Remarques sur le réseau réciproque et les surface de dispersion

Autor(en): **Weigle, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **20 (1938)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-742939

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REMARQUES
SUR LE RÉSEAU RÉCIPROQUE
ET
LES SURFACES DE DISPERSION

PAR

Jean WEIGLE

(Avec 18 fig.)

I. — Introduction.

La propagation des ondes (électromagnétiques, électroniques, mécaniques) dans les milieux périodiques (principalement les cristaux) forme le sujet d'un chapitre important de la physique.

On sait que lorsqu'une onde plane, de rayons X par exemple, tombe sur un cristal, elle est diffractée par ce milieu périodique. Le champ d'ondes diffractées est en quelque sorte une image du cristal et c'est ainsi qu'en étudiant la direction et l'intensité des ondes diffractées, on peut reconstruire le cristal. C'est là une méthode puissante d'investigation, qui permet, par des mesures macroscopiques sur des ondes planes, de donner une représentation précise des molécules et de leur structure interne. Cette méthode n'est du reste pas limitée aux rayons X et aux cristaux, chaque onde et chaque milieu périodique peuvent être étudiés de cette manière. La méthode inverse, qui consiste à étudier la structure de l'onde incidente en la faisant passer dans un milieu périodique connu, pour produire la diffraction qu'on observera, est aussi très employée en spectroscopie. Les

réseaux optiques étant en effet des milieux à structure périodique connue.

Il est important, par conséquent, d'avoir une théorie rigoureuse de la propagation des ondes dans les milieux périodiques si l'on veut pouvoir déduire, de l'observation des ondes diffractées, la structure du milieu qui leur a donné naissance ou inversément. On possède aujourd'hui différentes théories de ces phénomènes, car les conditions des problèmes à résoudre font intervenir différentes approximations. Ainsi, lorsque la lumière se propage dans des milieux stratifiés, dont la période de stratification est beaucoup plus grande que la longueur d'onde de la lumière, la théorie (lumière-ultrasons) est bien différente de celle de la propagation des rayons X dans les cristaux, pour laquelle les ondes et la périodicité du milieu sont du même ordre de grandeur. Malgré cette diversité, on peut obtenir des renseignements précieux sur tous ces phénomènes grâce à une représentation géométrique simple: celle du réseau réciproque [1].

La notion de réseau réciproque a été introduite dans cette partie de la physique par Ewald et Laue. Nous désirons, dans cet article, en donner une analyse du point de vue des séries de Fourier, comme cela a déjà été fait par Ewald et Patterson [2], puis généraliser la notion de réseau réciproque par ce que nous appellerons le réseau de couplage. Pour montrer clairement l'utilité de cette description, nous serons obligés d'étudier la réfraction des ondes et leur diffraction. Ainsi nous introduirons les surfaces de dispersion d'Ewald qui, associées au réseau réciproque, nous donneront une description graphique, complète du point de vue géométrique, de la propagation des champs d'ondes dans les milieux homogènes ou périodiques.

Nous pourrons alors comprendre comment la notion d'angle de Bragg varie des rayons X à l'optique des réseaux gravés, comment cet angle dépend de l'indice de réfraction moyen du milieu, comment la largeur du domaine de réflexion totale par

[1] Voir, au sujet de l'histoire du réseau réciproque, un article d'Ewald dans *Zeit. f. Krist.*, *93*, 396, 1936.

[2] Voir, pour la littérature, l'article d'Ewald dans le *Handb. der Phys.*, vol. 23/2, 1933.

diffraction est fonction de l'angle d'incidence et de l'amplitude de fluctuation des propriétés périodiques, comment aussi des milieux sinusoïdaux donnent lieu, par action détournée, à des ordres nombreux de diffraction. Nous verrons aussi d'autres problèmes, sans en donner la solution, pour montrer comment ils se simplifient à la lumière de ces représentations graphiques.

Avant d'introduire le réseau réciproque des milieux périodiques, nous étudierons rapidement la propagation des ondes dans les milieux homogènes. Cela nous permettra d'introduire certaines notions dont nous ferons un usage constant par la suite.

II. — Milieux homogènes isotropes et surfaces de dispersion.

1. *Equation d'onde, vecteur d'onde.*

L'équation de propagation des ondes scalaires [1] dans un milieu caractérisé par la quantité $\varepsilon(xyz)$ est

$$\Delta u - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{1}$$

Dans cette expression, u est l'amplitude de l'onde et c est la vitesse avec laquelle elle se propagerait dans un milieu pour lequel $\varepsilon = 1$. Le paramètre $\varepsilon(xyz)$ qui, pour les milieux homogènes, est constant, représentera, suivant les cas, la constante diélectrique pour les ondes électromagnétiques, le potentiel pour les ondes électroniques, etc.

Cherchons maintenant quelles ondes planes de fréquence donnée ν satisfont à l'équation (1). Ecrivons donc l'onde plane sous la forme

$$u = u_0 e^{2\pi i((\vec{\mathfrak{k}} \cdot \vec{\mathfrak{r}}) - \nu t)} \tag{2}$$

dans laquelle $\vec{\mathfrak{r}}$ est un vecteur tracé à partir d'une origine O arbitrairement choisie (fig. 1) et $\vec{\mathfrak{k}}$ est un vecteur constant qu'on appelle le *vecteur d'onde*. L'expression (2) est bien une onde

[1] La théorie s'applique, du reste, facilement aux ondes vectorielles.

plane puisque, à un temps donné t, tous les points de l'espace pour lesquels le produit intérieur des deux vecteurs $(\vec{\mathfrak{f}}.\vec{\mathfrak{r}})$ est constant ont la même phase et que $(\vec{\mathfrak{f}}.\vec{\mathfrak{r}}) = \text{const}^{\text{te}}$ est l'équation d'un plan. On voit d'autre part que le vecteur d'onde $\vec{\mathfrak{f}}$ est perpendiculaire au plan d'onde. En plus, on voit aussi que, si l'on appelle λ la longueur d'onde,

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{\lambda}.$$

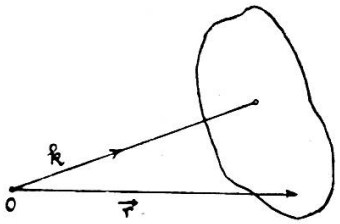


Fig. 1.

Onde plane.
$\mathfrak{f}$ est le vecteur d'onde.

Le vecteur d'onde (d'une onde plane) définit donc la direction de propagation de l'onde et sa longueur d'onde (ou sa vitesse si la fréquence est connue). On pourra donc représenter géométriquement une onde plane par son vecteur d'onde, mais cette représentation devra se faire dans l'espace « réciproque », puisque $\mathfrak{f}$ a, comme dimension, l'inverse d'une longueur. Cette représentation ne donne évidemment pas l'amplitude de l'onde.

On trouve, par substitution de (2) dans (1), que, pour satisfaire l'équation des ondes, il faut avoir:

$$\mathfrak{f}^2 = \varepsilon \frac{\nu^2}{c^2} \tag{3}$$

et que, comme on devait s'y attendre puisque le milieu est homogène, la grandeur de $\mathfrak{f}$ ne dépend pas de sa direction. Pour représenter toutes les ondes planes de fréquence ν pouvant se propager dans le milieu homogène, on tracera autour d'une origine quelconque une sphère de rayon k donné par (3); on dira alors que toutes les ondes planes de fréquence ν dont les vecteurs d'onde prennent naissance sur cette sphère pour se terminer au point O, sont des ondes possibles du milieu. Cette surface sphérique, tracée donc dans l'espace réciproque, est une représentation de la solution de l'équation (1). Nous l'appellerons la surface de dispersion; c'est l'analogue des surfaces de Fresnel de l'optique cristalline. On pourrait dire aussi que la surface de dispersion donne le « spectre en direction » des ondes planes de fréquence ν.

On aurait obtenu une représentation tout aussi simple dans l'espace vrai si l'on avait tracé dans celui-ci une sphère de rayon $\lambda = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}\,\nu}$. Mais nous verrons plus loin qu'il n'en est plus de même dans les milieux périodiques et qu'alors c'est seulement dans l'espace réciproque que les représentations géométriques sont simples. Du reste, dans tous les problèmes où la direction des ondes intervient, comme dans celui de la réfraction que nous allons traiter, c'est l'espace des vecteurs d'onde qu'il convient de considérer.

2. *Conditions aux limites.*

Lorsque les ondes passent d'un milieu ε_1 dans un second milieu caractérisé par le paramètre ε_2, elles doivent satisfaire à certaines conditions de continuité sur la surface de séparation des deux milieux. Ces conditions sont toujours de la forme

$$\sum_n A_1^n \, e^{2\pi i (\mathfrak{f}_{1x}^n x + \mathfrak{f}_{2y}^n y - \nu_1^n t)} = A_2 \, e^{2\pi i (\mathfrak{f}_{2x} x + \mathfrak{f}_{2y} y - \nu_2 t)} \qquad (4)$$

où l'on a écrit que, sur la surface de séparation ($z = 0$), certaines des propriétés des ondes (incidentes et réfléchies) du milieu 1 caractérisé par leurs fréquences ν_1^n et les vecteurs d'onde $\mathfrak{f}_1^n$, doivent être identiquement égales à celle de l'onde (réfractée) du milieu 2. On sait, du reste, par ce que nous venons de voir, que les ondes de fréquence ν_1^n du premier milieu doivent avoir des vecteurs d'ondes $\vec{\mathfrak{f}}_1^n$ de grandeur

$$\mathfrak{f}_1^n = \sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{\nu_1^n}{c} \qquad (5)$$

puisque seules ces ondes sont des solutions de l'équation (1); leurs orientations, dénotées par l'indice n, peuvent être différentes (onde incidente et onde réfléchie, par exemple). Pour le second milieu, dans lequel on désire connaître l'onde produite par la réfraction des premières, le vecteur $\mathfrak{f}_2$ doit avoir la grandeur

$$\mathfrak{f}_2 = \sqrt{\varepsilon_2}\,\frac{\nu_2}{c} \qquad (6)$$

tandis que la fréquence ν_2 est, pour l'instant, indéterminée.

Mais on voit que si (4) doit être identiquement satisfaite pour toutes les valeurs de x, y et t, il est nécessaire que toutes les exponentielles aient le même exposant. Il faut donc écrire

$$\left\{\begin{array}{ll} \nu_1^n = \nu_2 = \nu & \\ \mathfrak{k}_{1x}^n = \mathfrak{k}_{2x} & (n \text{ quelconque}) \\ \mathfrak{k}_{1y}^n = \mathfrak{k}_{2y} & \end{array}\right. \quad (7)$$

Ces conditions aux limites tout à fait générales nous montrent que la fréquence ne change pas d'un milieu à l'autre. En plus, les composantes dans la surface de séparation des vecteurs de chacune des ondes, soit du milieu 1, soit du milieu 2, doivent être égales entre elles. Seules les composantes $\mathfrak{k}_z$ normales à la surface de séparation peuvent être différentes, mais elles sont, elles aussi, déterminées par (7), (5) et (6). Autrement dit, les conditions aux limites (4) déterminent complètement la direction des ondes si l'on tient compte des surfaces de dispersion. Il n'est pas nécessaire de connaître plus précisément le type des conditions aux limites pour que la géométrie de la réfraction et de la réflexion soit déterminée. Par contre, pour calculer les intensités des différentes ondes, il faut spécifier exactement les conditions (4). On voit donc bien, sur cet exemple, comment on peut scinder les problèmes concernant la propagation des ondes en deux types de problèmes: *a*) le problème géométrique s'occupant de la direction des ondes, et *b*) le problème énergétique s'occupant de leurs intensités. Nous retrouverons, pour les milieux périodiques, cette même division naturelle, et nous verrons que, là aussi, les surfaces de dispersion suffisent à déterminer complètement les directions des différentes ondes.

