Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 18 (1936)

Artikel: Sur la distribution locale des tensions dans un milieu élastique
Autor: Lévy, Fernand
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743101

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

à 14000°, la largeur relative des raies de l'hydrogène est indépendante de la température.

La théorie des spectres laisse bien supposer l'exactitude de cette proposition. Il est cependant intéressant de la vérifier dans des conditions de température actuellement irréalisables dans un laboratoire terrestre.

Observatoire de Genève.

Fernand Lévy. — *Sur la distribution locale des tensions dans un milieu élastique.*

Introduction.

Lorsqu'un milieu continu est tendu par une charge continue, les fatigues $\vec{T}$ appliquées à la gerbe des éléments plans passant par un point P sont régies par une fonction vectorielle linéaire du vecteur-unité $\overrightarrow{PI}$ normal à l'élément plan. Pour tout trièdre trirectangle de sommet P pris comme référence cartésienne, les composantes de $\vec{T}$ (tension sur la face *négative* de l'élément plan) se déduisent de celles α, β, γ de $\overrightarrow{PI}$ par

$$\left|\begin{array}{l} T_x = T_{11}\alpha + T_{12}\beta + T_{13}\gamma \\ T_y = T_{21}\alpha + T_{22}\beta + T_{23}\gamma \\ T_z = T_{31}\alpha + T_{32}\beta + T_{33}\gamma \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left|\begin{array}{l} T_{ik} = T_{ki} \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \, . \end{array}\right. \tag{1}$$

T_x, T_y T_z, sont les demi-dérivées d'une forme quadratique $\oint(\alpha, \beta, \gamma)$, de discriminant $\| T_{ik} \|$ et l'on a pour T_n projection de $\vec{T}$ sur $\overrightarrow{PI}$

$$T_n = \oint(\alpha, \beta, \gamma) \, . \tag{2}$$

Cette fatigue normale T_n est une *pression* ou une *traction* selon que $T_n \gtrless 0$. La quadrique $\oint(\alpha, \beta, \gamma) = \pm 1$ possède des plans principaux fournis par l'équation en S; ce sont des plans de symétrie pour $\vec{T} = f(\overrightarrow{PI})$.

Adoptons-les comme plans cartésiens; (1), (2) deviennent avec de nouvelles notations

$$\left|\begin{array}{l} T_x = \sigma_1 \alpha \\ T_y = \sigma_2 \beta \\ T_z = \sigma_3 \gamma \end{array}\right. \quad (3) \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2 \,. \quad (4)$$

C'est sur cette base que l'Ecole française (Cauchy-Lamé), par confrontation avec une deuxième quadrique réglant la déformation locale, a établi les équations classiques de l'équilibre élastique. Pour elle, la *fatigue normale* σ a été prise *seule* en considération et la *fatigue tangentielle* τ négligée (Poinsot ne se refusait-il pas à admettre l'existence de la tension oblique sur un élément plan !). Un demi-siècle plus tard, l'Ecole allemande (Mohr, Föppl) et l'Ecole anglaise (Guest, Cook) ont réhabilité la fatigue tangentielle en montrant qu'elle joue lors de la rupture de l'équilibre élastique un rôle déterminant.

En replaçant les deux fatigues σ, τ *sur pied d'égalité*, Mohr a substitué aux quadriques à trois dimensions de Cauchy-Lamé une *épure plane*, encore peu connue en France, malgré que M. Mesnager ait signalé toute son importance dans ses nombreux ouvrages.

Nous avons pensé être utile en introduisant l'épure de Mohr par une méthode rapide, basée sur la *puissance d'un point de l'épure par rapport à ses trois cercles fondamentaux.* Nous en avons tiré une construction nouvelle. Nous caractérisons ensuite les *indicatrices sphériques* relatives aux sections de même fatigue normale et de même fatigue tangentielle. Enfin, nous indiquons une *représentation*, sur un secteur de cercle, *du domaine fondamental* des fonctions elliptiques modulaires, la tirant de l'épure dans le cas particulier du pur cisaillement.

