Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 23 (1941)

Artikel: Les groupements de la multiplication biunivoque des classes et de celle des relations

Autor: Piaget, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741187

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'opération inverse est, comme dans le groupement des relations asymétriques, l'addition de l'équation formée des relations converses, l'ordre des relations étant alors lui-même inversé. Or la converse de

$$x \overset{a}{\longleftrightarrow} y \quad \text{est} \quad y \overset{a}{\longleftrightarrow} x \quad \text{que l'on pourrait écrire:} \quad -\left(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y\right)$$

L'identique générale, produit des opérations directe et inverse est la relation $\overset{0}{\longleftrightarrow}$, soit $(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a}{\longleftrightarrow} x) = (x \overset{0}{\longleftrightarrow} x)$. Par exemple:

$$\left(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a'}{\longleftrightarrow} s = x \overset{a'}{\longleftrightarrow} s\right) +$$
$$+ \left(s \overset{a'}{\longleftrightarrow} x = s \overset{a'}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a}{\longleftrightarrow} x\right) = \left(x \overset{0}{\longleftrightarrow} x\right).$$

Les identiques spéciales sont la tautologie $(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + x \overset{a}{\longleftrightarrow} y = x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)$ et la résorption $(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + x \overset{b}{\longleftrightarrow} y = x \overset{b}{\longleftrightarrow} y)$. Quant à l'associativité, elle est, comme dans tous les groupements, immédiate dans les suites homogènes et médiate dans les suites hétérogènes.

Jean Piaget. — *Les groupements de la multiplication biunivoque des classes et de celle des relations.*

Nous aimerions chercher en cette note, à quelles conditions les « multiplications logiques » ($A \times B = AB$, où AB désigne la « partie commune » à A et à B) peuvent être ordonnées en « groupements » logistiques.

Hypothèses. — Soit A_1 une classe donnée: multiplier Z par A_1 consiste à trouver la classe ZA_1 contenant tous les individus qui sont à la fois Z et A_1. Supposons que tous les A_1 soient des Z mais sans que la réciproque soit vraie: il existe alors une classe ZA'_1 contenant tous les Z qui ne sont pas des A_1. D'où $ZA_1 + ZA'_1 = ZB_1$. Tous les Z sont alors B_1 et réciproquement. Soit maintenant une autre classe B_2 telle qu'on ait aussi $Z \times B_2 = ZA_2 + ZA'_2$. Multiplier B_1 par B_2 consistera, selon ce même principe, à associer chaque classe de B_1 à chaque classe de B_2, d'où $B_1 \times B_2 = A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2 =$

B_1B_2. Si l'une ou l'autre de ces quatre associations (par exemple la classe A_1A_2 comprenant tous les individus qui sont à la fois A_1 et A_2) ne correspond à aucun élément (la classe étant alors nulle) l'ensemble des B_2 sera cependant le même que l'ensemble des B_1 et des Z. Soient encore $B_3B_4B_5$, etc. formées de la même façon et dont les deux classes élémentaires A et A′ (= non A) sont associées entre elles et aux précédentes selon toutes les combinaisons possibles. Nous pouvons alors admettre que chacune de ces classes B contient la totalité des éléments logiques donnés (par exemple A_1 = les animaux et A_1' = les non-animaux, c'est-à-dire « tout sauf les animaux »). Au lieu de considérer ce « tout » comme un « Univers du Discours » (symbole 1) ainsi qu'on le fait souvent, nous nous servirons simplement du symbole Z en lui attribuant la signification de: « une classe positive et non nulle plus générale que toute autre classe arbitrairement désignée », de même que le symbole ∞ désigne l'itération toujours possible de $+ 1$ (nous ne disons donc pas la « classe de toutes les classes », ce qui soulève les antinomies bien connues). L'expression ZA_1 désignant les éléments qui appartiennent à la fois à la classe Z et à la classe A_1 équivaut donc à A_1 soit $ZA_1 = A_1$. Inversement toute classe K_1 équivaut à ZK_1.