3. *Réfraction et réflexion.*

On peut donner une construction géométrique très simple, dans l'espace réciproque, permettant de satisfaire les deux dernières équations (7). Si, en effet, l'on trace, à partir d'une

origine O quelconque (fig. 2), les deux surfaces de dispersion, on a deux sphères de rayon[1] $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}\sqrt{\varepsilon_1}$ et $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}\sqrt{\varepsilon_2}$, où

$$\mathfrak{k} = \frac{\nu}{c} \cdot$$

Si, maintenant, on donne la direction $\overrightarrow{AO}$ de l'onde (incidente) dans le milieu 1, les directions des ondes possibles associées à

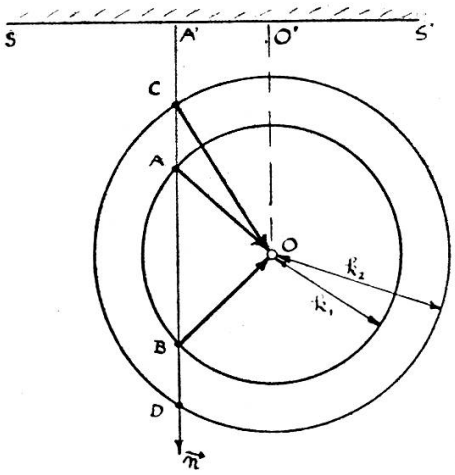


Fig. 2.

Réflexion et réfraction.

SS′ direction de la surface de séparation des milieux 1 et 2.
$\vec{n}$ normale à cette surface.
$\overrightarrow{AO}$ onde incidente, $\overrightarrow{BO}$ réfléchie, $\overrightarrow{CO}$ réfractée.

celle-ci, seront données par la construction suivante: par A on mène la normale $\vec{n}$ à la surface de séparation SS′ des deux milieux. Celle-ci coupe les surfaces de dispersion en B, C et D. Et les ondes possibles ont alors les vecteurs d'onde $\overrightarrow{BO}$ (onde réfléchie se propageant dans le milieu 1), $\overrightarrow{CO}$ (onde réfractée du milieu 2), et $\overrightarrow{DO}$. En effet, cette construction assure que les composantes selon la surface de séparation de tous les vecteurs d'onde sont égales (à A′O′), comme le veut (7) et que, d'autre part, ils ont les bonnes grandeurs selon (5) et (6). L'onde $\overrightarrow{DO}$

[1] On pourrait appeler $\sqrt{\varepsilon}$ l'indice de réfraction du milieu, et $\mathfrak{k}$ la grandeur du vecteur d'onde dans le vide en supposant $\varepsilon = 1$ pour ce milieu.

n'existe pas d'une façon générale; elle n'interviendrait que dans le cas où le milieu 2 aurait la forme d'une plaque parallèle, car alors la réflexion de $\overrightarrow{CO}$ sur la face inférieure donnerait précisément l'onde [1] $\overrightarrow{DO}$.

4. *Réflexion totale.*

Quand l'onde incidente passe du milieu pour lequel le paramètre ε est le plus grand dans le milieu pour lequel ε est plus petit, on peut avoir réflexion totale (fig. 3). En effet, si l'onde incidente est $\overrightarrow{A'O}$, on a comme onde réfractée $\overrightarrow{C'O}$, mais

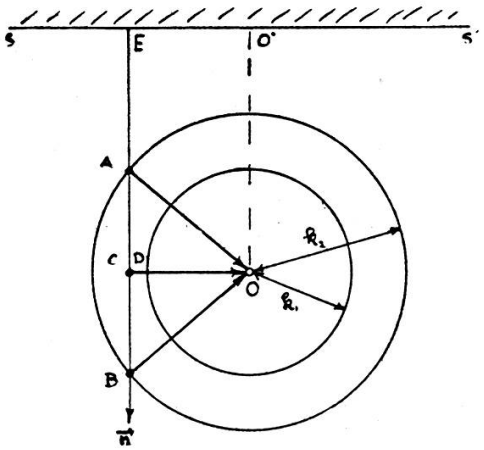


Fig. 3.

Réflection totale.

L'onde de vecteur $\overrightarrow{AO}$ passe du milieu 2 au milieu 1 avec

$$f_2 > f_1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1 .$$

L'onde réfléchie totalement est $\overrightarrow{BO}$ tandis qu'à l'intersection complexe (schématisée par C, D) de $\vec{n}$ avec la sphère f_1, on a en $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{DO}$ des ondes évanescentes.

si l'angle d'incidence augmente jusqu'à donner une onde $\overrightarrow{AO}$, la normale à SS' ne coupe plus la sphère f_1 en des points réels. Il y a, par contre, une intersection complexe, que nous avons schématisée dans la figure 3 par les points C et D. Comme nous

[1] Ces questions ont été étudiées par Ewald et Schmid (*Z. f. Krist.*, *94*, 150, 1936), sans cependant que ces auteurs parviennent à donner

avons spécifié que les composantes tangentielles des vecteurs d'onde doivent être égales, on voit que, seules, les composantes selon la normale n des vecteurs de ces ondes peuvent être imaginaires. En posant, pour la valeur de la composante tangentielle de toutes les ondes,

$$\mathrm{EO}' = \mathfrak{k}_{2x} = a > \mathfrak{k}_1$$

on trouve, pour les composantes du vecteur de l'onde réfractée les valeurs

$$\mathfrak{k}_{1x} = \mathfrak{k}_{2x} = a \ , \qquad \mathfrak{k}_{1y} = 0 \ , \qquad \mathfrak{k}_{1z} = \pm\, i\sqrt{a^2 - \mathfrak{k}_1^2} \ .$$

On voit que l'intersection complexe donne un double point (C, D), mais, comme précédemment, une seule des ondes existe (voir l'onde DO de la figure 2). C'est la valeur positive de k_{1z} que l'on prendra. L'onde réfractée a alors la forme

$$e^{-2\pi\sqrt{a^2-\mathfrak{k}_1^2}\,z}\, e^{2\pi i(ax-\nu t)} \ .$$

C'est une onde inhomogène, à laquelle on donne souvent le nom d'onde évanescente. Elle se propage dans le milieu 1 dans la direction X, c'est-à-dire parallèlement à la surface de séparation des deux milieux, avec une vitesse $\frac{\nu}{a}$. Cette vitesse est plus petite que celle des ondes ordinaires dans le même milieu. L'amplitude de cette onde diminue dans une direction perpen-

une règle précise permettant de supprimer cette onde supplémentaire. La difficulté provient de ce qu'on considère le milieu (2) comme semi-infini; dans ce cas, l'onde DO n'existe pas car, si elle existait, les conditions de Fresnel ne seraient plus suffisantes pour déterminer les amplitudes des ondes. Si le milieu 2 est fini et a la forme d'une plaque à faces parallèles, l'onde DO existe et provient de la réflexion de CO sur la face inférieure et le problème énergétique est complètement déterminé. Mais, sur la face inférieure, les mêmes difficultés se présentent par rapport au troisième milieu limitant le second. En plus, si le milieu a une forme prismatique, la face inférieure n'étant pas parallèle à la première, l'onde CO ne se réfléchira pas suivant DO. Il semble qu'il faudrait alors tenir compte du fait que le second milieu est limité en largeur aussi bien qu'en profondeur. Ces problèmes n'ont pas reçu jusqu'ici de solution complètement satisfaisante.

diculaire à la surface de séparation et son coefficient d'absorption est proportionnel à $\sqrt{a^2 - \mathfrak{f}_1^2}$, donc d'autant plus grand que a est plus différent de $\mathfrak{f}_1$. Ces ondes évanescentes ont pu être étudiées expérimentalement, d'une façon remarquable, dans le domaine des ondes ultra-courtes de radio.

III. — Milieux périodiques.

Les problèmes classiques que nous avons traités jusqu'ici devaient servir à montrer comment les méthodes que nous emploierons pour l'étude des milieux périodiques donnent une image géométrique simple de la propagation des ondes. Ces méthodes n'étaient pas nécessaires pour l'étude de la réfraction ou de la réflexion totale. Pour l'étude des milieux périodiques, dans lesquels la diffraction vient augmenter considérablement le nombre des ondes, elles jouent un rôle essentiel.

1. *Description du milieu.*

Nous supposerons un milieu fait de cellules semblables, juxtaposées les unes aux autres, et nous appellerons ce milieu un réseau cristallin. La cellule élémentaire ou la maille sera définie par trois vecteurs d'axe, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, non coplanaires, le parallélipipède construit sur ces trois vecteurs constituant la maille. La distribution de la matière remplissant cette cellule est donnée par le paramètre $\varepsilon(\vec{\rho})$, avec

$$\vec{\rho} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$$

les coordonnées α_1, α_2, α_3, prenant toutes les valeurs entre 0 et 1. Comme le milieu est périodique, on a

$$\varepsilon(\vec{\rho} + \vec{\mathfrak{r}}_l) = \varepsilon(\vec{\rho}) \qquad \text{avec} \qquad \vec{\mathfrak{r}}_l = l_1 \vec{a}_1 + l_2 \vec{a}_2 + l_3 \vec{a}_3 \quad (l \text{ entiers}) . \tag{8}$$

On peut donc représenter la fonction $\varepsilon(\vec{\mathfrak{r}})$ par une série de Fourier, que nous écrirons

$$\varepsilon(\vec{\mathfrak{r}}) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \varepsilon_{n_1 n_2 n_3} e^{2\pi i (\vec{b}_{n_1 n_2 n_3} \cdot \vec{\mathfrak{r}})} \tag{9}$$

avec

$$\vec{b}_{n_1 n_2 n_3} = n_1 \vec{b}_1 + n_2 \vec{b}_2 + n_3 \vec{b}_3 \qquad (n \text{ entiers})$$

les $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ étant définis par les relations

$$(\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i) = 1 \qquad (\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j) = 0 \qquad (i \neq j) \ . \qquad (10)$$

On peut voir facilement que (9) est bien périodique, comme le veut (8). En effet, en remplaçant $\vec{\mathfrak{r}}$ par

$$\vec{\mathfrak{r}} + \vec{\mathfrak{r}}_l = \vec{\mathfrak{r}} + l_1 \vec{a}_1 + l_2 \vec{a}_2 + l_3 \vec{a}_3 \ . \qquad (l \text{ entiers})$$

on trouve des exponentielles de la forme

$$e^{2\pi i (\vec{b}_n \cdot \vec{\mathfrak{r}} + n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3)}$$

en vertu des définitions (10). Comme les n et les l sont entiers l'exponentielle prend la forme

$$e^{2\pi i (\vec{b}_n \cdot \vec{\mathfrak{r}} + \text{entier})} = e^{2\pi i (\vec{b}_n \cdot \vec{\mathfrak{r}})} \ .$$

On a donc bien

$$\varepsilon(\vec{\mathfrak{r}} + \vec{\mathfrak{r}}_l) = \varepsilon(\vec{\mathfrak{r}}) \ .$$

Les vecteurs $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ ainsi définis sont les vecteurs d'axe réciproques des vecteurs d'axe $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Avec les définitions (10) on peut toujours passer du système $\vec{a}$ au système $\vec{b}$ et, par conséquent, les vecteurs d'axe réciproques définissent la géométrie du réseau tout aussi bien que les vecteurs $\vec{a}$. On voit aussi que les vecteurs $\vec{b}$ se mesurent par l'inverse d'une longueur; c'est donc dans l'espace réciproque qu'il faudra les dessiner.