* * *

§ 1. *L'épure de Mohr* [1].

Partons du système d'équations

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1^2\alpha^2 + \sigma_2^2\beta^2 + \sigma_3^2\gamma^2 = \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma_1\alpha^2 + \sigma_2\beta^2 + \sigma_3\gamma^2 = \sigma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{array}\right. \qquad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \qquad (5)$$

et portons, d'équerre, σ en abscisse, τ en ordonnée d'un point M *image* de I (α, β, γ). Ces points M recouvrent simplement un « triangle » (frontière incluse) compris entre trois demi-cercles c_1, c_2, c_3 construits sur les diamètres $\sigma_3\,\sigma_2$, $\sigma_1\,\sigma_3$, $\sigma_2\,\sigma_1$. Limiter I à l'octant sphérique I_1, I_2, I_3; $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$. Pour le retrouver [2], cherchons sous quelles conditions (5) est soluble en nombres non-négatifs α^2, β^2, γ^2. Le déterminant $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)$ est supposé *non-nul;* les numérateurs des solutions sont alors linéaires en $\sigma^2 + \tau^2$ et σ. On trouve

$$\left|\begin{array}{ll} \alpha^2 = \dfrac{\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma + \sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} & (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) > 0 \\ \beta^2 = \dfrac{\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_3 + \sigma_1)\sigma + \sigma_3\sigma_1}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \text{ avec} & (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) < 0 \\ \gamma^2 = \dfrac{\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma + \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} & (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) > 0\ . \end{array}\right. \qquad (6)$$

Le premier numérateur est la *puissance de* M *par rapport au cercle* c_1 et $P_1(M) = t_1^2(M)$ où t_1 est la tangente de M à c_1; le dénominateur est $P_1(\sigma_1) = t_1^2(\sigma_1)$. Le second numérateur est la puissance de M par rapport à c_2 et $P_2(M) = -t_2^2(M)$ où t_2 est la demi-corde perpendiculaire à $\overline{C_2M}$. De même pour c_3.

[1] MOHR, *Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik.* Zweite Auflage 1914. Verlag Ernst, Berlin, pages 192-202.

[2] Ed. DREYFUSS, *Leçons sur la théorie de l'élasticité et ses relations avec la résistance des matériaux.* Léon Eyrolles, éditeur, Paris, 1932, pages 34-40.

En résumé, (6) deviennent, complétées par les conditions

$$\alpha^2 \geqq 0 \qquad \beta^2 \geqq 0 \qquad \gamma^2 \geqq 0 \ ,$$

$$\left|\begin{array}{l} \alpha^2 = \dfrac{t_1^2(\mathrm{M})}{t_1^2(\sigma_1)} \geqq 0 \\[2ex] \beta^2 = \dfrac{t_2^2(\mathrm{M})}{t_2^2(\sigma_2)} \geqq 0 \\[2ex] \gamma^2 = \dfrac{t_3^2(\mathrm{M})}{t_3^2(\sigma_3)} \geqq 0 \ . \end{array}\right.$$

Ces conditions sont bien satisfaites si M est *hors* de c_1 ou sur lui, *à l'intérieur* de c_2 ou sur lui et *hors* de c_3 ou sur lui.

La correspondance ponctuelle parfaite ainsi définie entre I (α, β, γ) — sur l'octant $\mathrm{I}_1\,\mathrm{I}_2\,\mathrm{I}_3$ — et M (σ, τ) — sur le triangle de Mohr — est définie par

$$\left|\begin{array}{l} \cos a = \alpha = \dfrac{t_1(\mathrm{M})}{t_1(\sigma_1)} \\[2ex] \cos b = \beta = \dfrac{t_2(\mathrm{M})}{t_2(\sigma_2)} \\[2ex] \cos c = \gamma = \dfrac{t_3(\mathrm{M})}{t_3(\sigma_3)} \ . \end{array}\right. \qquad (7)$$

