Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 20 (1938)

Artikel: L'édifice des géométries dans l'espace euclidien (à trois dimensions)
Autor: Saussure, René de
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742935

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'ÉDIFICE DES GÉOMÉTRIES

DANS L'ESPACE EUCLIDIEN[1]

(A TROIS DIMENSIONS)

PAR

René DE SAUSSURE

Dans une série d'articles publiés de 1898 à 1921 dans les *Archives des Sciences physiques et naturelles* de Genève l'auteur a été amené à la conception, dans l'espace à trois dimensions, d'une Géométrie nouvelle: celle des positions d'un corps solide, connue aujourd'hui sous le nom de Géométrie des *feuillets* et des *feuillets cotés*. Le feuillet est un nouvel élément géométrique de pure position, dépendant de six paramètres, et pouvant par conséquent servir à définir la position d'un *corps solide* quelconque, auquel on le suppose invariablement relié.

Euclide et les anciens géomètres ne connaissaient que la *Géométrie ponctuelle*, c'est-à-dire que pour eux l'élément primitif de toute géométrie était toujours le *point* et toutes les figures et formes spatiales étaient réductibles à des systèmes de points. Plus tard les géomètres remarquèrent que les systèmes de plans jouissent de propriétés analogues à celles des systèmes de points, ainsi par exemple les *lignes* et les *surfaces* peuvent être engen-

[1] Cette communication, présentée à la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève le 17 mars dernier, n'apporte pas de résultats nouveaux. L'auteur, qui achevait à cette date sa 70me année ainsi que ses 35 ans comme membre de la Société de Physique, a voulu seulement établir à cette occasion une sorte de bilan de ses principaux travaux de géométrie.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ

drées aussi bien par le déplacement d'un plan que par le déplacement d'un point. Ainsi se créa la géométrie des systèmes de plans, ou *Géométrie tangentielle.* On essaya ensuite de prendre comme élément spatial primitif, non plus le point ni le plan, mais la *droite:* Plücker, en Allemagne, et Chasles, en France, étudièrent les systèmes de droites et leurs travaux donnèrent naissance à ce qu'on appelle aujourd'hui la *Géométrie réglée.* Enfin R. S. Ball, en Grande-Bretagne, élabora une « Théorie des Vis » *(Theory of Screws)* qui se trouve être équivalente à une *Géométrie des droites cotées*, car une « vis » de Ball n'est pas autre chose qu'un axe D muni d'un pas de vis *d*, c'est-à-dire, en fin de compte, une droite D munie d'un coefficient numérique, ou *cote*, *d*.

* * *

Le nouvel élément spatial. — Ayant ainsi passé en revue les différentes Géométries connues jusqu'alors, l'auteur se demanda s'il y aurait encore possibilité de trouver de nouveaux éléments spatiaux, capables de donner naissance à de nouvelles Géométries dans l'espace à trois dimensions. Les éléments utilisés jusqu'alors (point, droite et plan) étant tous des éléments de pure position, c'est-à-dire ne contenant aucun paramètre de grandeur, il ne fallait pas songer à choisir comme nouvel élément une figure impliquant une grandeur métrique, comme par exemple le cercle avec son rayon. La seule possibilité restante consistait donc à combiner les trois éléments déjà connus (le point, la droite et le plan) et à les réunir en une seule figure; c'est ainsi que naquit le *feuillet* (MDP) formé par un point M, portant une droite D, qui porte à son tour un plan P.

Restait à créer la Géométrie des feuillets, ce qui n'était pas une entreprise facile. Afin de procéder par étapes, l'auteur étudia d'abord les déplacements d'un feuillet (MDP) dans le plan P, puis autour du point M, supposés fixes; il put ainsi mettre sur pied la Géométrie des feuillets dans les espaces à deux dimensions (plan et sphérique) et faire ressortir le caractère linéaire de cette Géométrie (à trois paramètres). Dans ces espaces les formes linéaires de feuillets, à un et à deux paramètres, sont la *couronne* et le *couronoïde*, dont les propriétés

remarquables ont été exposées dans le volume 36 des « Mémoires de la Société de Physique » (1910). Dans ce mémoire se trouvent aussi les premiers essais de l'auteur pour mettre sur pied la Géométrie des feuillets dans l'espace à trois dimensions. Il y fait ressortir les analogies très curieuses qui existent entre cette Géométrie et la Géométrie réglée de Plücker. Ces analogies apparaissent avec une entière évidence par l'emploi des coordonnées au moyen desquelles M. Raoul Bricard a défini la position dans l'espace d'un trièdre d'axes rectangulaires [1].