L'expression en série de Fourier (9) peut être considérée comme une triple somme d'ondes planes figées dans l'espace, les exponentielles ne contenant pas le temps. Les vecteurs

$$\vec{b}_n = n_1 \vec{b}_1 + n_2 \vec{b}_2 + n_3 \vec{b}_3 \qquad (n \text{ entiers}) \qquad (11)$$

sont alors les vecteurs d'onde de ces ondes matérielles planes,

dont les amplitudes sont les ε_n. Ils donnent, par leur direction, la normale aux plans matériels, qu'on appelle les plans réticulaires, et l'inverse de leur grandeur $d_n = \frac{1}{b_n}$ mesure la longueur d'onde ou, si l'on préfère, la distance entre deux plans réticulaires immédiatement voisins. Les nombres (n_1, n_2, n_3) sont alors ce que l'on appelle en cristallographie les *indices de Miller* du plan considéré.

On a ainsi deux façons « réciproques » de décrire le milieu périodique:

a) *par le réseau vrai ou réseau cristallin*, en donnant les vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, et la fonction matérielle $\varepsilon(\vec{\rho})$ à l'intérieur de la maille, ou

b) *par les ondes matérielles*, en donnant les vecteurs d'onde des ondes matérielles et la suite infinie $\varepsilon_{n_1 n_2 n_3}$ de leurs amplitudes. Tous les vecteurs d'onde sont définis par (11) à partir de $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, qu'il suffit de connaître.

Les problèmes qui nous intéressent concernent la propagation d'ondes (non matérielles, en général, et progressives) dans les milieux périodiques. C'est l'interaction d'un réseau matériel avec ces ondes qu'il nous faudra étudier. Il est donc naturel de penser que c'est la description du réseau réciproque qui sera la plus utile pour cette étude, description qui fera intervenir l'interaction de deux systèmes d'ondes, les unes figées, les autres progressives. On pourra donc s'attendre à trouver dans la théorie des termes contenant le produit des deux types d'ondes

$$e^{2\pi i((\vec{\mathfrak{k}}\cdot\vec{\mathfrak{r}})-\nu t)} \cdot e^{2\pi i(\vec{b}_n\cdot\vec{\mathfrak{r}})} = e^{2\pi i[((\vec{b}_n+\vec{\mathfrak{k}})\cdot\vec{\mathfrak{r}})-\nu t]}$$

ce qu'on interprétera en disant qu'il y a de nouvelles ondes progressives (diffractées) dont les vecteurs d'onde nouveaux sont donnés par

$$\vec{\mathfrak{k}} + \vec{b}_n$$

On voit là de nouveau l'utilité de la description « réciproque » puisque ce sont les vecteurs d'ondes qui s'ajoutent (vectoriellement) et non pas les longueurs d'ondes.

2. *Réseau réciproque géométrique.*

Dans le réseau vrai formé de la juxtaposition des mailles $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, les points de l'espace déterminés par les vecteurs

$$\vec{a}_l = l_1\vec{a}_1 + l_2\vec{a}_2 + l_3\vec{a}_3 \qquad (l \text{ entiers})$$

n'ont aucune signification physique; ils divisent simplement l'espace en cellules ou mailles semblables. Nous appellerons ce réseau le *réseau cristallin.*

Les vecteurs réciproques $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, définis par (10), peuvent aussi servir à former un réseau de points dans l'espace réciproque, chacun des points étant donné par

$$\vec{b}_n = n_1\vec{b}_1 + n_2\vec{b}_2 + n_3\vec{b}_3 \qquad (n \text{ entiers}) \qquad (11)$$

Ce *réseau réciproque* peut sembler artificiel car, en effet, les relations (10) ne définissent que les trois vecteurs fondamentaux $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, ou, si l'on préfère, une maille élémentaire construite sur ces trois vecteurs dans l'espace réciproque. Le réseau réciproque (11) est, lui, formé de la juxtaposition infinie de ces cellules. On voit cependant que, dans la série de Fourier (9), qui décrit complètement le milieu matériel, les vecteurs $\vec{b}_n$ interviennent naturellement. Ils sont associés, il est vrai, chacun à un coefficient de Fourier ε_n; c'est-à-dire que si l'un des coefficients ε_n était nul, le $\vec{b}_n$ correspondant n'apparaîtrait pas dans la série de Fourier. Nous verrons toutefois qu'il est utile d'introduire la division de l'espace réciproque donnée par (11). Nous appellerons ce réseau le *réseau réciproque géométrique* ou simplement le réseau réciproque. Il est donc indépendant de la distribution de la matière dans l'espace, étant entièrement défini par les vecteurs de base $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, suivant (10) du réseau cristallin. Le réseau réciproque géométrique n'est qu'une charpente divisant l'espace réciproque; chacun des points est équivalent, il n'y a pas d'origine définie, chacun de ces points pouvant servir à cet effet.

3. *Réseau de couplage.*

Si l'on veut obtenir une représentation complète du milieu périodique, c'est-à-dire une image du réseau cristallin et de la distribution de matière dans celui-ci, il faut « charger » le réseau réciproque géométrique en attribuant à chacun de ses points $\vec{b}_n$ un poids ε_n. On choisira arbitrairement un point quelconque de ce réseau comme origine (coordonnées 0, 0, 0) auquel on donnera le poids ε_{000}. A tous les autres points dont les coordonnées (n_1, n_2, n_3) sont alors déterminées, on donnera les poids $\varepsilon_{n_1 n_2 n_3}$. Ainsi, on aura une représentation complète de la fonction $\varepsilon(\vec{r})$ (9) qui donnait la distribution de matière dans l'espace. Remarquons une fois encore que, dans le réseau cristallin, la matière était distribuée de façon continue et qu'il suffisait de connaître cette distribution dans une maille élémentaire $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, pour qu'elle soit donnée dans tout l'espace. Dans le réseau réciproque chargé, par contre, il est nécessaire de connaître les poids de tous les points du réseau (qui s'étend jusqu'à l'infini) pour que la distribution de matière soit connue à son tour. Nous verrons plus loin que les coefficients ε_n, « les amplitudes des ondes matérielles », déterminent en partie l'intensité des ondes non matérielles diffractées; ils couplent des ondes les unes avec les autres, le coefficient ε_n liant deux ondes dont les vecteurs d'ondes diffèrent d'un vecteur $\vec{b}_n$. C'est ce phénomène qui nous a amenés [1] à nommer ce réseau réciproque chargé le réseau réciproque de couplage, ou plus simplement le *réseau de couplage.* Les deux réseaux réciproques que nous venons de définir (géométrique et de couplage) jouent évidemment un rôle important dans l'étude de la propagation des ondes. Nous avons parlé jusqu'ici de milieux périodiques dans trois dimensions, mais il est bien évident que nos définitions s'appliquent tout aussi bien aux cas plus simples dans lesquels la périodicité est à deux dimensions, ou même à une seule (milieux stratifiés).

[1] Au cours d'une conversation avec P. P. Ewald.

Avant de donner quelques exemples simples marquant bien la différence de ces deux réseaux, il est nécessaire de résoudre l'équation des ondes pour les milieux périodiques et de voir ainsi quel est le champ d'ondes (diffractées) qui prend la place de l'onde plane que nous avions trouvée dans l'étude des milieux homogènes.

4. *Champs d'ondes.*

Dans l'équation des ondes

$$\Delta u - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

il faut maintenant introduire le paramètre périodique $\varepsilon(\vec{\mathfrak{r}})$, que nous écrirons sous la forme d'une série de Fourier, comme précédemment

$$\varepsilon(\vec{\mathfrak{r}}) = \sum_n \varepsilon_n e^{2\pi i (\vec{b}_n \cdot \vec{\mathfrak{r}})} \tag{9}$$

où n représente trois indices, la somme étant évidemment triple. Cherchons alors une solution de (1) sous la forme d'une somme d'ondes planes de fréquence ν donnée

$$u = \sum_m u_m e^{2\pi i ((\vec{\mathfrak{f}}_m \cdot \vec{\mathfrak{r}}) - \nu t)} \tag{12}$$

dans laquelle l'indice m représente trois indices m_1, m_2, m_3, la somme étant triple elle aussi, car, en effet, le vecteur d'onde $\vec{\mathfrak{f}}_m$ prenant différentes directions dans l'espace, il est nécessaire de spécifier ses trois composantes pour qu'il soit déterminé. Pour trouver une solution de (1), il faudra donc choisir convenablement les u_m (l'amplitude des ondes) et les $\vec{\mathfrak{f}}_m$ (la direction dans laquelle elles se propagent et leurs longueurs d'ondes). On voit donc que le problème se sépare naturellement en deux parties, comme le problème de la réflexion: l'un, géométrique, qui est la recherche des $\vec{\mathfrak{f}}_m$, l'autre, « énergétique », concernant les u_m.

En remplaçant (9) dans (1), on trouve

$$\sum_m \mathfrak{f}_m^2 u_m e^{2\pi i((\vec{\mathfrak{f}}_m \cdot \vec{\mathfrak{r}}) - \nu t)} = \mathfrak{f}^2 \sum_n \sum_q \varepsilon_n u_q e^{2\pi i[((\vec{\mathfrak{f}}_q + \vec{b}_n) \cdot \vec{\mathfrak{r}}) - \nu t]}$$

$$\text{avec} \qquad \mathfrak{f}^2 = \frac{\nu^2}{c^2} \tag{13}$$

Pour que ces deux expressions soient identiques en $\vec{\mathfrak{r}}$ et t, il faut que les mêmes exposants des exponentielles figurent dans chaque somme. On doit donc écrire

$$\vec{\mathfrak{f}}_q + \vec{b}_n = \vec{\mathfrak{f}}_j$$

ou, comme la numérotation des ondes est entièrement arbitraire,

$$\vec{\mathfrak{f}}_m = \vec{\mathfrak{f}}_0 + \vec{b}_m \tag{14}$$

Nous discuterons en détail ces équations ci-dessous. Ayant choisi les $\overrightarrow{\mathfrak{f}_m}$ de cette façon, l'équation (13) donne, en égalant les coefficients des exponentielles,

$$\frac{\mathfrak{f}_m^2}{\mathfrak{f}^2} u_m = \sum_q \varepsilon_{m-q} u_q \tag{15}$$

Ces équations de récurrence pour les u_m constituent, avec (14), les équations fondamentales du problème. Si donc on peut trouver une suite de u_m satisfaisant à (15), avec des $\overrightarrow{\mathfrak{f}_m}$ choisis selon (14), nous aurons trouvé quelles sont les ondes de fréquence déterminée ν pouvant se propager dans le milieu périodique. On voit que, d'une façon générale, la solution du problème de la propagation d'ondes dans un milieu périodique fait intervenir, non plus une onde, mais tout un *champ d'ondes* associées les unes aux autres par les équations fondamentales (14) et (15). Il y a autant d'ondes que de points du réseau réciproque géométrique. Seul ce champ d'ondes est dynamiquement stable. Remarquons encore que toutes les ondes de ce champ sont équivalentes, en ce sens que l'onde numérotée par l'indice zéro (vecteur d'onde $\vec{\mathfrak{f}}_0$) n'a pas de propriétés spéciales, n'est pas nécessairement une onde de grande amplitude, n'est pas

non plus une onde incidente puisque, jusqu'ici, nous n'avons pas considéré comment le champ d'onde était excité. Les amplitudes relatives des différentes ondes sont déterminées complètement par les équations (15).