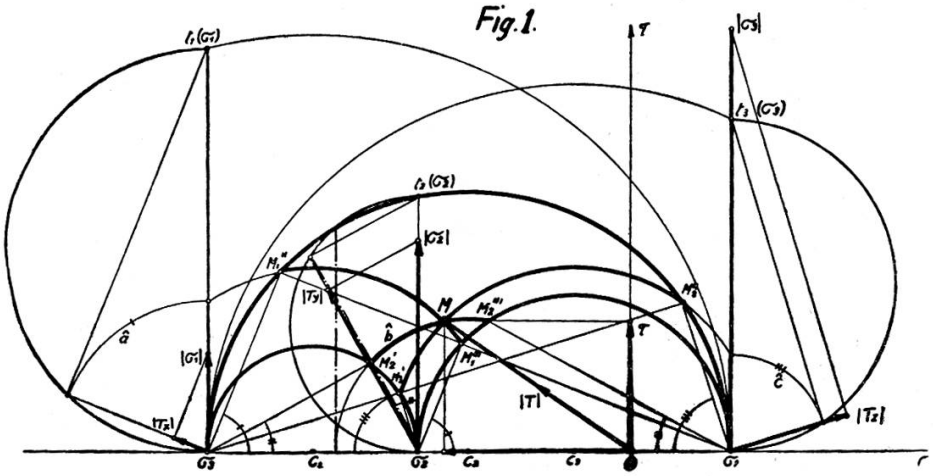
Sous cette forme, la figure 1 donne une *construction nouvelle* à la règle et au compas, du problème de Mohr :

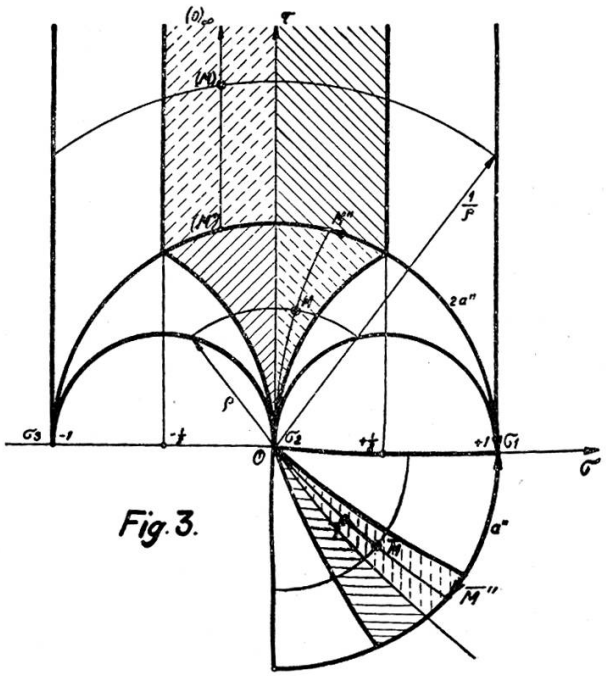
« On donne en valeur algébrique et en position les fatigues principales σ_1, σ_2, σ_3 en P. *L'index* I d'une section étant connu par a, b, c, *construire l'image* M et la *fatigue* $\vec{\mathrm{T}}$ ou réciproquement. »

La simplicité de notre tracé provient notamment de ce que M a été rabattu sur les tangentes en σ_3, σ_1 et sur la base; il est la conséquence naturelle des équations (6).

On sait que la « carte » de Mohr transforme les parallèles aux côtés de l'octant en parallèles aux cercles du triangle; les équations (7) le montrent. Elle transforme les faisceaux de méridiens par I_1, I_2 et I_3 en faisceaux de cercles par σ_1, σ_2, σ_3

tangents aux côtés qui s'y touchent. En effet, le long d'un méridien par I_3, $\frac{\alpha}{\beta} = k$ et (6) témoignent que M est sur un cercle par σ_3, avec centre sur la base. En appelant « latitude »





de I′ situé sur le côté i_1 de l'octant, l'un des angles $I_2PI' = b'$ ou $I_3PI' = c'$ et latitude de M′ sur c_1 l'un des angles $\sigma_2 C_1 M'$ ou $\sigma_3 C_1 M'$, on voit que, sur la carte, les latitudes sont doublées.

