Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 18 (1936)

Artikel: Relations focales entre des coniques osculatrices à une courbe et applications à la catoptrique

Autor: Rossier, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743068

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Relations focales entre des coniques osculatrices à une courbe et applications à la catoptrique

PAR

P. ROSSIER

---

1. — Soit un point régulier O d'une courbe analytique. La tangente et la normale y sont bien déterminées. Considérons l'ensemble des coniques jouissant des propriétés suivantes: elles passent par O; elles y sont tangentes à la courbe donnée; leur axe est parallèle à la normale à la courbe en O; O est un sommet de la conique. Ces propriétés imposent chacune une condition à la conique. Il existe donc une simple infinité de coniques appartenant à cet ensemble. Nous définirons une des courbes de cette variété en fournissant une donnée de plus. Nous choisirons la position de l'un des foyers de la conique, en ne traitant que le cas où les foyers réels sont sur la normale considérée. Soit p_1 la distance de ce foyer au sommet O de la conique et p_2 celle du deuxième foyer. Nous allons montrer que ces deux quantités sont liées par la relation

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \text{constante} ,$$

qui n'est autre que celle des foyers conjugués de l'optique géométrique.

Prenons le point O comme centre d'un système de coordonnées rectangulaires, dont l'axe des x est confondu avec la normale à la courbe. Nous porterons les x positifs dans la concavité de la courbe. L'axe des y coïncide avec la tangente. Pour des points

de la courbe infiniment voisins de O, l'abscisse est infiniment petite par rapport à l'ordonnée.

L'équation de la courbe peut alors être développée sous la forme

$$0 = x + ax^2 + bxy + cy^2 + (y^3) ,$$

où le symbole (y^3) représente la somme de termes de degrés supérieurs au deuxième. Nous supposons que la courbe n'a pas de contact supérieur avec sa tangente. Les coefficients a, b et c ne sont donc pas tous nuls.

Donnons-nous une valeur de y, petite. Il lui correspond une valeur petite, positive pour x. On a, à des termes supérieurs près,

$$x = \frac{-cy^2}{1 + by} .$$

c est donc négatif, non nul, sans quoi le contact serait d'ordre supérieur.

2. — Considérons maintenant une conique quelconque, satisfaisant aux quatre conditions imposées ci-dessus. Son équation peut être mise sous la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - x = 0 .$$

Des deux coefficients α et β, l'un au moins est positif. Ils le sont tous deux si l'on a affaire à une ellipse.

Les deux intersections de la conique avec Ox ont pour abscisses $x = 0$ et $x = \frac{1}{\alpha}$. α est positif pour une ellipse, négatif pour une hyperbole, β est toujours positif. L'abscisse du centre est donc $\frac{1}{2\alpha}$. L'ordonnée au centre, qui n'est autre que le demi petit-axe, est $\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}$. L'excentricité linéaire est

$$\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} - \frac{1}{4\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\beta(\beta - \alpha)}}{2\alpha\beta} .$$

On tire de là les abscisses des foyers

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = \frac{1}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta(\beta - \alpha)}}{2\alpha\beta} .$$

Considérons la fonction $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Elle est symétrique et rationnelle. Elle s'exprime donc au moyen d'une fonction rationnelle des coefficients d'une équation dont p_1 et p_2 sont les deux racines. Dans le cas particulier, la fonction symétrique est de degré — 1; le théorème des fonctions symétriques déclare que la somme des inverses des racines est égale au coefficient, changé de signe, du terme connu, dans le quotient polynôme dérivé, divisé par le polynôme lui-même, ce quotient étant ordonné suivant les puissantes croissantes de la variable.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, le polynôme est du deuxième degré,

$$f(x) = q + px + x^2 .$$

Sa dérivée est $p + 2x$. Le terme connu du quotient est $\frac{p}{q}$.

Dans notre cas particulier, les fonctions symétriques fondamentales sont

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{\alpha}$$

$$p_1 p_2 = \frac{1}{4\alpha^2} - \frac{\beta(\beta - \alpha)}{4\alpha^2\beta^2} = \frac{1}{4\alpha\beta} .$$

p_1 et p_2 sont positifs dans le cas de l'ellipse, et de signes opposés dans celui de l'hyperbole.

L'équation dont p_1 et p_2 sont les racines est

$$X - \frac{X}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha\beta} = 0 .$$

Calculons enfin la somme des inverses des racines. Il vient

$$\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{4\alpha\beta} = 4\beta .$$

Cette somme est indépendante de α.

On pourrait évidemment vérifier directement cette propriété par le calcul.

3. — Revenons maintenant à notre problème géométrique. La courbe donnée satisfait à l'équation

$$0 = x + ax^2 + bxy + cy^2 + (y^3) .$$

La conique est donnée par

$$0 = x - \alpha x^2 - \beta y^2 .$$

Pour que la conique passe par un point M de la courbe, il faut que les deux équations soient simultanément satisfaites pour les coordonnées X et Y de ce point. Faisons la différence de ces deux équations. Il vient

$$(c + \beta) Y^2 + bXY + (a + \alpha) X^2 + (Y^3) = 0 .$$

Supposons que M tende vers O . X est infiniment petit par rapport à Y. L'équation ci-dessus est satisfaite au troisième ordre près dès que

$$\beta = - c .$$

La condition de signe de β est satisfaite, puisque c est négatif.