5. *Conditions géométriques (directions et vitesses des ondes).*

L'équation fondamentale (14) nous montre comment il faut choisir la direction et la longueur d'onde des ondes formant le champ (12) qui est la solution de notre problème: si nous savons qu'une onde de vecteur que nous appellerons $\vec{f}_0$ se propage dans le milieu matériel, les autres ondes nécessairement associées à la première auront des vecteurs d'ondes donnés par (14). La figure (4) montre comment le champ d'ondes est représenté

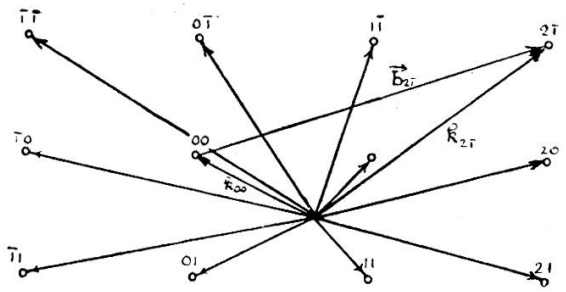


Fig. 4.

Le champ d'ondes solution de la propagation dans le milieu périodique.

Les vecteurs d'onde de toutes les ondes sont construits à partir de f_0 (supposé connu). Ayant choisi arbitrairement un point du réseau réciproque géométrique comme origine, on y a fait aboutir $\vec{f}_0$; ensuite, à partir de l'origine de $\vec{f}_0$, on trace tous les vecteurs aboutissant à tous les points du réseau.

Cette construction assure que $\vec{f}_m = \vec{f}_0 + \vec{b}_m$.

dans le réseau réciproque géométrique. On voit ainsi comment la décomposition en une somme d'ondes planes de la solution du problème de la propagation des ondes dans les milieux périodiques fait nécessairement intervenir le réseau réciproque géométrique. Certaines des ondes du champ auront peut-être

des amplitudes très petites, et ne joueront donc pas un rôle important dans la solution finale du problème. Cela dépendra des valeurs des ε_n et de l'orientation du champ d'ondes dans le réseau cristallin (orientation de $\vec{\mathfrak{f}}_0$ dans le réseau réciproque de la figure 4). Mais, d'une façon générale, pour qu'une onde du champ ait une intensité rigoureusement nulle, il faudra que des conditions très spéciales sur les ε_n et sur l'orientation soient réalisées. Si, pour une valeur n_1, n_2, n_3, de n le $\varepsilon_{n_1 n_2 n_3}$ correspondant au vecteur $\vec{b}_n = n_1 \vec{b}_1 + n_2 \vec{b}_2 + n_3 \vec{b}_3$ (ou plus simplement au point (n_1, n_2, n_3) du réseau réciproque géométrique), est nul, cela n'implique aucunement que l'amplitude de l'onde dont le vecteur $\vec{\mathfrak{f}}_n = \vec{\mathfrak{f}}_0 + \vec{b}_n$ aboutit en ce point est nulle. C'est du reste là la raison pour laquelle nous avons dû introduire le *réseau réciproque géométrique* en plus du *réseau de couplage*.

Pour connaître les directions et les vitesses des différentes ondes, il est donc nécessaire de calculer l'un des vecteurs d'onde, disons $\vec{\mathfrak{f}}_0$, car (14) donne alors tous les autres. Nous avons, du reste, dû procéder à un calcul semblable pour les milieux homogènes; on avait trouvé que l'onde plane devait avoir un vecteur d'onde de grandeur

$$\mathfrak{f}_0 = \sqrt{\varepsilon}\, \mathfrak{f}$$

indépendante de sa direction. On avait appelé $\sqrt{\varepsilon}$ l'indice de réfraction du milieu et $\mathfrak{f}$ la grandeur du vecteur d'onde dans le vide (en supposant que le vide soit caractérisé par $\varepsilon = 1$). Dans le milieu périodique, il n'y a plus d'indice de réfraction puisque ε est variable, et, par conséquent, on peut s'attendre à trouver une expression plus compliquée, dépendant principalement de la valeur moyenne de ε. Pour obtenir $\mathfrak{f}_0$, on remarquera que les équations de récurrence (15) sont homogènes et linéaires pour les u_m. Pour qu'elles aient des solutions différentes de zéro, il est nécessaire que le déterminant des coefficients s'annule. Cela donne une équation dans laquelle la seule inconnue est $\mathfrak{f}_0$ (en remplaçant les $\mathfrak{f}_m$ par leurs valeurs (14)). En général, on trouvera, pour une direction donnée de $\vec{\mathfrak{f}}_0$, plusieurs solutions annulant le déterminant. Ainsi les surfaces de dispersion, qui

sont le lieu des origines des vecteurs d'ondes dans l'espace réciproque, auront plusieurs nappes. C'est ce que nous allons montrer sur un exemple simple.

6. *Milieu stratifié sinusoïdal.*

Supposons donc que le milieu soit périodique dans une dimension seulement et que le paramètre ε soit donné par

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 \cos 2\pi b x = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 (e^{2\pi i b x} + e^{-2\pi i b x})$$

Le milieu est stratifié dans la direction x et le vecteur d'axe réciproque est $\vec{b}$ dirigé selon x. Le réseau réciproque géométrique est constitué par une suite infinie de points équidistants de b dans la direction x, tandis que le réseau de couplage est formé par les points 0, 1 et $\bar{1}$ seulement, auxquels on a attribué les poids ε_0, ε_1 et ε_1, respectivement (fig. 5).

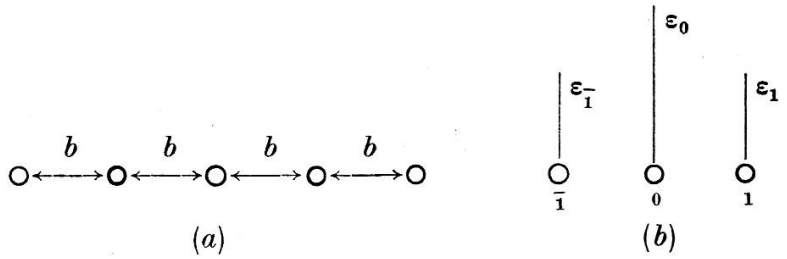


Fig. 5.

Les équations de récurrence (15) deviennent

$$\left\{\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_1 u_{-2} + \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_{-1}^2}{\mathfrak{k}^2} + \varepsilon_1 u_0 = 0 \\
\qquad\qquad \varepsilon_1 u_{-1} + \dfrac{\mathfrak{k}^2 \varepsilon_0 - \mathfrak{k}_0^2}{\mathfrak{k}^2} u_0 + \varepsilon_1 u_1 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon_1 u_0 + \dfrac{\mathfrak{k}^2 \varepsilon_0 - \mathfrak{k}_1^2}{\mathfrak{k}^2} u_1 + \varepsilon_1 u_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

et, pour qu'elles aient des solutions non nulles, il faut que le déterminant des coefficients s'annule:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_{-1}^2}{\mathfrak{f}^2} & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \varepsilon_1 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_0^2}{\mathfrak{f}^2} & \varepsilon_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_1^2}{\mathfrak{f}^2} & \varepsilon_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

Pour voir clairement à quoi correspondent les solutions de l'équation (16) nous allons prendre un cas limite dans lequel ε_0 est peu différent de l'unité, tandis que ε_1 est très petit. Ainsi les fluctuations du paramètre ε sont de très faible amplitude autour de la valeur moyenne $\varepsilon_0 \cong 1$ et le milieu est donc presque homogène. En outre nous supposerons que b et $\mathfrak{f}$ sont du même ordre de grandeur. (La grandeur b intervient dans le déterminant car les $\mathfrak{f}_m$ sont liés à $\mathfrak{f}_0$ par les relations (14).

Si on néglige les ε_1 le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_{-1}^1}{\mathfrak{f}^2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_0^2}{\mathfrak{f}^2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_1^2}{\mathfrak{f}^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\ldots \left(\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_{-1}^2\right) \left(\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_0^2\right) \left(\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_1^2\right) \ldots = 0$$

et les solutions deviennent

$$\mathfrak{f}_m = \sqrt{\varepsilon_0}\,\mathfrak{f} \qquad (m \text{ quelconque}). \qquad (17)$$

On a donc un nombre de solutions égal au nombre des points du réseau réciproque géométrique; il y en a ainsi une infinité. Elles ne sont pas données dans les expressions (17) en fonction de $\mathfrak{k}_0$ mais on peut facilement retrouver toutes les valeurs de $\mathfrak{k}_0$ correspondantes en se servant de la relation $\overrightarrow{\mathfrak{k}_m} = \vec{\mathfrak{k}}_0 + m\vec{b}$.

Remarquons en plus qu'à chaque racine (17) du déterminant correspond tout un champ d'ondes dont nous dénoterons les vecteurs au moyen d'un indice supérieur indiquant la racine à laquelle ils appartiennent. Ainsi, si on considère la racine

$$\mathfrak{k}_n = \sqrt{\varepsilon_0}\,\mathfrak{k}$$

les vecteurs du champ d'ondes de cette solution seront

$$\vec{\mathfrak{k}}^n_n = \sqrt{\varepsilon_0}\,\mathfrak{k}\vec{n} \;\ldots\; \vec{\mathfrak{k}}^n_{n+p} = \sqrt{\varepsilon_0}\,\mathfrak{k}\vec{n} + p\vec{b}$$

n étant un vecteur unité dans la direction de $\overrightarrow{\mathfrak{k}_n}$ (supposée donnée). On peut représenter cela facilement dans l'espace réciproque (fig. 6).

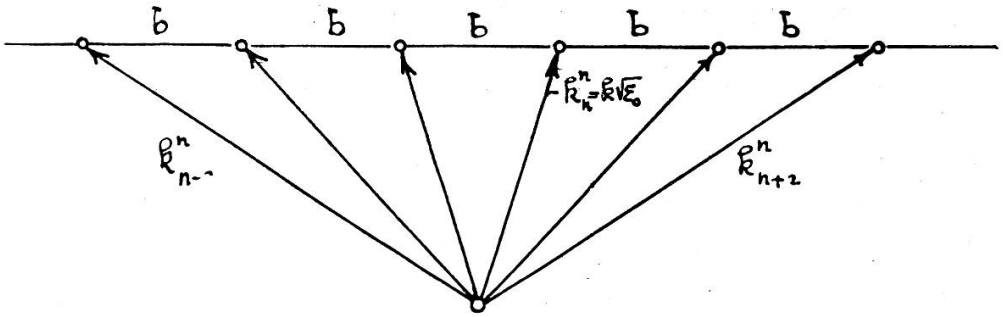


Fig. 6.

Vecteurs du champ d'ondes de la solution $\mathfrak{k}_n = \sqrt{\varepsilon_0}\,\mathfrak{k}$.

Pour avoir une représentation complète dans le réseau réciproque des solutions (17) nous choisirons comme origine un des points de celui-ci et nous tracerons les vecteurs d'ondes $\vec{\mathfrak{k}}^i_0$ (i quelconque) de façon à ce qu'ils aboutissent en ce point. Automatiquement les vecteurs d'ondes $\overrightarrow{\mathfrak{k}^i_m}$ ayant la même origine que $\vec{\mathfrak{k}}^i_0$ aboutiront au point m (pour satisfaire l'équation (14)).