On le voit, pour M′ par exemple, comme suit:

$$\sigma' = \sigma_2 \cos^2 b' + \sigma_3 \sin^2 b' = \frac{1 + \cos 2\,b'}{2}\sigma_2 + \frac{1 - \cos 2\,b'}{2}\sigma_3 =$$

$$= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \cos 2\,b' \,.$$

La *déformation des faces quadrangulaires* I_1PI_2, I_2PI_3, I_3PI_1 peut être réalisée en les ouvrant à la façon d'un éventail pour les transformer en demi-cercles pendant qu'une dilatation leur donne les rayons convenables. Toutes les colatitudes a, b, c sont doublées et les ponctuelles portées par les quarts de cercle restent semblables à elles-mêmes (rapport 2 : 1).

La figure 1 montre comment, par rabattement des méridiens I_1I, I_2I, I_3I de mesures a, b, c, on réalise la détermination donnée par Mohr pour ces trois angles directeurs. Signalons en passant une propriété de pure géométrie utilisée par Mohr, mais non explicitée: « Etant tracés trois demi-cercles deux à deux tangents en leurs extrémités et d'un même côté du diamètre commun, les extrémités d'un arc concentrique à l'un des cercles intérieurs sont alignées sur le contact des deux autres cercles; les extrémités d'un arc concentrique au cercle extérieur, jointes à celles des demi-cercles intérieurs, donnent des antiparallèles par rapport à la base ».

§ 2. *Indicatrices des sections de même fatigue normale ou tangentielle.*

Cherchons quel est le cône constitué, en P, par les normales:

a) aux sections de même fatigue normale σ_0,

b) aux sections de même fatigue totale absolue T_0,

c) aux sections de même fatigue tangentielle τ_0.

* * *

a) Les index cherchés I satisfont à

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2 = \sigma_0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{array} \right.$$

donc aussi à

$$(\sigma_1 - \sigma_0)\,\alpha^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)\,\beta^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)\,\gamma^2 = 0 \qquad (8)$$

où α, β, γ sont des coordonnées indépendantes.

Ce cône *elliptique* enferme I_3 si $\sigma_0 < \sigma_2$ ou I_1 lorsque $\sigma_0 < \sigma_2$; pour $\sigma_0 = \sigma_2$, il dégénère en deux plans par PI_2. Le cône supplémentaire enveloppé par les sections de même σ_0, lui aussi elliptique, a pour équation

$$\frac{\alpha^2}{\sigma_1 - \sigma_0} + \frac{\beta^2}{\sigma_2 - \sigma_0} + \frac{\gamma^2}{\sigma_3 - \sigma_0} = 0 .$$

* * *

b) Les index cherchés satisfont à

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1^2\,\alpha^2 + \sigma_2^2\,\beta^2 + \sigma_3^2\,\gamma^2 = T_0^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{array}\right.$$

donc aussi à

$$(\sigma_1^2 - T_0^2)\,\alpha^2 + (\sigma_2^2 - T_0^2)\,\beta^2 + (\sigma_3^2 - T_0^2)\,\gamma^2 = 0 . \qquad (9)$$

Ce cône elliptique enferme I_3 si $T_0 < |\,\sigma_2\,|$ ou I_1 lorsque $T_0 > |\,\sigma_2\,|$; pour $T_0 = |\,\sigma_2\,|$, il dégénère en deux plans par PI_2. Le cône supplémentaire enveloppé par les sections de même fatigue absolue, lui aussi elliptique, a pour équation

$$\frac{\alpha^2}{\sigma_1^2 - T_0^2} + \frac{\beta^2}{\sigma_2^2 - T_0^2} + \frac{\gamma^2}{\sigma_3^2 - T_0^2} = 0 .$$

