Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 20 (1938)

Artikel: La théorie de la relativité dite générale et les observations astronomiques [suite et fin]

Autor: Tiercy, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742944

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA THÉORIE
DE LA RELATIVITÉ DITE GÉNÉRALE
ET LES
OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

PAR

Georges TIERCY

(suite et fin)

---

§ 3. — Le temps cosmique t et le temps astronomique T.

7. — Dans l'application courante des formules relativistes, c'est en effet le temps astronomique universel qui joue le rôle de temps cosmique [1]; cette identification est nécessaire si l'on veut que le calcul habituel des orbites planétaires fournisse, pour l'avance du périhélie de Mercure, les 43″ résultant des calculs de résidus.

Ces deux temps sont des temps absolus. Mais est-ce là une raison suffisante pour qu'on *identifie* les mesures exprimées avec l'une et l'autre unité ? N'y a-t-il pas une autre possibilité ?

Reprenons l'égalité qui lie les deux valeurs exprimant une même durée en temps propre planétaire et en temps cosmique:

$$d\tau = \left(1 - \frac{M}{c^2 r}\right) dt = (1 - \lambda)\, dt \ .$$

[1] McCrea and Milne, *loc. cit.*
P. Dive, *loc. cit.*

La quantité dt est supposée exprimée en unités cosmiques. Or, aucune expérience ne saurait nous fournir directement ce nombre. Pour se tirer d'affaire, il faut faire usage du temps astronomique universel T. Mais quel usage ?

On se borne à admettre que: $dt = d\mathrm{T}$.

Cette hypothèse ne semble pas être la seule possible. Remarquons qu'on obtient, pour le temps propre terrestre:

$$d\tau_{\mathrm{T}} = \left(1 - \frac{\mathrm{M}}{c^2\,\mathrm{D}}\right) dt = (1 - \lambda_{\mathrm{T}})\, dt \ ,$$

où l'on désigne par D la distance moyenne de la Terre au Soleil; le petit nombre λ_{T} est à très peu près *constant*, de même que la quantité λ mercurielle dans:

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{M}}{c^2 a}\right) dt = (1 - \lambda)\, dt \ .$$

Pratiquement, les temps propres τ_{T} et τ sont proportionnels à t ou à T; ils peuvent donc aussi servir à définir un temps cosmique [1]; on passe de l'une des mesures à l'autre par le jeu des facteurs constants $(1 - \lambda)$ et $(1 - \lambda_{\mathrm{T}})$.

Alors, considérant les trois temps absolus t, T et τ_{T}, on est amené à se demander s'il faut identifier T à t ou à τ_{T} ? Rien ne paraît nous imposer un choix plutôt que l'autre.

Si l'on pose

$$dt = d\mathrm{T} \ ,$$

on tombe sur l'application numérique ordinaire; et l'avance du périhélie de Mercure est de 43″ avec le calcul habituel.

Mais si l'on choisit

$$d\mathrm{T} = d\tau_{\mathrm{T}} \ ,$$

(et l'on ne voit pas pourquoi la chose serait interdite), le résultat change. On a alors:

$$dt = \frac{d\tau_{\mathrm{T}}}{1 - \lambda_{\mathrm{T}}} = \frac{d\mathrm{T}}{1 - \lambda_{\mathrm{T}}} \ ;$$

[1] Temps indiqué par une horloge quelconque placée en un lieu déterminé. Cf. J. Haag, Le problème de Schwarschild (*Mémorial des Sciences mathématiques*, XLVI, p. 3).

et le temps propre de la planète considérée est donné par:

$$d\tau = \frac{1-\lambda}{1-\lambda_T} \cdot dT = \frac{1-\lambda}{1-\lambda_T} \cdot d\tau_T \qquad (32)$$

en fonction du temps astronomique universel.

Cela revient à considérer les ds^2 respectifs de la Terre et de la planète (ds^2 indépendants comme on l'a rappelé plus haut, au n° 2), et à *admettre* que les temps cosmiques t y sont identiques; on peut alors passer directement de $d\tau_T$ à $d\tau$ par (32), où $d\tau_T = dT$.

On se demandera ici si l'identification de $d\tau_T$ à dT est fondée ? On fera peut-être remarquer que le temps vulgaire T, sidéral ou solaire moyen, est déterminé par l'observation d'une sorte de chronomètre universel, et que par conséquent, étant le même pour tous les observateurs, c'est à lui de jouer le rôle du temps cosmique; ce qui conduit à poser $dt = dT$.