Les valeurs (17) étant indépendantes de l'orientation des vecteurs $\overrightarrow{\mathfrak{f}_m}$ on voit que toutes les ondes $\overrightarrow{\mathfrak{f}_m^m}$ dont le vecteur a la grandeur $\sqrt{\varepsilon_0}\mathfrak{f}$ sont des ondes possibles et le lieu des origines des $\overrightarrow{\mathfrak{f}_m^m}$ est donc une sphère de rayon $\sqrt{\varepsilon_0}\mathfrak{f}$. Ce lieu est ce que nous avons appelé la surface de dispersion. Ainsi à chaque solution (17) correspond une sphère de rayon $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$ tracée autour de chaque point du réseau réciproque géométrique (fig. 7).

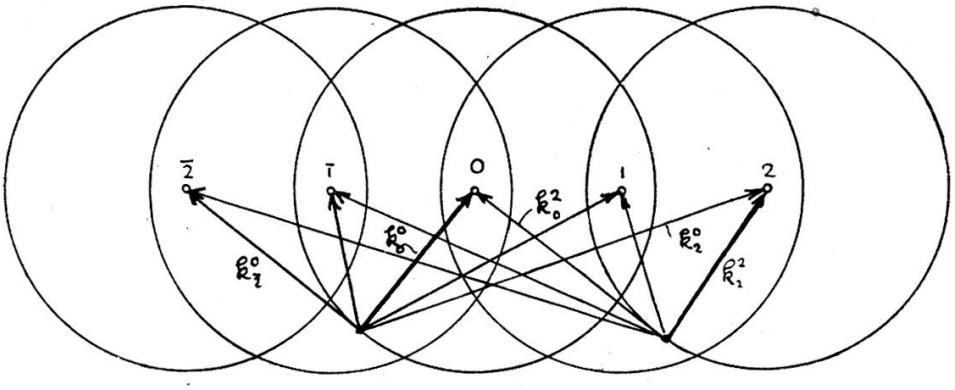


Fig. 7.

Figures de dispersion du réseau sinusoïdal ($\varepsilon_1 \longrightarrow 0$).

En réalité ces solutions doivent correspondre à celles que nous avons trouvées pour le milieu homogène puisque nos calculs ont été effectués avec la supposition que $\varepsilon_1 = 0$. En effet, si nous voulons calculer l'amplitude des différentes ondes d'un champ, par exemple le champ i, pour lequel $\mathfrak{f}_i^i = \sqrt{\varepsilon_0}\mathfrak{f}$ les équations de récurrence nous donnent (avec $\varepsilon_1 = 0$)

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_{i-1}^2}{\mathfrak{f}^2} & u_{i-1}^i = 0 \\[2ex] \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_i^{i2}}{\mathfrak{f}^2} & u_i^i = 0 \\[2ex] \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_{i+1}^i}{\mathfrak{f}^2} & u_{i+1}^i = 0 \end{array}\right.$$

Nous avons indiqué par l'indice supérieur i des amplitudes que nous ne considérions que le champ i. Toutes les valeurs

$(\varepsilon \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_m^{i\,2})$ pour $m \neq i$ étant différentes de zéro il faut que les u_m^i soient nulles. Par contre comme $(\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_i^{i\,2}) = 0$ l'amplitude u_i^i peut avoir une valeur quelconque. Le champ d'onde i se réduit donc à une seule onde, dont le vecteur a la grandeur $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon}$. Pour chaque champ cela est vrai et comme deux vecteurs d'onde parallèles et égaux en grandeur représentent la même onde, tous les champs sont équivalents. Nous retrouvons bien ainsi les résultats que nous avons décrits pour les milieux homogènes à savoir que la solution du problème était donnée par une onde plane de vecteur $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon}$.

Si on avait introduit des ε_1 très petits dans les équations de récurrence on aurait trouvé (pour le champ zéro avec $\mathfrak{f}_0 \cong \mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$ pour simplifier les notations)

$$\left\{\begin{array}{ll}
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a) & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_{\bar{1}}^2}{\mathfrak{f}^2}\,\dfrac{u_{-1}}{u_0} + \varepsilon_1\left(1 + \dfrac{u_{\bar{2}}}{u_0}\right) = 0 \\
b) & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_0^2}{\mathfrak{f}^2} + \varepsilon_1\left(\dfrac{u_1}{u_0} + \dfrac{u_{\bar{1}}}{u_0}\right) = 0 \\
c) & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_1^2}{\mathfrak{f}^2}\,\dfrac{u_1}{u_0} + \varepsilon_1\left(1 + \dfrac{u_2}{u_0}\right) = 0\,. \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

Si $\mathfrak{f}_0$ était exactement égal à $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$ il serait nécessaire que $\dfrac{u_1}{u_0}$ et $\dfrac{u_{\bar{1}}}{u_0}$ fussent nuls pour satisfaire à (b) mais alors (a) ne pourrait être satisfaite qu'avec $u_{\bar{2}}/u_0$ de l'ordre de l'unité. Mais alors puisque $\dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_{\bar{2}}^2}{\mathfrak{f}^2}$ est de l'ordre de l'unité, il faudrait que $\dfrac{u_{\bar{3}}}{u_0}$ fût de l'ordre de $^1/\varepsilon_1$, c'est-à-dire très grand et l'équation suivante montrerait que $\dfrac{u_{\bar{4}}}{u_0}$ doit être de l'ordre de $\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}$ et ainsi de suite. On aurait donc divergence [1] et les ondes m seraient d'amplitude

[1] La condition que le déterminant s'annule peut être considérée justement comme la condition de convergence du système infini d'équation de récurrence.

infinie. Un raisonnement semblable montrerait que si $\frac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_0^2}{\mathfrak{f}^2}$ est de l'ordre de ε_1 on a de nouveau divergence. Il faut donc que cette quantité soit de l'ordre de ε_1^2 et on trouve alors que les ondes u_1 et $u_{\bar{1}}$ ont une amplitude relative de l'ordre de ε_1, tandis que les ondes u_2 et $u_{\bar{2}}$ sont de l'ordre de ε_1^2, et ainsi de suite.

Ces raisonnements sont vrais pour chaque champ d'ondes, On peut donc dire que dans chaque champ si l'onde dont le vecteur a la grandeur $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$, c'est-à-dire une vitesse de propagation correspondant à l'indice de réfraction moyen, a une amplitude u_i^i, les ondes immédiatement voisines, dont les vecteurs sont $\vec{\mathfrak{f}}_i^i \pm \vec{b}$, ont des amplitudes de l'ordre de $\varepsilon_1 u_i^i$. On pourrait donc interpréter approximativement ces résultats et les équations de récurrence en disant qu'une onde $\vec{\mathfrak{f}}_0$ seule ne peut pas se propager dans le cristal. Les fluctuations de l'indice de réfraction produisent par diffraction des ondes secondaires dont les vecteurs sont $\vec{\mathfrak{f}}_0 \pm \vec{b} = \vec{\mathfrak{f}}_{\pm 1}$ couplées à la première, le coefficient de couplace étant ε_1. Mais ces ondes secondaires sont couplées elles aussi à des ondes

$$\vec{\mathfrak{f}}_1) \quad \vec{\mathfrak{f}}_0 + \vec{b} \pm \vec{b} = \begin{cases} \nearrow \vec{\mathfrak{f}}_0 \\ \searrow \vec{\mathfrak{f}}_2 \end{cases} \qquad \vec{\mathfrak{f}}_{\bar{1}}) \quad \vec{\mathfrak{f}}_0 - \vec{b} \pm \vec{b} = \begin{cases} \nearrow \vec{\mathfrak{f}}_0 \\ \searrow \vec{\mathfrak{f}}_{\bar{2}} \end{cases}$$

par le même coefficient de couplage ε_1, et ainsi de suite.

L'« énergie » de l'onde $\vec{\mathfrak{f}}_0$ passe ainsi en partie aux ondes $\vec{\mathfrak{f}}_1$ et $\vec{\mathfrak{f}}_{\bar{1}}$ celles-ci repassent de l'énergie aux ondes $\vec{\mathfrak{f}}_0$ et $\vec{\mathfrak{f}}_2$, et $\vec{\mathfrak{f}}_0$ et $\vec{\mathfrak{f}}_{\bar{2}}$, et cela continue ainsi avec des ondes d'indices plus élevés dont l'amplitude diminue du reste à cause des couplages d'ordres de plus en plus élevés qu'elles font intervenir. C'est ce jeu d'échange d'énergie entre les ondes d'un champ que décrivent les équations de récurrence et c'est en ce sens qu'on peut dire que ces équations donnent un état *dynamiquement stable* du milieu périodique parcouru par les ondes. Nous avons représenté cela schématiquement dans la figure 8 au moyen du réseau de couplage dont on comprend maintenant l'importance, et la raison pour laquelle il est différent du réseau réciproque géométrique. Ce dernier

est bien comme nous l'avions dit une sorte de charpente de l'espace réciproque qui détermine les directions des ondes associées formant un champ. Tandis que le réseau de couplage se déplace de point en point du réseau réciproque pour coupler

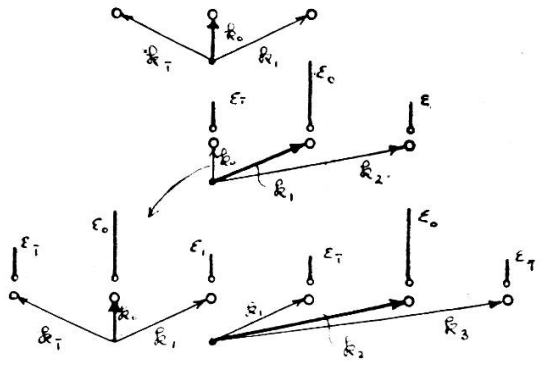


Fig. 8.
Réseau de couplage et réseau réciproque.

les ondes les unes aux autres. En généralisant ce que nous venons de démontrer pour le coefficient ε_1 on peut dire que *les coefficients* ε_n *couplent les ondes dont les vecteurs d'ondes diffèrent de* $n\vec{b} = \vec{b}_n$.

Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin. Auparavant il nous faut compléter notre représentation en décrivant un phénomène de résonance, dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici et qui peut jouer un rôle très important dans la diffraction. C'est le phénomène qui fait intervenir ce qu'on appelle l'angle de Bragg dans l'étude des cristaux pour les rayons X.

7. *Résonance et angle de Bragg.*

Il peut arriver que dans nos équations deux ondes *d'un champ* aient simultanément des vecteurs d'ondes égaux approximativement en grandeur à $\mathfrak{k}\sqrt{\varepsilon}$. Cela se produira effectivement à chaque intersection des sphères de dispersion de la figure 7. Le champ d'ondes est alors placé symétriquement par rapport au réseau réciproque (voir fig. 9). Dans ce cas deux facteurs $\frac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_m^2}{\mathfrak{k}^2}$ du déterminant (16) deviennent simultanément nuls

et la méthode d'approximation que nous avons employée n'est plus valable. Il faut alors écrire pour le déterminant

$$\Delta = \ldots \left(\frac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_2^2}{\mathfrak{k}^2}\right)\left(\frac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_1^2}{\mathfrak{k}^2}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \varepsilon_1 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_0^2}{\mathfrak{k}^2} & \varepsilon_1 & 0 & \\ 0 & \varepsilon_1 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_1^2}{\mathfrak{k}^2} & \varepsilon_1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \left(\frac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_2^2}{\mathfrak{k}^2}\right) \ldots = 0$$

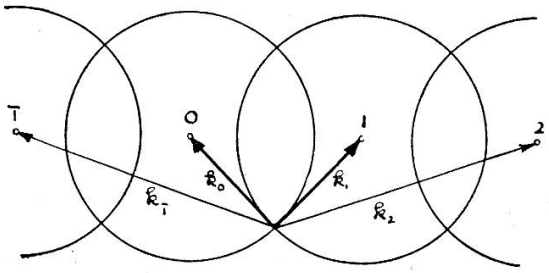


Fig. 9.