* * *

c) Les index cherchés satisfont à

$$\left|\begin{array}{r} \sigma_1^2\,\alpha^2 + \sigma_2^2\,\beta^2 + \sigma_3\,\gamma^2 - (\sigma_1\,\alpha^2 + \sigma_2\,\beta^2 + \sigma_3\,\gamma^2)^2 = \tau_0^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \; ; \end{array}\right.$$

ils sont sur une *courbe d'ordre 8*. On s'en forme une représentation par la carte de Mohr. Pour τ_0 petit, trois courbes enferment respectivement I_1, I_2 et I_3. Lorsque $\tau_0 = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} < \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$,

les deux premières se coupent sur le milieu de i_1. τ_0 augmentant, ces deux courbes n'en forment plus qu'une. Pour $\tau_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, cette courbe unique vient couper au milieu de i_3 la branche fermée autour de I_1. Il n'y a plus ensuite qu'une courbe enfermant le milieu de i_2 et qui s'y évanouit pour $\tau_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. (Il faut naturellement compléter, sur la sphère, par symétrie relativement aux plans principaux).

* * *

§ 3. *Représentation d'un domaine fondamental sur un secteur de cercle.*

Lorsque l'une seulement des fatigues principales est nulle, le triangle de Mohr ne dégénère pas. Par contre, *l'ellipsoïde des tensions de Lamé*, lieu des $\vec{T}$, s'écrase sur une ellipse (équilibre élastique plan). Celle-ci devient un cercle quand les deux autres fatigues principales coïncident en valeur absolue. Lorsque ces dernières sont opposées, nous obtenons une correspondance entre deux cartes de l'octant: l'une est celle de Mohr, l'autre celle de Lamé: simple projection de l'octant sur l'une des faces du trièdre cartésien. Or, ces conditions $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_1$ sont satisfaites en tout point d'un *cylindre circulaire droit subissant une pure torsion.*

Imaginons le cylindre vertical et P sur un rayon en bout. Les sections horizontale et axiale sont à pur cisaillement τ_0, normal à notre rayon. La section frontale est à fatigue nulle. Les sections par le rayon, à 45° sur l'horizon, sont à pure compression $\sigma_1 = \tau_0$ et à pure traction $\sigma_3 = -\tau_0$. Supposons $\tau_0 = 1$. La carte de Mohr est centrée en $\sigma_2 \equiv O$; ses cercles c_1 et c_3 sont égaux. On a

$$T_x = \alpha\,, \qquad T_y = 0\,, \qquad T_z = -\gamma\,.$$

Le vecteur $\vec{T} = \overrightarrow{PM}$ est frontal. On passe de I à $\overline{M}$ en le projetant en $\overline{I}$ sur le plan I_1PI_3 et prenant le symétrique de $\overline{I}$ par rapport à PI_1. On crée ainsi une correspondance ponctuelle parfaite entre $\overline{M}$ du quart de cercle-unité et M du triangle isocèle-unité de Mohr (frontière comprise). Or, $\overline{OM} = |\vec{T}| = \overline{P\overline{M}}$.

Les cercles parallèles au côté principal c_2 se transforment en cercles de même rayon. Les rayons du quadrant se transforment en cercles par σ_2, tangents à c_1 et c_3. Enfin, la latitude $\overline{I_1M''} = a''$ se retrouve, doublée, en $\widehat{\sigma_1 M''} = 2a''$. On a ainsi tous les éléments pour passer de $\vec{T} = \overrightarrow{PM}$ à M fournissant σ, τ et les angles a, b, c.

Signalons une curieuse relation avec le *domaine* (G), système complet de points inéquivalents par rapport aux substitutions entières unimodulaires $\dfrac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \vartheta'}$ où $\omega = \sigma + i\tau$ avec $\tau > 0$ $\alpha'\vartheta' - \beta'\gamma' = 1$, coefficients entiers.

