pour une stratification quasi sphérique, tandis que la relation (1) est valable quelles que soient la stratification et la vitesse angulaire. L'équation (1) de la présente note et l'équation (4) de notre note du 16 février 1928 sont donc des extensions de l'équation de Clairaut rigoureuses et générales.

On voit que notre méthode n'exige à aucun instant l'emploi des fonctions sphériques dont l'usage est constant chez Laplace et Poincaré et dans les ouvrages de géodésie supérieure tels que ceux de Helmert ou de Tisserand.

La méthode retracée dans cette note et dans les précédentes nous paraît être la plus simple, et la plus satisfaisante, car on ne fait une approximation qu'en dernier lieu sur des formules d'ailleurs nouvelles et surtout rigoureuses. Cherchons maintenant une relation entre l'aplatissement et la vitesse angulaire.

Pour cela remplaçons le c_{P} de tout à l'heure par c_ρ, c'est donc la courbure moyenne sur l'axe polaire de la surface de densité ρ; soit c_{U} la courbure moyenne sur le même axe et au même point de la surface U = constante, U désignant le potentiel du champ de Newton.

Par une transformation indiquée dans une note intitulée *Sur une formule utile pour la géodésie* (Séance du 17 novembre 1927, C. R., Vol. 44, n° 3, p. 162, formule 5), on peut écrire sur l'axe polaire

$$\frac{dg}{dt} + c_\rho g = 4\pi i \rho - 2\omega^2 \tag{6}$$

et

$$\frac{dg}{dt} + c_{\mathrm{U}} g = 4\pi i \rho \tag{7}$$

suivant qu'on se réfère au champ de la pesanteur ou au champ de Newton. En soustrayant membre à membre ces deux équations on trouve

$$\frac{2\omega^2}{g} = c_{\mathrm{U}} - c_\rho \tag{8}$$

relation vraie en tout point de l'axe polaire. Cette relation est encore vraie en dehors de la masse, c_ρ désigne alors la courbure

moyenne des surfaces équipotentielles pour le champ de la pesanteur.

Plaçons-nous ensuite sur la surface libre $t = 1$ et affectons de l'indice 1 tout ce qui s'y rapporte. La courbure c_U varie entre deux limites qui correspondent au cas d'une concentration de toute la masse au centre, d'une part, et à une répartition homogène, d'autre part. On trouve respectivement les deux valeurs 2 et $2\left(1 - \frac{6}{5} e_1\right)$, tandis que $c_\rho = 2(1 - 2e_1)$.

On en déduit les inégalités suivantes

$$\frac{4}{5} e_1 \leq \frac{\omega^2}{g} \leq 2 e_1 \qquad \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \leq e \leq \frac{4}{5} \frac{\omega^2}{g}$$

qui constituent elles aussi un important théorème de Clairaut.

Enfin, les surfaces d'égale densité étant de révolution les surfaces équipotentielles U = constante le sont aussi et les courbures moyennes c_U et c_ρ ont les valeurs

$$c_U = \frac{2}{R_U} \qquad c_\rho = \frac{2}{R_\rho}$$

R_U et R_ρ désignant les rayons de courbure des méridiennes des surfaces en question.

La relation (6) s'écrit donc sous la forme expressive:

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{R_U} - \frac{1}{R_\rho} .$$

Enfin, on vérifie aisément qu'en remplaçant les surfaces d'égale densité par les surfaces d'égale pression p, la formule (6) demeure exacte sur l'axe polaire pour toute rotation permanente. On a donc toujours dans ce dernier cas

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{R_U} - \frac{1}{R_p}$$

R_p étant le rayon de courbure de la méridienne de la surface à p constant.