« Réflexion » de Bragg.

ou encore

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_0^2}{\mathfrak{k}^2} & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_1^2}{\mathfrak{k}^2} \end{vmatrix} = 0$$

puisque nous avons supposé que seuls $\mathfrak{k}_0$ et $\mathfrak{k}_1$ avaient des valeurs qui annulaient presque les termes

$$\frac{\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_i^2}{\mathfrak{k}^2} .$$

On trouve ainsi pour cette orientation particulière du champ d'ondes que $\mathfrak{k}_0$ et $\mathfrak{k}_1$ doivent satisfaire à l'équation

$$\left(\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_0^2\right)\left(\varepsilon_0 \mathfrak{k}^2 - \mathfrak{k}_1^2\right) - \mathfrak{k}^4 \varepsilon_1^2 = 0$$

En posant alors

$$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}\sqrt{\varepsilon_0} - \xi_0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}\sqrt{\varepsilon_0} - \xi_1$$

on trouve

$$\xi_0 \xi_1 = \frac{\varepsilon_1^2}{4\,\varepsilon_0} \mathfrak{k}^2 \tag{18}$$

car ξ_0 et ξ_1 sont petits dans la région qui nous intéresse pour laquelle $\mathfrak{k}_0$ et $\mathfrak{k}_1$ ont des valeurs proches de $\mathfrak{k}\sqrt{\varepsilon_0}$. Nous avons représenté dans la figure 10 les sortes d'hyperboles que donne

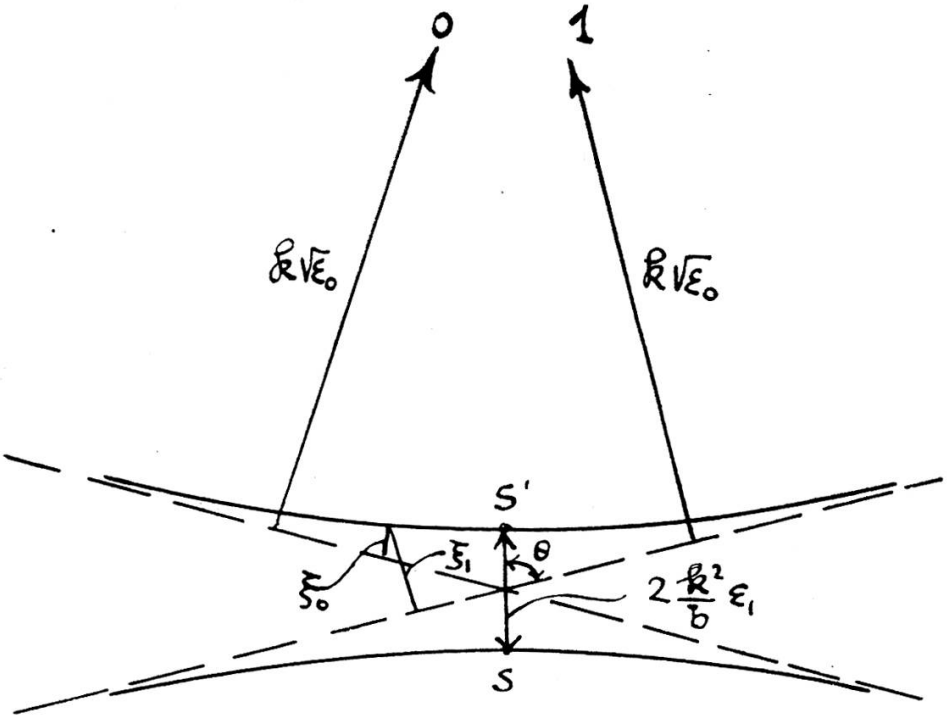


Fig. 10.

Séparation des surfaces de dispersion sous l'angle de Bragg.

Les deux sphères de rayon $\mathfrak{k}\sqrt{\varepsilon_0}$ tracées autour des points 0 et 1 du réseau réciproque ont dégénéré, vu l'échelle du dessin, en deux plans et les variables ξ_1 et ξ_2 sont alors les coordonnées perpendiculaires à ces plans.

(18) dont les sphères $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$ sont les asymptotes. L'axe des hyperboles se calcule facilement car on voit que le sommet de l'hyperbole a pour coordonnées

$$\xi_1 = \xi_0 = \frac{\varepsilon_1 \mathfrak{f}}{2\sqrt{\varepsilon_0}}$$

et donc

$$ss' = \frac{\varepsilon_1 \mathfrak{f}^2}{\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}\sin\theta} = \frac{2\mathfrak{f}^2}{b}\varepsilon_1 .$$

La séparation est donc de l'ordre de ε_1, c'est-à-dire très petite, et c'est seulement dans une région très petite autour de l'intersection des sphères que les surfaces de dispersion se séparent de celles-ci. Si, du reste, au lieu de considérer l'intersection des sphères tracées autour des points 0 et 1 du réseau réciproque, on avait pris les sphères 0 et m on aurait obtenu des résultats semblables. En effet le déterminant (16) peut alors se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_0^2}{\mathfrak{f}^2} & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & \dfrac{\varepsilon_0 \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}_m^2}{\mathfrak{f}^2} \end{vmatrix} = 0 ,$$

ce qui donne

$$\xi_0 \xi_m = \frac{\varepsilon_1^2}{4\varepsilon_0}\mathfrak{f}^2$$

comme précédemment. Mais on trouve alors que la séparation des hyperboles devient

$$\frac{2\mathfrak{f}^2}{mb}\varepsilon_1 ,$$

donc m fois plus petite que précédemment. D'une façon générale les surfaces de dispersion vont donc prendre la forme des surfaces de révolution, dont la figure 11 donne une intersection avec un plan passant par le réseau réciproque.

Mais revenons maintenant à l'amplitude des ondes. Nous savons déjà que, dans un champ, les ondes dont les vecteurs sont très différents de $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$ ont des amplitudes relatives de

l'ordre ε_1 ou ε_1^2, etc. Nous les négligerons en première approximation et les équations de récurrence deviennent simplement

$$\begin{cases} \mathfrak{f}\varepsilon_1 u_1 + 2\sqrt{\varepsilon_0}\,\xi_0 u_0 = 0 \\ 2\sqrt{\varepsilon_0}\,\xi_1 u_1 + \mathfrak{f}\varepsilon_1 u_0 = 0 \end{cases}.$$

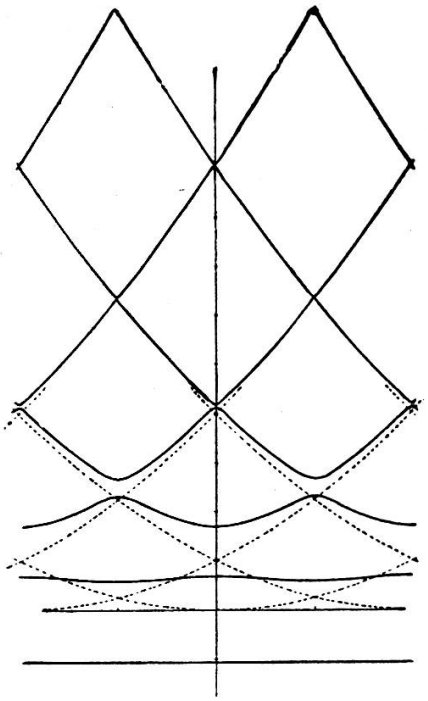


Fig. 11.

Surface de dispersion du réseau sinusoïdal.
En pointillé les sphères de rayon $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$.

On trouve alors

$$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\,\xi_0}{\mathfrak{f}\varepsilon_1} = -\frac{\mathfrak{f}\varepsilon_1}{2\sqrt{\varepsilon_0}\,\xi_1}$$

et l'on voit que pour $\xi_0 = \xi_1$ (sommet de l'hyperbole) ce rapport vaut 1 en valeur absolue. Les deux ondes u_0 et u_1 ont donc même amplitude, et cela *indépendamment de la valeur de* ε_1, qui peut être aussi petit qu'on le veut. Les autres ondes u_m du même champ ont, par contre, des amplitudes relatives à u_0 et u_1, qui sont au maximum de l'ordre de ε_1. Ce phénomène est important pour la raison suivante: Supposons que nous ayons

envoyé sur le cristal une onde incidente extérieure qui donnerait par réfraction simple (en considérant donc le milieu comme homogène) une onde intérieure dans la direction $\vec{f}_0$ correspondant au sommet de l'hyperbole. Cette onde seule, nous le savons, n'est pas une solution du problème de la propagation dans le milieu périodique. Lorsqu'une onde se propage dans le cristal, tout un champ d'ondes lui est associé. Dans le cas qui nous occupe, le champ est celui que nous venons d'étudier. Ainsi cette onde $\vec{f}_0$ est accompagnée d'une onde $\vec{f}_1$ qui a la même amplitude, même si ε_1 est extrêmement petit, c'est-à-dire même lorsque les fluctuations de l'indice de réfraction sont très faibles. Les autres ondes du champ ont une intensité négligeable; on peut dire alors que l'onde incidente s'est « réfléchie » sur le plan réticulaire d'indice 1 (voir fig. 12) et si on appelle 2θ l'angle entre $\vec{f}_0$ et $\vec{f}_1$, on a la relation (en négligeant les ξ qui sont très petits)

$$f\sqrt{\varepsilon_0}\,\sin\theta = \frac{b}{2}\,,$$

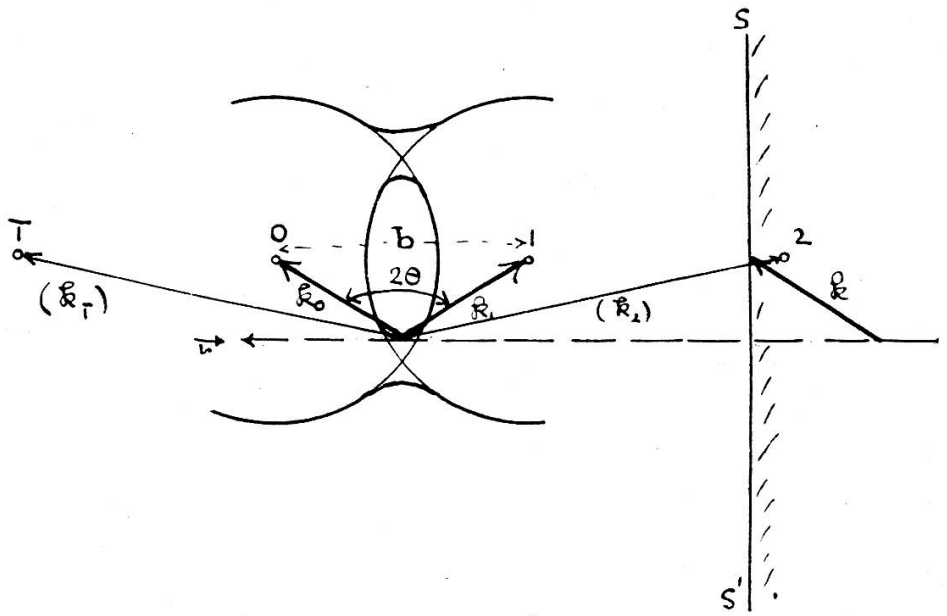


Fig. 12.