A quoi l'on peut rétorquer que, si l'on a admis que les temps cosmiques t des ds^2 considérés sont identiques entre eux, il n'y a pas de raison pour admettre, *en plus*, qu'ils sont identiques au temps T. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est que t et T sont proportionnels entre eux. Ce temps T est notre temps pratique; il est déterminé par les observateurs terrestres; et tous les phénomènes physiques étudiés sur Terre le sont en fonction de ce temps astronomique vulgaire absolu. On peut dire que tous nos chronomètres terrestres idéaux (au sens relativiste) battent ce temps T.

Il est donc normal de poser l'identification

$$d\tau_T = dT \ .$$

La relation (32) peut s'écrire, en abandonnant les termes de degrés supérieurs au premier en λ et λ_T:

$$d\tau = (1 - \lambda + \lambda_T)\, dT = [1 - (\lambda - \lambda_T)]\, dT \ . \qquad (33)$$

En ce qui concerne Mercure, on a $\lambda > \lambda_T$, puisque:

$$\lambda = \frac{M}{c^2 a}\ , \qquad \lambda_T = \frac{M}{c^2 D}\ , \qquad a = 0{,}39\, D\ ;$$

de sorte qu'en posant

$$\lambda' = \lambda - \lambda_T \ , \qquad d\tau = (1 - \lambda')\, dT \ , \qquad (34)$$

et en appliquant les formules donnant le déplacement du périhélie, on ne trouve pour ce déplacement séculaire que 26″ au lieu des 43″ requises; on a en effet:

$$\frac{M}{c^2} = 1{,}5) \cdot 10^5 \text{ cm} \ ;$$

$$a = (5{,}8) \cdot 10^{12} \text{ cm pour Mercure} \ ;$$

$$D = (1{,}5) \cdot 10^{13} \text{ cm pour la Terre} \ ;$$

$$\lambda = \frac{1}{3{,}87 \cdot 10^7} = \frac{2{,}6}{10^8} \ ; \qquad \lambda_T = \frac{1}{10^8} \ ;$$

$$\lambda' = \lambda - \lambda_T = = \frac{1{,}6}{10^8} \ ;$$

avance du périhélie par tour $= 6\pi\lambda'$, ou 26″ par siècle.

Quelle est l'identification convenable, $dt = dT$ ou bien $d\tau_T = dT$?

Les relativistes ne considèrent que la première de ces deux hypothèses. Il faut remarquer que, dans le cas de la seconde, $d\tau_T = dT$, le résultat obtenu par les formules relativistes n'est pas meilleur que celui qu'on peut obtenir avec la loi de Newton, en interprétant les instructions de celle-ci comme se rapportant au temps propre de la planète [1].

Pour les avances des périhélies des autres planètes, les résultats, généralement annoncés en ne tenant compte que du seul facteur λ, ne sont guère satisfaisants; ils le sont encore moins si l'on met en jeu le facteur λ_T. Pour Mars, par exemple, l'avance

[1] M. A.-S. Eddington, dans la critique qu'il m'a envoyée, exprime dans les termes suivants que la loi de Newton est ambiguë, en ce qui concerne la nécessité de distinguer le temps du temps propre et la longueur de la longueur propre: « Même si une planète essayait de suivre les instructions de la loi de Newton, elle aurait un choix d'interprétations. Il serait plausible d'interpréter les instructions comme se rapportant à son temps propre et à sa longueur propre. Alors, l'orbite ne serait pas fermée; et il y aurait un mouvement du périhélie, rendant au moins partiellement compte du mouvement einsteinien ».

est de l'ordre de 8″; les formules relativistes donnent 1″,35 en ne tenant compte que de λ; avec l'influence de λ_T, le résultat est encore plus mauvais, puisque λ' devient négatif.

Il semble donc bien qu'en ce qui concerne la question des avances des périhélies planétaires, on ne soit guère plus avancé qu'avant le règne des formules relativistes, du moins si l'on pose $d\tau_T = dT$.

