Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 18 (1936)

Artikel: Extension du théorème de Hadamard-Schmidt au cas du potentiel logarithmique crée par un corps réel dans un domaine complexe

Autor: Beer, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743106

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

F. Beer. — *Extension du théorème de Hadamard-Schmidt au cas du potentiel logarithmique créé par un corps réel dans un domaine complexe.*

La décomposition de r effectuée par M. Wavre permet d'associer à tout point complexe M deux points P et P′ du plan réel en lesquels la distance r à M s'annule et autour desquels Lr est multiforme. Il est donc intéressant d'étudier le potentiel créé par un corps réel, non seulement lorsque c'est le point potentié M qui pénètre dans le corps, mais aussi lorsque c'est un des points P et P′ associés à M, ce dernier se mouvant alors dans un domaine complexe. On a dans ce cas à envisager des fonctions de passage analogues à celles que l'on utilise dans le plan réel.

Soit un domaine D du plan réel limité par une circonférence γ centrée en P et par une courbe fermée simple c extérieure à γ et ne contenant pas P′. Si p est une fonction réelle, holomorphe dans D, et r la distance de M à un point d'intégration et si nous prenons soin de rendre D simplement connexe en établissant une coupure d entre γ et c, nous pouvons appliquer la troisième identité de Green car celle-ci reste valable lorsque les fonctions qu'elle contient dépendent de paramètres complexes, pourvu que ces fonctions soient continues et uniformes ainsi que leurs dérivées premières et secondes dans D et sur sa frontière. Nous écrirons donc

$$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{L}r\,\Delta p\,d\mathrm{D} + \int \left(\mathrm{L}r\frac{dp}{dn} - p\frac{d\mathrm{L}r}{dn}\right) ds = 0\ ,$$

la seconde intégrale étant à prendre sur γ, d (détermination 0), c et d (détermination π). Les dérivées normales que contiennent les deux intégrales étendues à d étant de signes contraires, on obtient en additionnant celles-ci:

$$-\,i\pi \int_{d} \frac{dp}{dn}\,ds\ ,$$

la dérivée normale étant prise à gauche lorsqu'on suit la coupure de P vers P'. La décomposition de Lr en une somme de deux logarithmes dont l'un est holomorphe à l'intérieur de γ permet de remplacer l'intégrale prise sur γ par deux autres intégrales dont l'une est nulle et dont l'autre se réduit à $-\pi p$ lorsque le rayon de γ tend vers 0. Nous avons alors

$$\int_{D} \mathrm{L}r\,\Delta p\,d\mathrm{D} + \int_{c} \left(\mathrm{L}r\frac{dp}{dn} - p\frac{d\mathrm{L}r}{dn}\right) ds = \pi p + i\pi \int_{d} \frac{dp}{dn} ds\ .$$

Si P et P' sont tous deux extérieurs à c, le premier membre s'annule; le second membre est donc la fonction de passage qui intervient lorsque P traverse c.

Supposons maintenant, comme l'a fait M. Schmidt, que p est la solution d'équations de Cauchy-Kowalewska contenant des fonctions holomorphes sur une portion régulière Γ d'une courbe analytique et dans son voisinage, que c est composée précisément de Γ et d'une courbe c' et que la solution p est valable dans D. Alors:

$$\mathrm{U} = -\frac{1}{2\pi}\int_{c'} \left(\mathrm{L}r\frac{dp}{dn} - p\frac{d\mathrm{L}r}{dn}\right) ds + \begin{cases} 0 & (\mathrm{P}\text{ et }\mathrm{P}'\text{ ext.}) \\ \dfrac{p}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{d} \frac{dp}{dn} ds & (\mathrm{P}\text{ int., }\mathrm{P}'\text{ ext.}) \end{cases}$$

où U est un potentiel de surface, de simple ou de double couche, suivant les équations de Cauchy-Kowalewska que l'on a choisies.

Dans le cas d'une simple ou d'une double couche étendues sur une courbe analytique et régulière l, le laplacien de p est nul et nous pouvons considérer p comme la partie réelle d'une fonction analytique $p + iq$. En utilisant les relations de Cauchy-Riemann, nous trouvons alors pour la fonction de passage les expressions

$$\frac{1}{2}\left[p(\mathrm{P}) + iq(\mathrm{P}) - iq(\mathrm{P}_0)\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left[p(\mathrm{P}') - iq(\mathrm{P}') + iq(\mathrm{P}_0)\right]$$

suivant que c'est P ou P' qui traverse la ligne l en P_0. Ces deux expressions, égales chacune à la différence de potentiels holo-

morphes, sont bien holomorphes en les coordonnées de M ainsi qu'on le vérifie en effectuant certaines substitutions.

Dans le cas d'un potentiel de simple couche, ces deux fonctions de passage s'annulent en P_0, d'où la continuité du potentiel, continuité que l'on peut démontrer directement en généralisant un théorème classique. Comme elles dépendent, en outre, du point où l'on traverse l, le potentiel de simple couche n'est déterminé qu'à une constante imaginaire près, égale à $i\pi m$, où m est la masse d'un arc pris sur l.

Si l laisse le plan connexe, le potentiel calculé en un point complexe M est le prolongement analytique du potentiel réel car on peut toujours aller de M en un point réel sans rencontrer de singularité du potentiel, P pouvant être ramené en P′ sans traverser l. Mais en faisant le tour des extrémités de l avec P ou P′, on engendre des polydromies analogues à celles qui furent étudiées par M. Wavre dans le plan réel. On a alors à envisager quatre plans de ramification complexes dont les points sont à distance nulle d'une des extrémités de l et qui se réduisent à celles-ci dans le réel.

Si l est une courbe fermée simple divisant le plan réel en deux régions, on a quatre domaines complexes à distinguer, dépendant de la position de P et de P′ par rapport à la courbe. On ne peut aller d'un de ces domaines dans l'autre sans passer à distance nulle de l, mais on peut facilement calculer le potentiel complexe en ajoutant à un des deux potentiels habituels prolongé la fonction de passage appropriée. Cette dernière s'obtient aisément, comme on l'a vu, à partir de p qui n'est autre que la fonction de passage utilisée dans le plan réel. On retrouve ainsi, par exemple, les deux nouveaux potentiels de la circonférence, que M. Wavre a calculés directement.

Dans le cas d'une double couche de densité *un* étendue sur une courbe fermée, les deux fonctions de passage sont égales, de sorte que l'on ne peut déterminer qu'un seul potentiel nouveau, π, qui se calcule dans deux domaines complexes à 4 dimensions se raccordant dans le plan réel suivant la courbe potentiante elle-même, et qui peut être prolongé en tout point réel ou complexe.