* * *

Quelque temps après la publication de ce mémoire, l'auteur reçut de M. E. Study une lettre dans laquelle celui-ci l'informait de ses travaux sur la *Géométrie des « Somas »* qui lui paraissait être très semblable à celle des Feuillets. Toutefois ces deux formes d'une même Géométrie ne font pas double emploi: au contraire, elles se complètent l'une l'autre, la Géométrie des Feuillets par sa forme purement synthétique et celle des Somas par sa forme purement analytique; c'est ainsi, par exemple, que la pentasérie linéaire de feuillets se trouve représentée par la formule synthétique très simple: $\mathbf{H} \operatorname{tang} \frac{\Omega}{2} = \text{const.}$, tandis que sa représentation analytique est une équation linéaire entre les huit coordonnées homogènes employées par M. Bricard.

Du reste, l'auteur de cet article ne tarda pas à faire un nouveau pas en avant en remplaçant le feuillet par le *feuillet-coté*, dont l'individualité dépend, non plus de six, mais de sept paramètres. Ce fut le point de départ d'une nouvelle *Géométrie:* celle *des Feuillets-cotés*, dont l'auteur cette fois-ci peut revendiquer la paternité exclusive. Cette dernière Géométrie apparaît comme la plus générale de toutes de par le nombre des paramètres dont elle dépend, et aussi la plus complète de par son caractère linéaire.

[1] Voir l'article de M. Bricard sur « La Géométrie des Feuillets de M. René de Saussure », paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4me série, t. X, 1910.

Le regretté professeur Cailler, dans les dernières années de sa vie, s'est occupé des feuillets-cotés et en a fait le premier la théorie analytique, en utilisant le symbolisme des quaternions [1]. Dans son Préambule, Cailler donne un aperçu général des différentes Géométries dont nous avons parlé, la Géométrie des feuillets y comprise, puis il ajoute:

« On ne devait pas tarder à faire un pas de plus: M. de Saussure, en étudiant les polyséries linéaires de corps solides, a été frappé du caractère quadratique de leur Géométrie et a tenté de la remplacer par une autre Géométrie, de nature linéaire. Il y parvient en considérant un corps ordinaire comme un cas particulier du corps, ou du feuillet, *coté*. Coter le corps, c'est le munir d'un coefficient numérique, *la cote*, laquelle devient nulle pour un corps simple non coté... M. de Saussure conçoit le solide coté comme une généralisation du *torseur* (dyname ou vis de R. S. Ball) de la Statique et de la Cinématique. On peut en effet se représenter le torseur comme une *droite cotée*... C'est même dans cet avantage méthodologique que réside en grande partie le singulier intérêt de la Géométrie des Corps cotés... ».

* * *

Pour terminer, Cailler fait un tableau saisissant de l'ensemble des Géométries relatives à l'espace à trois dimensions. Il compare cet ensemble à un édifice à cinq étages dont l'étage supérieur est formé par la Géométrie des feuillets-cotés.

« Cette Géométrie », dit-il, « apparaît sous l'aspect d'un système *maximal* (à sept paramètres), tel qu'en descendant du complexe au simple, on rencontre successivement toutes les autres Géométries: d'abord celle des corps simples (ou feuillets, à six paramètres), puis celle des torseurs (ou droites cotées, à cinq paramètres), puis la Géométrie réglée (ou des droites simples, à quatre paramètres), enfin au niveau inférieur, la

[1] Voir les « Notes sur la théorie analytique des corps solides (ou feuillets) cotés », par C. Cailler, dans les *Archives des Sciences physiques et naturelles de Genève*, 4me période, t. 40 et 41, 1915 et 1916.