8. — D'ailleurs, il importe de remarquer ici que ces « avances » de périhélies ne sont pas *observées* directement, mais bien *calculées ;* suivant la méthode de calcul adoptée, l'avance du périhélie de Mercure reçoit des valeurs différentes; par exemple, si l'on tient compte des observations méridiennes dans la mesure où elles le méritent, le calcul de Newcomb [1] donne une avance de 34″ au lieu de 42″, ce qui représente une diminution de 20% sur la valeur communément indiquée. Quant au calcul de Le Verrier [2], il donnerait 60″ avec la mise en jeu des observations méridiennes en plus des observations de passage; cela représente une augmentation de 40% sur 42″. On déduit de ces remarques que le nombre 42″,9 donné par le ds^2 de Schwarzschild ne saurait constituer un argument sans réplique en faveur de la théorie de la Relativité dite générale, comme on le croit volontiers dans les milieux peu familiarisés avec les problèmes de l'Astronomie. Et, comme le dit M. J. Chazy dans son bel ouvrage sur la Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste [3]:

« En toute impartialité, dans l'état actuel de la Science, l'argument tiré, en faveur de la théorie de la Relativité, de la valeur de l'avance du périhélie de Mercure n'a pas, ne peut pas avoir le caractère absolu que croient certains. »

En outre, il importe de rappeler que les résultats indiqués jusqu'ici et tirés du ds^2 de Schwarzschild sont obtenus sans tenir compte du fait que l'horloge propre τ est entraînée sur l'orbite planétaire.

[1] Newcomb, *The elements of the four inner planets.*
[2] Le Verrier, *Annales de l'Observatoire de Paris*, 1859.
[3] J. Chazy, *loc. cit.*, I, p. 180.

Suivant le calcul relativiste habituel, on a calculé la dilatation du temps propre en faisant $d\theta = d\varphi = dr = 0$ dans le ds^2 considéré; c'est dire que l'horloge est immobile dans l'espace.

Il semble qu'il soit maintenant nécessaire de tenir compte du mouvement d'entraînement de l'horloge.

§ 4. — Horloge en mouvement dans un champ de gravitation

9. — On ne paraît pas s'être beaucoup préoccupé de ce point jusqu'ici; on le laisse entièrement de côté dans la discussion du problème des périhélies.

Dans l'interprétation du ds^2, on tient compte de la dilatation du temps propre, par rapport au temps cosmique, due au champ de gravitation; on voit alors intervenir le facteur $(1 - \lambda)$ dans les calculs. Mais on ne se préoccupe pas du fait que l'horloge planétaire, au lieu d'être immobile, se meut dans le champ de gravitation.

Il semble qu'on doive ici tenir compte également de la dilatation du temps due au mouvement d'entraînement de l'horloge, ou plus exactement à la vitesse de cet entraînement; cela introduit dans les calculs un nouveau rapport $(1 - \Lambda)$; et l'on est ainsi amené à multiplier les deux rapports $(1 - \lambda)$ et $(1 - \Lambda)$ pour avoir l'effet du mouvement dans le champ de gravitation. La quantité Λ est d'ailleurs pratiquement constante.

Dans le cas ordinaire de l'identification $dt = d\mathrm{T}$, le facteur $(1 - \Lambda)$ ne jouera que pour le passage du temps cosmique au temps propre de la planète.

Si, au contraire, on a choisi l'identification $d\tau_{\mathrm{T}} = d\mathrm{T}$, il faudra introduire un facteur $(1 - \Lambda)$ aussi bien pour le passage du temps terrestre au temps cosmique que pour le passage de celui-ci au temps propre de la planète.

On n'a pas tenu compte jusqu'ici de ces facteurs $(1 - \Lambda)$ dans le problème des périhélies. Pourtant, J. Chazy les utilise dans le tome II de son livre [1].

[1] J. Chazy, *loc. cit.*, II, p. 33; p. 196; p. 201.

Il est facile de voir que le temps propre d'une horloge entraînée dans le champ de gravitation sur une orbite circulaire de rayon r est dilaté dans le rapport $\left(1 + \frac{3M}{2c^2 r}\right)$, tandis que le temps propre d'une horloge immobile dans le champ est dilaté dans le rapport $\left(1 + \frac{M}{c^2 r}\right)$.

