Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 19 (1937)

Artikel: Des polygones potentiellement équivalents
Autor: Bilger, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741832

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Séance du 4 mars 1937.

G. Bilger. — *Des polygones potentiellement équivalents.*

Ce problème se rattache à la question suivante: « Existe-t-il des corps susceptibles d'engendrer le même potentiel au voisinage d'un point et par conséquent dans toute région libre de matière d'un seul tenant avec ce point ? ».

Cette question a déjà donné lieu à d'intéressantes recherches. MM. Volterra, Herglotz, Poincaré, Dive ont obtenu des corps potentiellement équivalents par différentes méthodes.

MM. Hadamard et Schmidt ont établi un théorème relatif au prolongement analytique d'un potentiel newtonien, fondé lui-même sur le théorème Cauchy-Kowalewska, et qui dit: La différence en M entre le potentiel extérieur prolongé et le potentiel calculé directement est égale à une fonction, solution du problème Cauchy-Kowalewska.

M. R. Wavre, se fondant sur le théorème précédent et appelant fonction de passage la fonction solution du problème Cauchy-Kowalewska, a établi entre autres que les singularités d'un potentiel logarithmique prolongé au travers du corps qui lui donne naissance sont les sommets du périmètre et les extrémités du périmètre; la fonction de passage ou la différence de deux fonctions passage devient la fonction période. A part ces singularités qui sont des points critiques, le potentiel prolongé n'admet que les singularités des fonctions de passage ou des différences des fonctions de passage.

Pour les polygones homogènes, chargés d'une simple couche, les seules singularités sont les sommets du polygone qui sont des points critiques.

Ceci étant rappelé, nous établirons la proposition suivante: *Les côtés d'un carré chargés d'une densité homogène créent en tout point du plan extérieur au carré le même potentiel logarithmique que les diagonales chargées convenablement d'une densité constante.*

Soit U le potentiel créé par une répartition donnée: un indice

supérieur affectant U aura trait au corps générateur; un indice inférieur, à la région où le potentiel est calculé.

Désignons par C_1 le carré et C_2 les diagonales; ρ_1 et ρ_2 les densités respectives et par M_1 un point du plan extérieur à C_1; enfin par A_i ($i = 1 \ldots 4$) les sommets du carré et par O le point d'intersection des diagonales.

Nous voulons démontrer que

$$U_{M_1}^{C_1} = U_{M_1}^{C_2} . \tag{1}$$

Remarquons d'abord que la masse de C_1 doit être égale à celle de C_2 car en développant U en série, nous obtenons

$$U_{M_1} = M \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r^n}$$

où M désigne la masse du corps, r la distance de l'origine au point M et A_n des coefficients convenablement déterminés.

Ce développement est valable au voisinage du point à l'infini; donc la masse des deux corps doit être la même, ce qui entraîne

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho_2 .$$

Envisageons maintenant le nouveau corps C_0 qui est égal à C_2 moins C_1; C_0 se compose:

a) des 2 diagonales chargées d'une densité positive ρ_2;

b) des 4 côtés chargés d'une densité négative $-\rho_1 = -\rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour ce nouveau corps, les points A_i et O ne sont pas des points singuliers. Pour le démontrer, décrivons un circuit fermé autour de A_1, par exemple en partant d'un point M_1 extérieur à C_1 et en franchissant successivement un côté, la diagonale et un deuxième côté, tous issus de A_1; d'après le théorème de M. Wavre, nous avons

$$U_{M_1\,(\text{à l'arrivée})}^{C_0} = U_{M_1\,(\text{DÉPART})}^{C_0} + p_1 + p_{13} + p_4 \tag{2}$$

les normales aux différents côtés étant comptées positivement dans le sens du circuit.

p_1 et p_4 désignent les fonctions de passage relatives aux côtés; p_{13} désigne la fonction de passage relative à la diagonale.

Nous savons, d'une façon générale, que

$$p_i = 2\pi\rho_i d_i$$

d_i étant la distance de M_i au côté comptée positivement dans le sens de la normale positive.

Il est aisé de montrer que

$$p_1 + p_{13} + p_4 \equiv 0 \ ;$$

la relation (2) devient

$$U^{C_0}_{M_1\,(\text{ARRIVÉE})} = U^{C_0}_{M_1\,(\text{DÉPART})} \ ,$$

donc A_1 n'est pas un point de ramification pour la fonction $U^{C_0}_M$; il en est de même de $A_2A_3A_4$ et évidemment de O.

U^{C_0} est une fonction uniformément nulle à l'infini (à cause de l'égalité des masses), harmonique dans tout le plan (car seuls les sommets pourraient être des points singuliers et ce n'en sont pas), donc identiquement nulle (d'après le théorème de la moyenne).

$$U^{C_0} \equiv U^{C_2-C_1} \equiv U^{C_2} - U^{C_1} \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad U^{C_2} \equiv U^{C_1} \ .$$

C. Q. F. D.

Remarque : Ce résultat a été obtenu sans calculer les potentiels relatifs à C_1 et C_2 et *seulement par identification de la masse et des singularités.* C'est à notre connaissance la première fois qu'on obtient des corps potentiellement équivalents par cette méthode.

Généralisation : La proposition précédente s'étend sans difficultés à un polygone régulier homogène de n sommets (n fini) qui peut être remplacé par les n rayons du cercle circonscrit aboutissant aux n sommets.