Sur les courbes anallagmatiques et circulaires

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **23 (1941)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741168

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Paul Rossier. — *Sur les courbes anallagmatiques et circulaires.*

Rappelons que l'on appelle anallagmatique une courbe qui se transforme en elle-même dans une inversion; les courbes circulaires sont celles dont tous les points à l'infini sont réunis aux points cycliques.

Darboux [1] a montré que l'on engendre les courbes anallagmatiques par la transformation suivante. Soit c le cercle par rapport auquel la courbe se reproduit par inversion, cercle appelé cercle d'anallagmatie. Construisons la polaire x par rapport à c d'un point X; traçons le cercle orthogonal à c et passant par les deux intersections de c et x; les transformés X′ et X″ de X sont les deux intersections de ce cercle orthogonal et du rayon du cercle c passant par X. Si X décrit une courbe d'ordre n ne passant pas par le centre de c, X′ et X″ décrivent une courbe anallagmatique d'ordre $2n$ et qui a les points cycliques pour points multiples d'ordre n chacun.

Dans le cas particulier où le lieu de X est une conique, la transformation donne les cycliques. Ces courbes sont d'ordre quatre et bicirculaires. On démontre [2] que toute courbe circulaire d'ordre quatre est une cyclique.

Nous nous proposons de montrer que dès que l'ordre atteint cinq, cette propriété n'est plus vraie et que les courbes circulaires ne sont alors généralement pas anallagmatiques.

Considérons une courbe d'ordre $2n$ possédant en chacun des points cycliques un point d'ordre n. Donner un point d'ordre k d'une courbe, c'est donner $k(k+1)/2$ conditions, soit $n(n+1)$ dans notre cas particulier. Pour déterminer une courbe d'ordre $2n$, il faut $2n(2n+3)/2$ conditions. Les courbes circulaires d'ordre $2n$ constituent donc une variété à n^2+2n dimensions.

Une courbe anallagmatique d'ordre $2n$ est engendrée par la transformation de Darboux effectuée sur une courbe d'ordre n, elle-même déterminée par $n(n+3)/2$ conditions. Comme il

[1] G. Darboux, *Principes de géométrie analytique*, p. 484.
[2] G. Loria, Spezielle ebene Kurven I, p. 120.

faut trois conditions pour déterminer un cercle, les courbes anallagmatiques d'ordre $2n$ constituent une variété à

$$3 + n(n + 3)/2 \text{ conditions .}$$

Les deux variétés ne sont confondues que si

$$\varphi(n) = 3 + \frac{n(n+3)}{2} = n(n+2) = 0$$

La seule racine positive de cette équation est $n = 2$. Les cycliques sont donc les seules courbes pour lesquelles la condition de circularité implique celle d'anallagmatie. Dès que l'on a à faire à des courbes d'ordre supérieur, la variété des courbes circulaires est plus étendue que celle des courbes anallagmatiques.

Dans ce qui précède, nous avons supposé pair l'ordre de la courbe circulaire considérée. On passe facilement au cas impair en considérant l'anallagmatique et la courbe circulaire précédentes comme dégénérées et composées d'une courbe d'ordre impair et de la droite à l'infini. Cependant la démonstration précédente est applicable au cas de l'ordre impair comme suit.

L'anallagmatique d'ordre $2n - 1$ est engendrée par une courbe d'ordre n passant par le centre de l'inversion considérée. Le cercle d'inversion ne possède alors plus que deux degrés de liberté et les anallagmatiques d'ordres $2n + 1$ constituent une variété à $2 + n(n + 3)/2$ dimensions.

La courbe circulaire d'ordre $2n - 1$ a aux points cycliques deux points d'ordre $n - 1$. Cela correspond à $n(n - 1)$ conditions sur les $(2n - 1)(2n + 2)/2$ qui sont nécessaires pour déterminer la courbe. Ces courbes circulaires constituent donc une variété à $n^2 + 2n - 1$ dimensions.

La comparaison des degrés des deux variétés conduit à la même équation que plus haut.

Le cas $n = 1$ semble conduire à un paradoxe: la courbe anallagmatique correspondante est le cercle, ou la droite si la droite donnée passe par le centre d'anallagmatie. Excluons ce dernier cas qui se ramène immédiatement au précédent en considérant un cercle composé d'une droite et de la droite à l'infini.

Le plan contient une triple variété de cercles qui peuvent servir de cercles d'anallagmatie aux droites, en nombre doublement infini, du plan. Cela constitue une variété à cinq dimensions, alors que les courbes anallagmatiques d'ordre deux sont des cercles en nombre triplement infini et non quintuplement. La contradiction disparaît si l'on remarque que chaque cercle est anallagmatique d'une double infinité de manières, puisqu'il existe une double infinité de cercles orthogonaux à un cercle donné.

Paul Rossier. — *Sur une règle pratique de dessin géométrique.*

A la suite de Wiener [1], on cite souvent [2] la règle suivante de dessin géométrique: l'intersection I de deux droites est d'autant mieux déterminée que ces droites sont elles-mêmes données par des points plus rapprochés de I.

Cette règle est inexacte.

Pratiquement, un point est représenté par une petite surface dont nous admettrons qu'elle est circulaire et dont le diamètre δ est de l'ordre du ou des dixièmes de millimètre. Une droite tracée par deux points A et B est pratiquement contenue à l'intérieur de la figure limités par les deux paires de droites suivantes: les tangentes extérieures aux deux cercles images de A et B; les tangentes intérieures à ces cercles.

Entre A et B, cette figure est pratiquement un rectangle de largeur δ; nous qualifierons d'interpolée cette région.

A l'extérieur du segment AB, dans les deux régions que nous appellerons extrapolées, la figure se compose de deux droites formant un angle ε d'autant plus petit que les points A et B sont plus éloignés. On a pratiquement

$$\varepsilon = \frac{2\delta}{AB}.$$

[1] *Darstellende Geometrie*, I.

[2] ADLER, *Geometrische Konstruktionen;* THIEME, *Grundlehren der Mathematik*, II, 1: Die Elemente der Geometrie.