En effet, on a, dans le cas du mouvement:

$$v^2 = \frac{M}{r} ;$$

de sorte que le temps propre de cette horloge est dilaté dans le rapport

$$1 + \Lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M}{c^2 r}}} = 1 + \frac{M}{2c^2 r}$$

par le mouvement de vitesse v; tandis que le coefficient de dilatation dû au champ est

$$1 + \lambda = 1 + \frac{M}{c^2 r} .$$

Ainsi, il vient:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2} .$$

Au total [1], on voit que le temps propre de l'horloge entraînée est dilaté dans le rapport $\left(1 + \frac{3M}{2c^2 r}\right)$:

$$\left(1 + \frac{M}{c^2 r}\right)\left(1 + \frac{M}{2c^2 r}\right) \sim 1 + \frac{3M}{2c^2 r} = 1 + \frac{3\lambda}{2} . \qquad (35)$$

De même pour la Terre, le coefficient total de dilatation du temps propre par rapport au temps cosmique est $\left(1 + \frac{3\lambda_T}{2}\right)$, au lieu de $(1 + \lambda_T)$ pour une Terre immobile dans le champ.

[1] J. Chazy, *loc. cit.*, II, p. 33: « Par exemple, le mouvement de rotation de la Terre semble ralenti et durera environ une demi-seconde de plus par an, par suite du mouvement de révolution de la Terre dans le champ de gravitation du Soleil ».

De sorte qu'en posant:

$$\lambda'' = \frac{3\lambda}{2} - \frac{3\lambda_T}{2} = \frac{3}{2}\lambda' = \frac{3}{2}(\lambda - \lambda_T) ,$$

on obtient, pour le passage direct du temps propre terrestre au temps propre de la planète:

$$d\tau = (1 - \lambda'')\, d\tau_T . \tag{36}$$

Si l'on choisit l'identification de $d\tau_T$ à $d\mathrm{T}$, on trouve:

$$d\tau = (1 - \lambda'')\, d\mathrm{T} ;$$

et pour le déplacement du périhélie de Mercure:

$$\lambda'' = \frac{2{,}4}{10^8} ,$$

avance par tour $= 6\pi\lambda''$, soit $39''$ par siècle.

Ainsi, en tenant compte de la nouvelle correction due au facteur $(1 - \Lambda)$, après avoir identifié le temps astronomique universel au temps τ_T, on améliore le résultat concernant l'avance du périhélie de Mercure, qui passe de $26''$ à $39''$; ce nouveau résultat est assez proche de la valeur $43''$ couramment admise, ou de la valeur $38''$ de Le Verrier. Par malheur, pour les autres planètes, les résultats ne sont pas meilleurs qu'auparavant.

Si, par contre, on conserve l'identification habituelle:

$$dt = d\mathrm{T} ,$$

la nouvelle correction due au facteur $(1 - \Lambda)$ de la planète, correction qui semble indispensable, porte l'avance calculée du périhélie de Mercure à $64''$. Ce n'est évidemment guère satisfaisant.

Prenons donc l'identification $d\tau_T = d\mathrm{T}$, qui conduit à la solution $39''$.

10. — Il faut relever encore que, si l'on tient compte de la dilatation du temps due au mouvement dans le champ, comme

il a été proposé dans le n° 9, on doit modifier les formules donnant les transformations de M et h; on a:

$$\begin{cases} M = M_0(1 + 4\lambda) = M_0(1 + 3\lambda)(1 + 2\Lambda) , \\ h = h_0(1 + 2\lambda) = h_0\left(1 + \frac{3\lambda}{2}\right)(1 + \Lambda) , \end{cases} \tag{37}$$

Ce qui conserve l'égalité $\frac{M}{h^2} = \frac{M_0}{h_0^2}$.

Mais alors, le calcul du n° 3 doit être quelque peu modifié. Avec $h = h_0(1 + 2\lambda)$, la constante $\frac{c}{A}$ de la formule (12) prend la valeur 1; de sorte que la formule (12) s'écrit:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h(1 - 2\lambda) = h_0 \ ;$$

c'est l'équation des aires du cas newtonien. Si l'on passe au temps propre $d\tau = dt\left(1 - \frac{3\lambda}{2}\right)$, on trouve:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = h\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = h(1 - \Lambda) \ ; \tag{38}$$

si l'on veut que le second membre se réduise à h, comme au n° 3, on est amené à poser:

$$d\varphi = d\sigma\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = d\sigma(1 - \Lambda) ; \ \sigma = \varphi(1 + \Lambda) ; \tag{39}$$

d'où:

$$r^2 \frac{d\sigma}{d\tau} = h \ ; \tag{40}$$

l'arc $d\varphi$ est remplacé par un nombre $d\sigma$ plus grand; l'unité d'arc *semble* contractée par la vitesse v. On retrouve le problème du disque tournant.