« Réflexion » de Bragg.

ou encore si ε_0 a une valeur très proche de l'unité

$$2a\,\sin\theta = \lambda\,,$$

car $\mathfrak{f}$ est l'inverse de la longueur d'onde λ et b l'inverse de la période a du milieu. Cette relation qu'on appelle *équation de Bragg* détermine l'angle θ *(angle de Bragg)* sous lequel on doit envoyer l'onde pour que ce phénomène de « réflexion » se produise.

Quoique ce phénomène soit un peu plus compliqué que nous ne l'avons dit, il reste vrai que l'amplitude de l'onde u_1 est indépendante de ε_1, c'est-à-dire du couplage. Il y a pour cet angle θ une résonance qui se produit et c'est alors le domaine de résonance, le domaine angulaire dans lequel u_1 a une grande intensité qui est déterminé par le couplage ε_1.

Pour résumer ce que nous avons vu jusqu'ici, nous pouvons dire que dans le milieu stratifié sinusoïdal seuls des champs d'ondes peuvent se propager. Si les fluctuations de l'indice de réfraction sont petites ces champs d'ondes sont constitués par une onde principale dont le vecteur d'onde a la grandeur $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$, les autres ondes ayant des amplitudes relatives à celle-ci très petites (l'ordre de grandeur des plus fortes est ε_1). Dans les cas particuliers (orientation bien définie) où les vecteurs de deux ondes d'un champ ont approximativement la même grandeur $\mathfrak{f}\sqrt{\varepsilon_0}$ ces deux ondes sont relativement fortes, les autres faibles.

8. *Conditions aux limites de la réflexion de Bragg.*

Pour montrer comment on peut utiliser les surfaces de dispersion de l'espace réciproque nous étudierons rapidement la réflexion des ondes comme nous l'avons fait pour les milieux homogènes. Nous avons tracé dans la figure 13 les figures de dispersion et la construction qui permet d'obtenir graphiquement les vecteurs des champs d'ondes.

Comme on le voit le phénomène de résonance de Bragg produisant une séparation des surfaces de dispersion a pour conséquence des intersections imaginaires et donc des ondes inhomogènes. Et ces ondes inhomogènes donnent une « réflexion » totale. Le domaine angulaire de réflexion totale diminue rapidement avec l'ordre m de réflexion puisque nous

avons vu que la séparation des hyperboles était donnée par $2\mathfrak{f}_2\varepsilon_1/mb$.

Nous avons ainsi montré rapidement sur l'exemple simple du réseau sinusoïdal comment on pouvait employer les notions

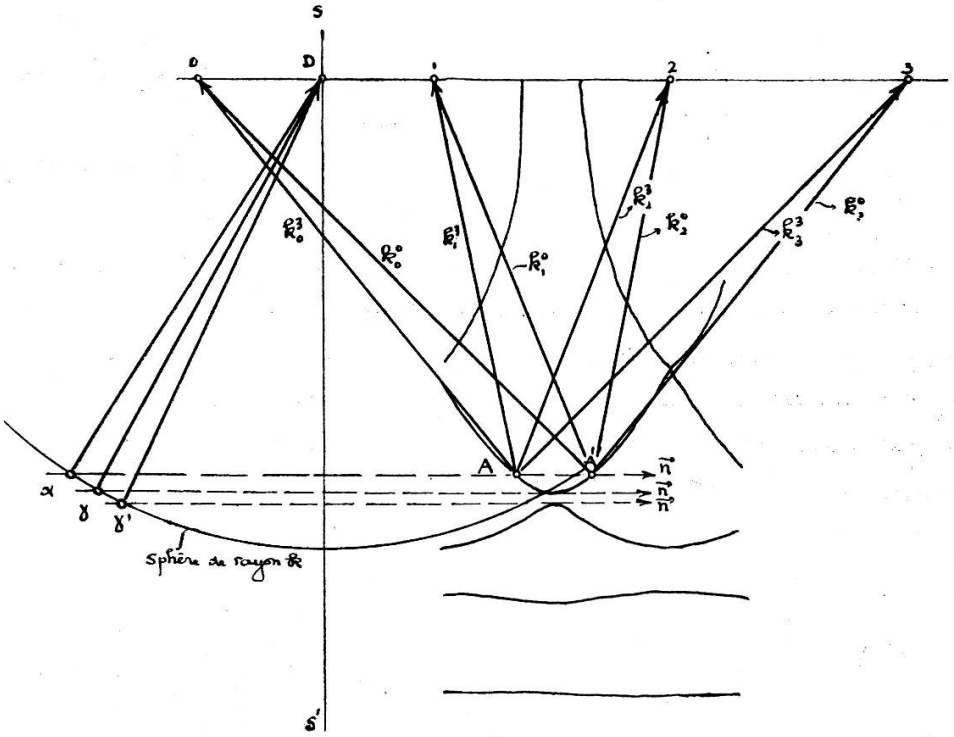


Fig. 13.

Construction graphique des champs d'ondes.
Excitation par onde incidente.
ss' est la surface du cristal supposé semi-infini.

Lorsque l'orientation de l'onde incidente (vecteur de longueur $\mathfrak{f}$) est $\overrightarrow{\alpha D}$ les intersections de la normale au cristal avec les surfaces de dispersion sont A et A'. Les champs d'ondes possibles sont donc les ondes $\overrightarrow{A_m}$ et $\overrightarrow{A'_m}$ (m représentant les points du réseau géométrique). Entre $\overrightarrow{\gamma D}$ et $\overrightarrow{\gamma' D}$ les intersections sont imaginaires et on trouve que le champ est fait d'ondes inhomogènes, dont l'amplitude diminue à mesure qu'elles pénètrent dans le cristal ou augmente lorsqu'elles en sortent comme les ondes $\overline{1}$. Toute l'énergie incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. La région $\gamma\gamma'$ est un domaine de réflexion totale.

de réseaux réciproques géométriques et de couplage. En plus nous avons pu donner quelques règles qui permettent de construire les surfaces de dispersion. Nous allons étudier maintenant quelques applications qualitatives de ces notions.

IV. — Quelques applications des réseaux réciproques et des surfaces de dispersion.

1. *Déviations de la loi de Bragg.*

Par la réfraction des ondes dans le milieu périodique il se produit des déviations de la loi de Bragg

$$2a \sin \theta_n = n\lambda$$

car l'angle θ_n entre l'onde incidente et l'onde réfléchie n'est pas celui formé par les deux ondes du champ se propageant dans le milieu. En négligeant la séparation des surfaces de dispersion (ε_1 très petit) on voit que si l'incidence a lieu sur une face du cristal parallèle à la stratification on a pour une réflexion d'ordre n

$$\mathfrak{f} \cos \theta_n = \mathfrak{f} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta'_n$$

et

$$2\mathfrak{f} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \theta'_n = nb \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{f} = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{a} \cdot$$

La figure 14 montre ce qui se passe dans l'espace réciproque. On généraliserait sans peine cette construction si l'incidence avait lieu sur une face du cristal différente de celle que nous avons choisie.

En éliminant θ'_n entre les deux équations précédentes on trouve

$$2a \sin \theta_n = n\lambda \sqrt{1 - \frac{(1 - \varepsilon_0)\, 4a^2}{n^2 \lambda^2}} \cdot \qquad (19)$$

Cette formule a souvent été employée soit pour mesurer l'indice de réfraction moyen ε_0 des cristaux pour les rayons X, soit pour calculer exactement la longueur d'onde λ à partir des observations de θ_n.

2. *Réseau optique et réseau cristallin.*

On sait que lorsqu'on fait tomber de la lumière normalement sur un réseau de transparence, elle est diffractée et l'onde qui

sort, faisant un angle θ avec l'onde incidente, a une longueur d'onde donnée par

$$a \sin \theta_n = n\lambda$$

n étant l'ordre de diffraction et a la distance entre les traits du réseau. Cette formule est différente de celle de Bragg qui donnait

$$2a \sin \theta_n = n\lambda$$

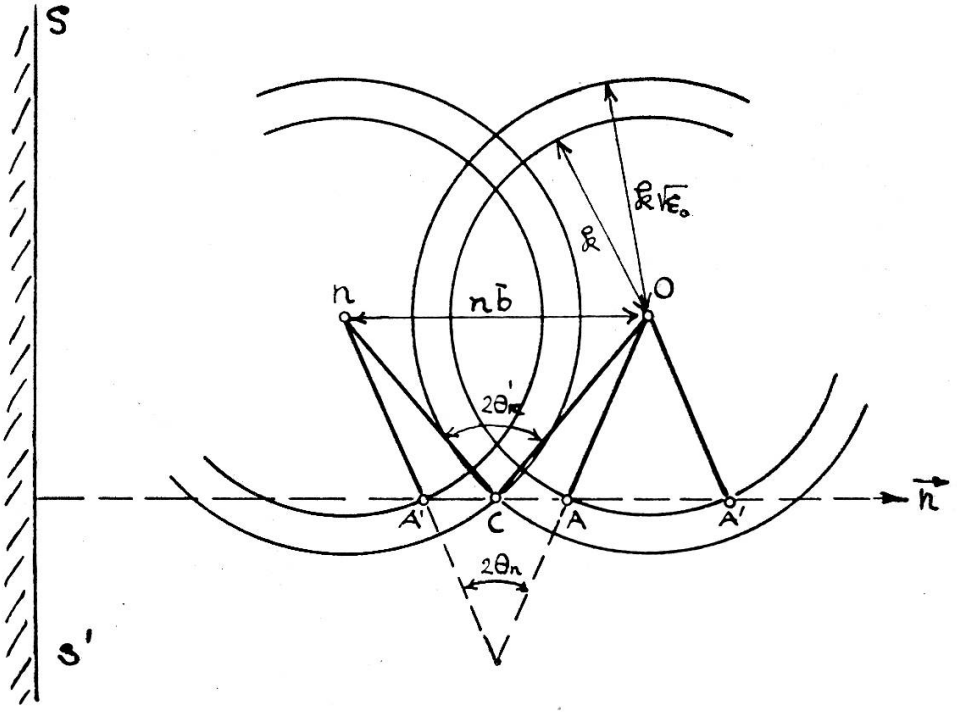


Fig. 14.

Déviation de la loi de Bragg.

Les surfaces de dispersion sont les sphères de rayon $f\sqrt{\varepsilon_0}$. La sphère f est la surface de dispersion pour le vide. L'onde incidente est $\overrightarrow{AO}$, elle donne à l'intérieur du cristal le champ $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{Cn}$ puis comme onde réfléchie $\overrightarrow{A'O}$ (ou A'_n). L'angle sous lequel on doit envoyer l'onde incidente pour avoir « réflexion » de Bragg est donc θ_n.

mais dans cette dernière, $2\theta_n$ est l'angle entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. On peut comprendre facilement pourquoi ces deux formules sont différentes. Si l'on schématise le réseau optique par un milieu stratifié en supposant que les traits forment des creux rectangulaires on voit que les coefficients

ε_1, ε_2, etc. sont alors relativement grands puisque le milieu est fait de couches caractérisées par $\varepsilon = 1$ (vide) superposées à des couches dans lesquelles ε a une valeur d'environ 1,5 (verre). Les couplages seront forts et les champs d'ondes constitués par des ondes nombreuses. L'angle de Bragg n'a plus besoin d'être réalisé pour que par simple couplage beaucoup d'ondes soient intenses.