Géométrie ordinaire, tangentielle et ponctuelle (à trois paramètres). Tous les étages de l'édifice présentent des caractères communs, des traits de frappante analogie, qui sont autant de signes décelant un plan unique de construction. Non seulement les mémoires et les divers travaux que j'ai cités plus haut offrent un point de vue général autour duquel les anciennes théories de la Géométrie viennent s'ordonner, ils présentent encore un vif intérêt par l'immense variété de notions et de problèmes nouveaux qui s'y rencontrent ».

Et Cailler conclut, plutôt mélancoliquement: « Toutefois, malgré la valeur des résultats déjà acquis, malgré l'ancienneté de quelques-uns d'entre eux et le renom des auteurs auquels ils sont dûs, il ne me semble pas que ces travaux aient reçu jusqu'ici du public scientifique l'accueil auquel ils devaient pouvoir prétendre ».

* * *

Conclusion. — Les vérités géométriques sont inébranlables et ne dépendent pas des modes passagères du public scientifique. La superstructure de l'édifice des Géométries dans l'espace à trois dimensions est maintenant parachevée. Il ne reste plus qu'à procéder à l'aménagement des deux étages supérieurs, ce qui prendra encore bien du temps et du travail à cause du nombre et de la richesse des formes linéaires qui s'y trouvent. C'est aussi l'opinion de Cailler qui conclut: « Les nombreux problèmes dont M. de Saussure a, chemin faisant, donné les énoncés exigeront, pour être résolus, des efforts sérieux de la part des géomètres; toutes les questions relatives aux trajectoires des points, des droites ou des plans dans les diverses formes linéaires (polycouronnes) sont notamment une vraie mine de recherches d'un captivant intérêt ».

Un des premiers problèmes à résoudre, par exemple, serait de déterminer quel est *le système linéaire des lignes de courant d'un fluide en état de mouvement dans l'espace.* Ce système correspond dans le plan aux lignes de courant d'un couronoïde. Dans l'espace il faudra remplacer le couronoïde par la tricouronne, puisque celle-ci possède un feuillet (et un seul) en

chaque point, comme le couronoïde dans l'espace plan. On en conclut que le système linéaire cherché est formé par les lignes de courant d'une tricouronne. Reste à déterminer la forme de ces lignes.

Classification des Géométries de l'espace a trois dimensions.

Géométrie (linéaire) des feuillets-cotés, à 7 paramètres. Formes linéaires: *mono-*, *bi-*, *tri-*, *tétra-*, *penta-* et *hexa-couronne*, définies par $\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\,\frac{\Omega}{2} = f + f'$ (réciprocité entre 2 feuillets-cotés).
Géométrie (quadratique) des feuillets, à 6 paramètres. Formes: *mono-*, *bi-*, *tri-*, *tétra-* et *pentasérie linéaire*, définies par: $\mathrm{H}\ \mathrm{tang}\,\frac{\Omega}{2} = f$ (const.) (réciprocité entre 2 feuillets).
Géométrie (linéaire) des droites-cotées, à 5 paramètres. Formes linéaires: *mono-*, *bi-*, *tri-* et *tétrafaisceau*, définies par: $h\ \mathrm{tang}\ \omega = d + d'$ (réciprocité entre 2 droites-cotées).
Géométrie (quadratique) des droites, à 4 paramètres. Formes: *hyperboloïde*, *congruence* et *complexe linéaires*, définies par: $h\ \mathrm{tang}\ \omega = d$ (const.) (réciprocité entre 2 droites).
Géométrie (linéaire) des points et des plans, à 3 paramètres. Formes linéaires: a) *droite* et *plan* (ponctuels), b) *faisceau* et *gerbe* (de plans), définies par $d = 0$ (réciprocité entre un point et un plan, de distance d).

Remarque. — Dans l'espace à trois dimensions toutes les Géométries linéaires sont d'ordre impair (3, 5 ou 7 paramètres) et toutes les Géométries quadratiques, d'ordre pair (4 ou 6 paramètres).