11. — Remarquons d'ailleurs que la dilatation totale du temps $d\tau = \left(1 - \frac{3\lambda}{2}\right)dt$ et la contraction des règles placées tangentiellement à l'orbite dans le rapport $(1 - \Lambda)$ se déduisent directement du ds^2 de Schwarzschild convenablement transformé.

Considérons en effet que le mouvement, que nous savons plan, se fasse dans le plan équatorial $\theta = 0$. On sait que, dans ce plan, à chaque valeur a de la variable radiale r, correspond un mouvement circulaire de vitesse angulaire

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \sqrt{\frac{M}{a^3}}\,; \quad \omega^2 = \frac{M}{a^3}\,; \tag{41}$$

il en est ainsi pour tous les mouvements circulaires définis par les géodésiques du ds^2 de Schwarzschild. Transformons alors ce dernier par l'effet de la substitution:

$$\varphi = \omega t + \psi\,; \tag{42}$$

le ds^2 s'exprime comme suit en fonction des variables r, θ, ψ, t:

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{dr^2}{1-\frac{2M}{c^2 r}} - r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta \cdot d\psi^2) - 2\omega r^2 \cdot \cos^2\theta \cdot d\psi \cdot dt \\ &+ \left(c^2 - \frac{2M}{r} - \omega^2 r^2 \cdot \cos^2\theta\right) dt^2\,. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

La vitesse ω donnée par l'expression (41) est d'ailleurs telle que le ds^2 transformé ci-dessus admet des géodésiques le long desquelles les variables d'espace r, θ, ψ conservent trois valeurs constantes, dont $\theta = 0$, le temps propre variant seul.

La présence de la constante ω dans le ds^2 de Schwarzschild transformé indique qu'on prend en considération le mouvement circulaire du corps autour de la masse centrale.

Désignons par $r = a$ la valeur du rayon de cette orbite; le ds^2 transformé (43) peut s'écrire, au voisinage des valeurs $r = a$ et $\theta = 0$, et grâce à (41):

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{dr^2}{1-\frac{2M}{c^2 r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 d\psi^2 - 2\omega r^2 \cdot d\psi \cdot dt + \\ &+ c^2\left(1 - \frac{3M}{c^2 a}\right) dt^2\,; \end{aligned}\right. \tag{44}$$

cette expression montre immédiatement que la dilatation totale du temps propre se fait dans le rapport $\left(1 + \frac{3M}{2c^2 a}\right) = \left(1 + \frac{3}{2}\lambda\right)$, puisque le coefficient de dt^2 est $c^2\left(1 - \frac{3M}{c^2 a}\right)$.

D'autre part, en changeant un peu l'écriture du ds^2 ci-dessus, de façon à faire disparaître le terme en $d\psi \cdot dt$ lorsqu'on fait $r = a$, l'on voit aussi immédiatement que les règles placées tangentiellement à l'orbite et entraînées par le corps paraissent contractées dans le rapport $(1 - \Lambda)$. On peut en effet écrire (44) sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 = &- \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{c^2 r}} - r^2 d\theta^2 - \left[r^2 + \frac{\omega^2 a^2 r^2}{c^2 - \frac{3M}{a}} \right] d\psi^2 - 2\omega r (r - a) d\psi \cdot dt \\ &+ c^2 \left(1 - \frac{3M}{c^2 a}\right) \left[dt - \frac{\omega a r}{c^2 - \frac{3M}{a}} d\psi \right]^2 ; \end{aligned} \right. \qquad (45)$$

en posant maintenant, avec $r = a$:

$$u = t - \frac{\omega a^2}{c^2 - \frac{3M}{a}} \psi = t - \frac{M}{\omega (ac^2 - 3M)} \psi , \qquad (46)$$

on obtient le long de la ligne d'Univers décrite par le point de coordonnées (r, θ, ψ, u), où $r = a$, $\theta = 0$, $\psi = \text{const}$:

$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 = &- \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{c^2 a}} - a^2 d\theta^2 - a^2 \left(1 + \frac{M}{c^2 a - 3M}\right) d\psi^2 + \\ &+ c^2 \left(1 - \frac{3M}{c^2 a}\right) du^2 . \end{aligned} \right. \qquad (47)$$

Cette expression du ds^2 nous donne toute la solution cherchée.