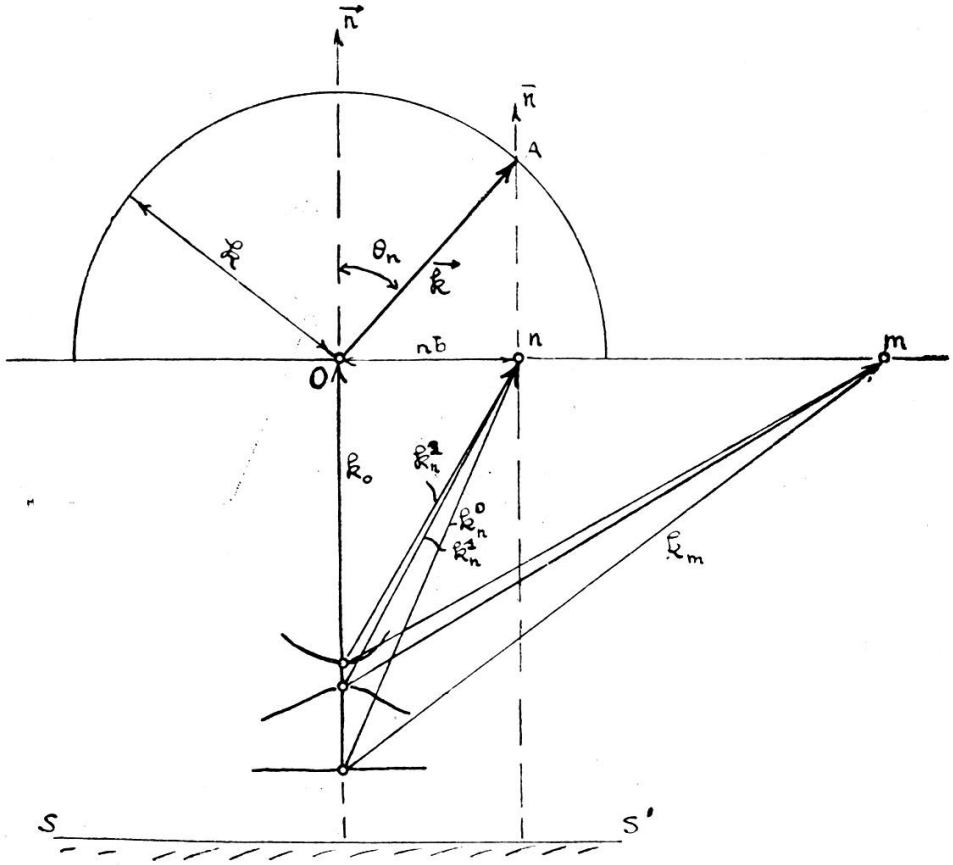


Fig. 15.

Réseau optique.

ss' représente la surface du milieu (perpendiculaire aux stratifications). Les surfaces de dispersion sont schématisées par les hyperboles que coupe la normale $\vec{n}$ à la face du réseau. Les ondes f_n^0, f_n^1, f_n^2, etc. provenant des différents champs se réunissent en une onde $\vec{f} = \overrightarrow{OA}$ en dehors du réseau ayant même composante tangentielle. Les ondes $\vec{f}_m$ ayant une composante tangentielle plus grande que f sont réfléchies totalement et restent à l'intérieur du réseau.

La figure 15 représente alors ce qui se passe. On voit que quelles que soient les directions des ondes à l'intérieur du milieu, on a pour l'onde sortante de l'ordre n

$$\mathfrak{t} \sin \theta_n = nb$$

ou

$$a \sin \theta_n = n\lambda \ .$$

Cette expression est exacte et l'indice de réfraction n'intervient pas comme dans la loi exacte de Bragg donnée par (19).

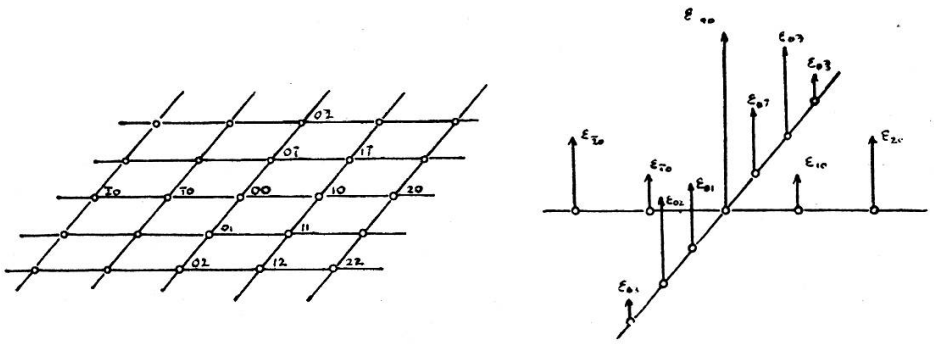
3. *Milieu périodique à deux dimensions.*

Supposons un milieu périodique à deux dimensions, la maille élémentaire étant un prisme rectangulaire (infini en hauteur) défini par les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. Comme nous le savons, ces données suffisent pour déterminer le réseau réciproque géométrique. En effet, les vecteurs d'axe réciproques sont

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{a_1^2}\ , \qquad \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_2}{a_2^2}\ , \qquad \vec{b}_3 = 0\ .$$

Par conséquent le réseau formé sur la maille b_1, b_2, b_3 est plan et consiste d'une série de points disposés aux coins de rectangles dont les côtés valent $\frac{1}{a_1}$ et $\frac{1}{a_2}$ respectivement (voir figure 16*a*). D'une façon générale ε sera donné par

$$\varepsilon = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \varepsilon_{n_1 n_2} e^{2\pi i (n_1 b_1 x + n_2 b_2 y)} \tag{20}$$



a) Réseau géométrique. *b*) Réseau de couplage.

Fig. 16.

Réseaux réciproques d'un milieu périodique à deux dimensions.

et le réseau de couplage est composé du réseau géométrique à chaque point (n_1, n_2) duquel on a attribué le poids $\varepsilon_{n_1 n_2}$. Pour simplifier supposons que (20) dégénère en deux fonctions périodiques

$$\varepsilon = \sum_{n_1} \varepsilon_{n_1, 0} e^{2\pi i n_1 b_1 x} + \sum_{n_2} \varepsilon_{0, n_2} e^{2\pi i n_2 b_2 y} . \qquad (21)$$

Cela signifie que les coefficients mixtes $\varepsilon_{n_1 n_2}$ avec $n_1 \neq 0$ ou $n_2 \neq 0$ sont nuls. Le réseau de couplage prend donc la forme donnée dans la figure 16*b*. Il n'y a donc pas de couplage diagonal direct: le point (1, 1) par exemple n'est pas couplé à (0, 0) ni aux points (2, 0) (0, 2) et (2, 2), ce qui serait arrivé si les coefficients $\varepsilon_{\pm 1, \pm 1}$ n'avaient pas été nuls. Mais cela ne veut pas dire que les champs d'ondes ne contiendront pas une onde $\vec{\mathfrak{f}}_{11}$. En effet, une onde $\vec{\mathfrak{f}}_{00}$, par exemple, donne entre autres, par couplage direct, des ondes $\vec{\mathfrak{f}}_{10}$ et $\vec{\mathfrak{f}}_{01}$. Pour savoir ce que celles-ci vont donner, il faut placer le réseau de couplage sur (1, 0) et (0, 1) (comme origines). On voit alors que $\vec{\mathfrak{f}}_{01}$ donnera par le couplage ε_{10} l'onde $\vec{\mathfrak{f}}_{11}$ qui sera aussi donnée par $\vec{\mathfrak{f}}_{10}$ par couplage ε_{01}. Ce phénomène important a reçu le nom d'action détournée.

La présence des ondes $\vec{\mathfrak{f}}_{n_1 n_2}$ change naturellement les surfaces de dispersion qui ne sont pas constituées simplement par la superposition des deux surfaces qu'on aurait calculées pour chacune des deux fonctions de (20).

4. *Milieux finis.*

Lorsque le milieu est fini on ne peut plus le représenter par une série de Fourier et on ne peut plus appliquer directement les méthodes que nous avons esquissées. Si le milieu est relativement très petit, c'est-à-dire ne contient qu'un très petit nombre de périodes, il n'est plus nécessaire de considérer les champs d'ondes planes et il suffit de calculer comme si seule l'onde incidente avait dans le milieu une intensité non négligeable. Cependant, lorsque le milieu est relativement grand et contient ainsi un grand nombre de périodes, la théorie des champs d'ondes doit commencer à s'appliquer. Si on représente alors le milieu par une intégrale de Fourier on peut montrer

facilement que tout se passe comme si les coefficients de la série de Fourier s'étaient étendus de façon continue autour des points du réseau réciproque. Le réseau de couplage peut alors être représenté par un dessin semblable à la figure 17. Plus le

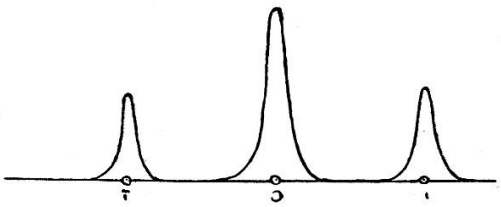


Fig. 17.
Réseau de couplage du milieu fini.

milieu sera grand, plus le domaine continu des ε sera petit. On se rend compte alors que les champs d'ondes sont très compliqués (car en réalité la notion d'onde plane ne s'applique pas aux milieux finis). En principe, toutefois, on voit que les ondes que nous avons considérées jusqu'ici seront remplacées par des faisceaux d'ondes créés par le couplage continu (fig. 18). Les diffractions ne se feront plus dans une direction

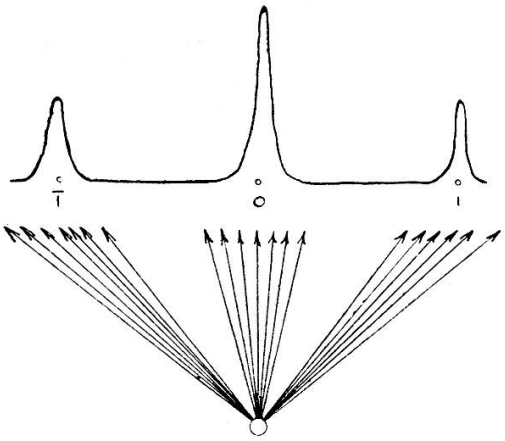


Fig. 18.

bien déterminée et la largeur angulaire de la diffraction sera une mesure de l'extension dans l'espace du milieu fini. Ces phénomènes qui jouent un rôle important dans l'étude de la

matière par les rayons X n'ont pas été jusqu'ici étudiés théoriquement d'une façon complète. Ainsi ne ne sait pas si la correction (19) de la loi de Bragg doit être employée lorsqu'on a affaire à des cristaux très petits.

V. — Conclusions.

Nous avons montré dans cet article l'utilité des notions d'espace réciproque et de surfaces de dispersion dans l'étude de la propagation des ondes. Tout d'abord, pour les milieux homogènes, ces notions nous ont permis de donner une représentation simple des lois de la réfraction et de la réflexion totale. Ensuite nous avons considéré les milieux périodiques pour lesquels nous avons été obligé d'introduire les réseaux réciproques géométrique et de couplage. Grâce à ceux-ci une analyse relativement complète des phénomènes de diffraction a pu être faite. Enfin quelques exemples de nature qualitative ont donné une idée des renseignements qu'on pourrait tirer de l'application de ces notions.

Institut de Physique,
Université de Genève.