L'équation d'une conique définie par les conditions imposées est donc

$$0 = x - \alpha x^2 + cy^2 .$$

α est arbitraire. Pour le déterminer, donnons nous l'abscisse p_1 de l'un des foyers

$$p_1 = \frac{1}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{c(\alpha + c)}}{2\alpha c} .$$

Cette équation est irrationnelle en α. A part une solution impropre $\alpha = 0$, qui conduit à considérer p_1 comme la différence de deux infinis, elle donne

$$\alpha = \frac{1 + 4p_1 c}{4p_1^2 c} .$$

La donnée d'un foyer impose une conique unique. L'ensemble de coniques considéré est un faisceau.

Formons l'expression des foyers conjugués

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 4\beta = -4c .$$

Elle est constante, indépendante de α donc de ρ_1. Notre théorème est démontré. Il peut être précisé sous la forme suivante.

Il existe un faisceau de coniques ayant un contact du deuxième ordre avec une courbe en un point régulier de celle-ci: et telles que ce point soit un sommet des coniques. Les foyers de ces coniques sont liés par la relation des foyers conjugués de l'opt'que géométrique

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \text{constante} ,$$

où p_1 et p_2 sont les distances de ces foyers au sommet commun des coniques.

4. — Cas particuliers.

Les calculs du N° 2 sont en défaut dans le cas de la parabole, où $\alpha = 0$. Mais les résultats obtenus par la confrontation des deux équations subsistent. Cherchons l'abscisse f du foyer de la parabole, appelé dans la suite foyer principal. L'équation de celle-ci peut être mise sous la forme

$$y^2 = \frac{x}{\beta} .$$

$\frac{1}{\beta}$ est le double du paramètre qui, lui, n'est autre que l'ordonnée au foyer. On a, en faisant $x = f$, dans l'équation de la parabole,

$$\frac{1}{4\beta^2} = \frac{1}{4c^2} = \frac{f}{\beta} = -\frac{f}{c} \qquad \text{et} \qquad f = -\frac{1}{4c} .$$

On tombe bien sur le cas où p_2 est infini, et la constante du théorème général est $\frac{1}{f}$.

Dans le cas du cercle, $p_1 = p_2 = 2f$. On retrouve une propriété connue.

5. — Applications à la théorie des miroirs de révolution.

Par un point O, traçons un axe Ox et un arc de courbe limité au point O et perpendiculaire à Ox en O. Faisons tourner l'arc de courbe autour de Ox. On engendre ainsi une surface révolution de sommet O. Au voisinage de ce point, la surface peut être considérée, au troisième ordre près, indifféremment comme une sphère, un paraboloïde de révolution, un ellipsoïde de révolution allongé, une nappe d'hyperboloïde de révolution à deux nappes.

Soit p_1 la distance au sommet d'un point de l'axe, réellement ou virtuellement lumineux. Supposons réfléchissante la surface considérée. Le miroir donne de ce point une image quasi-stigmatique, placée sur l'axe à une distance p_2 telle que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f},$$

où f est une constante, la distance focale principale du miroir.

Appliquons cela au cas particulier des télescopes. Considérons un miroir de révolution M de faible ouverture relative. Au foyer conjugué A′ d'un point lumineux A, placé sur l'axe, se produit une image quasi-stigmatique que l'on peut examiner à la loupe (télescope d'Herschell) ou recueillir sur une plaque sensible (photographie au premier foyer des télescopes modernes).

Plaçons un deuxième miroir de révolution m d'axe confondu avec celui de M et tel que l'un de ses foyers conjugués se trouve en un point A″ situé derrière M et que l'autre soit confondu avec A′, conjugué de A par rapport à M. Le miroir m donne de A′ une image quasi-stigmatique en A″. La position du miroir m définit les deux distances p_1 et p_2, donc son rayon de courbure $2f$.

Si ces deux distances sont de même signe, m est concave et placé au delà de A′ par rapport à M. C'est la solution de Grégory. Dans le télescope de Cassegrain, au contraire, p_1 et p_2 sont de signes contraires, m est placé entre M et A′.

Théoriquement, il existe deux solutions spéciales, celles de l'égalité, en valeur absolue de p_1 et p_2. Dans un télescope de Grégory, ils seraient tous deux infinis et m serait rejeté à

l'infini. Dans la solution Cassegrain, si $p_1 = p_2$, le petit miroir est plan. Cette solution plane sépare deux groupes de solutions, celles où le sommet de m est plus voisin de A′ que de A″, auquel cas m est convexe, et celle où la différence est opposée; m est alors concave. Seules les solutions Grégory ou Cassegrain dans lesquelles le diamètre de m est petit par rapport à celui de M présentent de l'intérêt; m alors est voisin de A_0'. Donc le miroir de Cassegrain est toujours convexe. Il est d'autant plus courbe qu'il est plus rapproché de A′.

Supposons que dans un appareil donné, on modifie la position de m par rapport à celle du réglage normal. A″ se déplace. En particulier, rapprochons m de M; A″ s'éloigne. Quant A′ est confondu avec le foyer principal de m, A″ est rejeté à l'infini. On utilise ce dispositif dans les télescopes qui alimentent un spectrographe sans fente. Continuons à rapprocher m et M. A″ est alors virtuel et se trouve derrière m.

Ce n'est que dans un télescope Grégory que A′ peut être confondu avec A″ sans se trouver sur m. On utilise ce dispositif sur certains projecteurs pour renvoyer sur M une partie du faisceau divergent issu de la source, et ne frappant pas M. m est alors sphérique et la source en occupe le centre. C'est là peut être le seul cas où l'on fait usage, dans la construction des instruments, du fait que le miroir sphérique est stigmatique pour son centre.