Le coefficient de $d\psi^2$ est en effet $- a^2 \left(1 + \frac{M}{c^2 a - 3M}\right)$, et peut être écrit plus simplement $- a^2 \left(1 + \frac{M}{c^2 a}\right)$, parce que, dans le champ de gravitation du Soleil, la quantité 3M vaut 4 km,5, ce qui est négligeable à côté de $c^2 a$. Ainsi, les règles disposées tangentiellement à l'orbite circulaire et emportées avec le corps paraissent contractées dans le rapport $\left(1 - \frac{M}{2c^2 a}\right) = (1 - \Lambda)$; c'est la contraction de Lorentz due à la vitesse v d'entraînement pour laquelle on a $v^2 = \frac{M}{a}$, d'où:

$$\sqrt{1 - v^2} = 1 - \frac{M}{2c^2 a} = 1 - \Lambda .$$

L'expression (47) montre aussi que le temps propre de l'horloge entraînée dans le champ sur l'orbite circulaire de rayon $r = a$ est dilaté dans le rapport

$$\left(1 + \frac{3M}{2c^2 a}\right) = 1 + \frac{3}{2}\lambda .$$

Quant au coefficient de dr^2, c'est le même qu'en un point fixe du champ. Enfin, le coefficient $d\theta^2$ étant $-a^2$, la longueur de la circonférence décrite est $2\pi a$.

Ainsi, l'interprétation métrique des coefficients du ds^2 de Schwarzschild transformé et mis sous la forme (47) donne immédiatement la dilatation totale du temps et la contraction des règles tangentielles, dans le cas où les horloges et les règles sont animées d'un mouvement circulaire dans un champ de gravitation. Ce résultat vaut, au moins par approximation, lorsqu'il s'agit d'une orbite planétaire presque circulaire.

On retrouve donc directement la solution obtenue au n° 9 par la combinaison de la dilatation du temps due au champ de gravitation et de la dilatation due à la vitesse d'entraînement.

Enfin, constatons qu'avec la formule de passage

$$d\tau = \left(1 - \frac{3M}{2ac^2}\right) dt = \left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right) dt ,$$

en posant:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}\lambda ,$$

$$d\tau = (1 - \lambda_1)\, dt ,$$

on met en jeu la valeur λ_1 signalée au début du n° 3 pour le cas des horloges entraînées dans le champ sur une orbite circulaire [1].

[1] C'est la valeur que nous avons utilisée dans notre article cité (*Annales françaises de chronométrie*, 1937, *loc. cit.*).

Les conclusions actuelles diffèrent de celles de l'article de 1937, où l'on ne faisait pas la distinction entre une révolution sidérale ou tour ordinaire et une révolution anomalistique.

§ 5. — Remarques sur les deux effets physiques.

12. — Quant aux deux effets physiques signalés par Einstein, c'est-à-dire:

1° la déviation des rayons lumineux dans un champ gravifique,

2° le déplacement des raies du spectre solaire,

il ne semble pas que les mesures faites jusqu'ici soient en accord satisfaisant avec les résultats prédits par la théorie de la Relativité dite générale.

En ce qui concerne la déviation des rayons lumineux pénétrant dans le champ du Soleil et rasant le bord de celui-ci, la théorie de la Relativité générale annonce une valeur de 1″,75.

Les premières mesures, faites par Eddington et Cottingham d'un côté, par Crommelin et Davidson de l'autre, à l'occasion de l'éclipse totale de Soleil de 1919, ont paru confirmer le résultat du calcul théorique; les deux valeurs déduites furent, comme on sait, 1″,61 et 1″,98. Mais les clichés obtenus à l'île du Prince ne sont pas de bonne qualité, et la valeur 1″,61 est très peu sûre. Par contre, les clichés de Sobral sont utilisables; le mémoire original donne 1″,98 pour résultat.

A. Danjon a discuté à nouveau ces données en 1932 [1]; il en a déduit la valeur 2″,06 pour la déviation, compte tenu des corrections nécessaires.

Le même auteur a discuté les résultats de la mission de l'Observatoire de Lick en 1922 (Station de Wallal, en Australie), dirigée par Campbell et Trumpler; la valeur résultante est 2″,05.

Danjon a aussi examiné les mesures faites sur les clichés obtenus par la mission allemande de M. E.-F. Freundlich, de l'Institut Einstein à Potsdam, installée à Sumatra pour observer

[1] A. Danjon, Le déplacement apparent des étoiles autour du Soleil éclipsé. *Le Journal de physique et le Radium*, 1932, p. 281.

l'éclipse de 1929 [1]; une discussion analogue aux précédentes a donné la valeur 2″,06 [2].