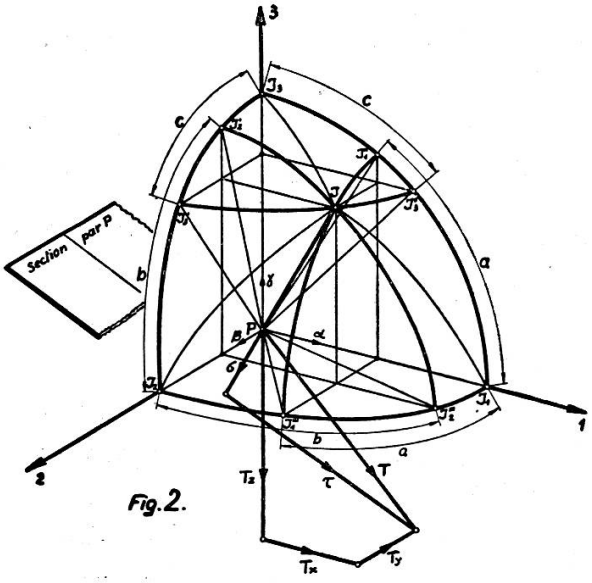


Fig. 2.

(G) est la *bande verticale* extérieure au cercle-unité et comprise entre les verticales $\sigma = \pm \dfrac{1}{2}$ (avec frontière de gauche).

Posons $(z) = (\sigma) + i(\tau)$ attaché à (M) et faisons $(\omega) = -\dfrac{1}{\omega}$. On transforme ainsi (G) en G par double symétrie, l'une par rapport au cercle-unité, l'autre par rapport à l'axe des τ. Or, G est le *tiers central de Mohr* répondant au *tiers central du quadrant.* Les cercles parallèles à la frontière circulaire se correspondent avec des rayons inverses; les verticales de (G) répondent aux rayons du secteur; les latitudes comptées à partir des points milieux sont dans le rapport 2: 1. Cette représentation de (G) sur le secteur G n'est évidemment pas

conforme; elle ne peut donc s'exprimer par une fonction analytique d'une variable complexe.

Notons, en terminant, que le *moment d'inertie vectoriel d'une masse par rapport au vecteur-unité* $\overrightarrow{PI}$ est aussi une fonction vectorielle linéaire de $\overrightarrow{PI}$ à laquelle s'applique notre exposé. (Cf.: A. Föppl, *Technische Mechanik*, Band 5, erster Abschnitt vierte Auflage, Teubner, 1922.)

L.-W. Collet et Ed. Paréjas. — *Contribution à l'étude du Tertiaire du Salève.* N° 2. *La région comprise entre les Esserts et les Usses* [1].

C. *Carrière des Esserts.* — A la base de l'exploitation, on peut voir la surface ravinée de l'Urgonien qui représente un véritable lapié fossile. Sur cet Urgonien, repose directement la molasse. C'est un grès micacé, grossier, vert brunâtre à vert clair, renfermant des débris de végétaux et quelques galets roulés d'Urgonien; l'un d'eux est long de 0 m 15. On s'étonne de ne plus voir trace des conglomérats et des grès roux de Mornex, épais de plus de 20 m, qui affleurent à 750 m au NE.

D. *Ravin de la Joie.* — Nous avons encore examiné les formations tertiaires antémolassiques dans le ravin de la Joie, au-dessus de La Muraz. Là, l'Urgonien rubéfié supporte:

1. Conglomérat à galets urgoniens prédominants et à ciment gréseux, ferrugineux. Des niveaux gréseux s'y intercalent. Ce conglomérat est déjà signalé par Joukowsky et Favre.
2. Sables meubles.
3. Molasse.

E. *Clarnant.* — Dans la tranchée d'une route conduisant de Clarnant au Sappey, sur l'Urgonien rubéfié et profondément raviné, repose un conglomérat dont les éléments sont surtout urgoniens et le ciment marno-gréseux bleuté. Nous avons noté un bloc de 0 m 30 de longueur. Ce dépôt n'a que 1 m 60 environ d'épaisseur. Il supporte une molasse micacée à traces de végétaux, à filonnets de lignite et galets de marne.

[1] Voir notre note n° 1, C. R. Soc. Phys. Hist. nat. Genève, 51, n° 2, 1934.