Si $B_1 \times B_2 = B_1 B_2$ signifie ainsi « je classe tous les B_1 dans les classes de B_2 et réciproquement » nous pouvons conférer à l'opération $B_1B_2 : B_2 = B_1$ (ou $B_1B_2 : B_1 = B_2$) le sens de « je supprime en $B_1 B_2$ tous les emboîtements de B_2 pour ne laisser les éléments que dans les emboîtements de B_1 » ou plus brièvement: « je fais abstraction en $B_1 B_2$ des emboîtements d'ordre B_2 ». De même que la multiplication logique ne consiste pas à augmenter le nombre des éléments, mais seulement celui des classes, de même la division logique ou « abstraction » ne consiste pas à diminuer le nombre des éléments mais celui des classes seules (des emboîtements).

Définition. — Nous appellerons « multiplication complète » de deux classes ou de deux suites de classes, telles que tous les éléments de l'une des deux classes totales appartiennent aussi à l'autre, l'association de chacune des sous-classes disjointes

de l'une à chacune des sous-classes disjointes de l'autre. Par exemple $B_1 \times B_2 = A_1A_2 + A'_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A'_2 (= B_1B_2)$.

Théorème X. — Toutes les équations vraies portant sur un système de multiplications complètes de classes forment un groupement.

En effet, l'opération directe sera la multiplication complète par l'équation de forme $B_1 \times B_2 = B_1B_2$ où $(B_1B_2 \times B_3 = B_1B_2B_3$ ou $B_1 \times B_3 = B_1B_3$ etc... L'opération inverse la division membre à membre par une même équation.

L'identique générale, produit de l'opération directe par l'inverse sera $Z \times Z = Z$ puisque $(B_1 \times B_2 = B_1 B_2) : (B_1 \times B_2 = B_1 B_2)$ donne $(B_1 : B_1 = Z) + (B_2 : B_2 = Z) = (B_1 B_2 : B_1 B_2 = Z)$.

Les identiques spéciales sont différentes de ce qu'elles sont dans les groupements additifs: chaque équation joue en effet le rôle d'identique par rapport à elle-même (les signes $\times$ ou : étant les mêmes) et par rapport à celles d'ordre *inférieur* et de même signe: il y a donc *tautologie* et *absorption* (et non plus résorption). Par exemple $B_1 \times B_1 = B_1$ (tautologie) et $A_1 \times B_1 = A_1$ (absorption). Par contre $B_1 : B_1 = Z$; $B_1B_2 : B_1 = B_2$ et $B_1 : B_1B_2 = Z$.

L'associativité est immédiate pour les suites homogènes et médiate pour les suites hétérogènes, les règles de calcul correspondant (la résorption une fois remplacée par l'absorption) à celle des groupements additifs.

La correspondance bi-univoque qualitative. — Le caractère propre de ce groupement est d'engendrer la relation de correspondance bi-univoque qualitative. En effet, aux classes $A_1 A_2$ et $A_1 A'_2$ correspondent les classes $A'_1 A_2$ et $A'_1 A'_2$; et aux classes $A_1 A_2$ et $A'_1 A_2$ correspondent les classes $A_1 A'_2$ et $A'_1 A'_2$. Or, au lieu de se borner à des suites d'ordre B comme nous l'avons fait pour simplifier, rien n'empêche de multiplier « complètement » l'une par l'autre deux suites ou classifications simples $A_1 + A'_1 = B_1$; $B_1 + B'_1 = C_1$; $C_1 + ... + Z$ et $A_2 + A'_2 = B_2$; $B_2 + B'_2 = C_2$; $C_2 + ... + Z$. En chacune des classes $A_1 A'_1 B'_1 ...$ on retrouvera donc toutes les classes

$A_2 A'_2 B'_2$ ... et réciproquement. C'est cette opération générale qui intervient dans la construction des « tables à double entrée » dont on se sert dans les sciences comparatives et qui fonde ainsi une « correspondance qualitative » entre $A_1 A'_2$; $A_1 A_2$; $A_1 B'_2$ ... etc. et $A'_1 A_2$; $A'_1 A'_2$; $A'_1 B'_2$ ... etc., opération distincte de la correspondance bi-univoque d'ordre mathématique, qui peut être effectuée entre unités « quelconques ».

Ces correspondances constituent, comme il est évident, des « équivalences multiplicatives », par opposition aux équivalences précédemment étudiées (exemple $A \overset{B}{=} A'$) qui sont des équivalences additives.