Ainsi, en étudiant les données fournies par les éclipses de 1919, 1922 et 1929, et en prenant les précautions qui semblent indiquées, on trouve une constante $\delta_0 = 2'',06$ assez différente de la constante annoncée par la théorie de la Relativité générale. D'ailleurs, M. Campbell lui-même, à la fin de son mémoire original [3], remarque que la déviation pourrait atteindre 2″,05 près du bord du disque solaire.

13. — Il n'est pas sans intérêt de rappeler en outre que, pour les étoiles observées les plus éloignées du Soleil éclipsé, les observations de Campbell donnent pour la déviation une valeur moyenne quelque peu négative; alors que, d'après la théorie de la Relativité, la déviation devrait toujours être positive, donnée par la formule:

$$\delta = \delta_0 \cdot \frac{1}{R}, \qquad (48)$$

où δ_0 est la déviation pour un rayon lumineux rasant le bord du Soleil [4], et où la quantité R représente la distance exprimée en rayons apparents du Soleil.

Au lieu de la branche d'hyperbole représentée par l'équation (48), les résultats de MM. Campbell et Trumpler, traduits en graphique, fournissent une courbe descendante qui coupe l'axe des distances pour R = 9 environ, la déviation moyenne devenant dès lors négative pour R supérieure à 9. On trouvera

[1] Mémoire original dans *Zeitschrift für Astrophysik*, 3, p. 171-198.

[2] « En apprenant les résultats de Freundlich, M. Einstein aurait déclaré que sa théorie de la gravitation devait être revisée, en vue d'un accord plus complet avec l'expérience. » A. Danjon, *loc. cit.*, 1932, p. 300.

Ajoutons que M. Shah Sulaiman a publié dans les *Proceedings of the National Academy of Sciences*, India, en 1936, une nouvelle théorie intitulée « The mathematical Theory of a new Relativity », qui conduit à une constante calculée comprise entre 2″,3 et 2″,6.

[3] *Lick Observatory Bulletin*, 1923, p. 33-45.

[4] C'est pour δ_0 que les mesures donnent un peu plus de 2″, au lieu de 1″ ¾ comme le voudrait le calcul d'Einstein.

ce graphique dans un article publié par M. Croze en 1926 [1], de même que dans une étude de M. P. Salet datant de 1924 [2].

Il semble qu'on a un peu trop laissé cette constatation dans l'ombre; elle était évidemment fort embarrassante. MM. Campbell et Trumpler ont alors imaginé de faire tourner l'axe des abscisses autour de l'origine dans le sens négatif jusqu'à ce que cet axe apparaisse comme une asymptote à la courbe. Il est superflu d'insister sur le caractère arbitraire de cet artifice, qui a d'ailleurs été vivement critiqué par l'astronome J. Hopmann [3].

Pour nous, l'objection subsiste; non seulement la constante δ_0 n'a pas la valeur prévue par le calcul einsteinien, mais encore celui-ci ne rend pas compte de ce qui se passe à une distance de quelques rayons apparents du Soleil.

14. — En ce qui concerne le déplacement des raies spectrales, il ne semble pas non plus qu'on puisse l'invoquer comme un argument décisif en faveur de la théorie de la Relativité dite générale. Il faut ici tenir compte de la découverte récente de Saint-John [4] et Evershed [5] sur l'effet marginal (« Edge Effect »), qui donne pour le déplacement une valeur double de celle annoncée par Einstein, tandis que celle-ci correspond au centre du disque solaire.

Signalons en passant que la nouvelle théorie de M. Shah Sulaiman [6] rend compte de cette différence.

M. Croze, dans son article de 1926 [7], signalait déjà que les lois auxquelles obéissent les déplacements des raies spectrales ne s'expliquent pas par l'effet Einstein. En ce qui concerne le Soleil, il faudrait en effet expliquer aussi pourquoi le déplacement est d'autant plus important que l'intensité des raies

[1] *Revue générale des Sciences*, 15 juillet 1926.

[2] *Bull. de la Soc. astronomique de France*, 1924.

[3] J. Hopmann, Die Deutung der Ergebnisse der amerikanischen Einsteinexpedition (*Phys. Zeitschrift*, 24, p. 476-485).

[4] *Astrophysical Journal*, 1928.

[5] M. N. 96, janvier 1936. — The red shift of the iron lines at the edge of the Sun.

[6] S. Sulaiman, *loc. cit.*

[7] M. Croze, *Revue générale des Sciences*, 1926.

est plus forte; et pour les étoiles de haute température, il faudrait voir pourquoi le déplacement est spécialement marqué.

Il reste que les deux effets physiques en question ont été prédits par Einstein. Les phénomènes qualitatifs peuvent être définitivement admis. Mais il ne semble pas possible d'affirmer qu'ils suivent exactement, du point de vue quantitatif, les lois établies par les développements de la théorie de la Relativité dite générale.

§ 6. — Conclusion et résumé.

15. — *a*) Les formules de la Relativité dite générale peuvent être établies par d'autres voies, par exemple par le moyen d'une théorie générale de l'aberration comme celle de Varcollier, dans l'espace et le temps classiques, sans aucun recours à la métaphysique einsteinienne, ou par la théorie cinématique de Milne.

b) Il n'est pas démontré qu'il faille identifier le temps astronomique universel T avec le temps cosmique t. Une autre identification se présente, celle de T avec le temps propre terrestre. Ces trois temps sont pratiquement proportionnels entre eux. Si l'on choisit $d\mathrm{T} = d\tau_{\mathrm{T}}$, la quantité λ est à remplacer dans les calculs par $\lambda' = \lambda - \lambda_{\mathrm{T}}$.

Mais alors, les formules relativistes n'expliquent que 26″ sur les 43″ de l'avance admise du périhélie de Mercure. Pour les autres planètes, le résultat est encore moins satisfaisant.

c) Il semble bien ensuite qu'il soit nécessaire de tenir compte, non seulement de la dilatation du temps propre due au champ de gravitation, à laquelle on s'est borné jusqu'ici, mais aussi de la dilatation du temps due à la vitesse v du mouvement d'entraînement de la planète dans le champ. Le résultat du calcul antérieur, avec $d\mathrm{T} = d\tau_{\mathrm{T}}$, est alors amélioré en ce qui concerne Mercure, dont l'avance du périhélie est portée de 26″ à 39″; par contre, pour les autres planètes, les déplacements calculés des périhélies sont défavorablement changés.

Avec l'identification habituelle $dt = d\mathrm{T}$, si l'on tient compte de la dilatation du temps due à la vitesse v du corps dans le champ, c'est-à-dire de la correction provenant du facteur

$(1 - \Lambda)$, correction qui paraît nécessaire, l'avance calculée du périhélie de Mercure passe de 43″ à 64″, valeur probablement trop forte. Le résultat n'est pas satisfaisant non plus pour les autres planètes.

d) Dans l'ensemble, il ne paraît pas que l'application des formules relativistes tirées du ds^2 de Schwarzschild permette d'expliquer les avances des périhélies planétaires d'une façon satisfaisante du point de vue numérique. Le problème astronomique des avances des périhélies ne paraît guère plus avancé après la théorie relativiste dite générale qu'avant l'introduction du ds^2 de Schwarzschild. Le problème reste entier.

e) Quant aux deux effets physiques signalés par Einstein, la déviation des rayons lumineux dans un champ gravifique et le déplacement des raies spectrales, ils ne paraissent pas suivre les lois numériques indiquées par la théorie de la Relativité générale; ces formules sont impuissantes à rendre compte de certains faits d'observation.

Il va sans dire que les deux effets en question sont encore moins en faveur de l'interprétation concrète du temps propre d'Einstein.

f) Il est bon de rappeler que l'avance du périhélie de Mercure n'est pas la seule anomalie à expliquer dans les mouvements planétaires. Newcomb a signalé onze anomalies, attirant particulièrement l'attention sur quatre d'entre elles. La difficulté du problème est donc de trouver une explication rendant compte numériquement, non seulement de l'avance du périhélie de Mercure, mais des autres anomalies observées. De ce point de vue, les formules offertes par la théorie de la Relativité dite générale ne sont certainement pas satisfaisantes.

Il semble que, en ce qui concerne les difficultés du problème des orbites planétaires, les formules de la Relativité dite générale ne donnent même pas une amélioration appréciable sur les résultats issus de la théorie newtonienne. L'hypothèse de L. Maillard [1] et son mouvement quasi newtonien donnaient, pour ce problème, de bien meilleurs résultats numériques.

[1] L. Maillard, *loc. cit.*, Lausanne, 1922.