Hypothèses. — Supposons maintenant qu'entre des termes donnés existe une série qualitative de relations $\xrightarrow{a'_1}$; $\xrightarrow{a'_1}$; $\xrightarrow{b'_1}$; etc. et qu'entre chacun de ces termes et ceux d'une autre série constituée par les mêmes relations existe, d'autre part, la relation $\downarrow a'_2$; puis, entre cette dernière série et d'autres semblables encore, les relations $\downarrow b'_2$; $\downarrow c'_2$; etc... Chacun des termes de cette table à double entrée sera donc déterminé par la multiplication $\downarrow x_1 \xrightarrow{y_2}$ ou $\xrightarrow{y_2} \downarrow x_1$, x et y représentant un ordre a, a', b' ...

Théorème XI. — Toutes les équations vraies portant sur un système de multiplication complète de relations asymétriques qualitatives constituent un groupement.

En effet, il existe en vertu du théorème VI une correspondance bi-univoque entre les opérations de la classification simple et celles de la sériation qualitative bien que ces opérations diffèrent de signification. Il sera donc toujours possible de multiplier complètement l'une par l'autre les relations de deux séries qualitatives groupées selon les règles tirées du théorème IV, puisque l'on peut multiplier l'une par l'autre deux suites additives de classes (théorème X). Cette multiplication complète des relations asymétriques constituera donc également un groupement, correspondant à celui de la multiplication complète des classes [1].

[1] Ce groupement correspond à l'opération psychologique que Spearman a appelée l'« éduction des corrélats ».

Théorème XII. — L'égalisation, par substitution généralisée, des classes élémentaires A_1; A'_1; B'_1 ...; et A_2; A'_2; B'_2 ... d'une multiplication complète des classes; et l'égalisation correspondante des relations élémentaires d'une multiplication complète de relations asymétriques transforment simultanément ces deux groupements dans le groupe multiplicatif des nombres entiers et fractionnaires positifs.

En effet, selon le théorème VII la substitution généralisée des classes A; A'; B' .. dans une classification simple donne à cette classification la forme $A = + A$; $B = A + A$; $C = A + A + A$ ... et la substitution généralisée des relations élémentaires d'une série lui donne la forme: $\xrightarrow{a} = 0 \xrightarrow{a} A$; $\xrightarrow{b} = \xrightarrow{a} + \xrightarrow{a}$; $\xrightarrow{c} = \xrightarrow{a} + \xrightarrow{a} + \xrightarrow{a}$ ... Chaque classe élémentaire étant ainsi transformée en unité, il deviendra alors possible de multiplier deux classes quelconques, par exemple une classe ($B = A_1 + A_1$) par une classe ($C = A_2 + A_2 + A_2$) en associant chaque unité de l'une à chaque unité de l'autre et en considérant ces A_1A_2 comme des unités d'association. En effet, la multiplication logique $B_1 \times C_2$ donne $(A_1A_2 + A_1A'_2 + A_1B'_2) + (A'_1A_2 + A'_1A'_2 + A'_1B'_2)$. Or, si chaque classe élémentaire de B_1 et de C_2 équivaut à $\times A_1$ et à $\times A_2$, on a $B_1 \times C_2 = 6\,(A_1A_2)$, le nombre des associations constituant alors le produit de la multiplication.

Cela équivaudra, d'autre part, à multiplier, selon les mêmes associations, les rangs (devenus vicariants) de ces unités, soit $\downarrow b_1$ par $\xrightarrow{c_2}$, car, pour distinguer les couples, il faut bien les ordonner, d'où la table suivante:

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & A_2 & A'_2 & B'_2 \\
\hline
A_1 & A_1A_2 & A_1A'_2 & A_1B'_2 \\
\hline
A'_1 & A'_1A_2 & A'_1A'_2 & A'_1B'_2 \\
\hline
\end{array}
= \left\{
\begin{array}{ccccc}
 & \downarrow a_1 & & \downarrow a_1 & & \downarrow a_1 \\
\xrightarrow{a_2} & (A_1A_2) & \xrightarrow{a_2} & (A_1A_2) & \xrightarrow{a_2} & (A_1A_2) \\
 & \downarrow a_1 & & \downarrow a_1 & & \downarrow a_1 \\
\xrightarrow{a_2} & (A_1A_2) & \xrightarrow{a_2} & (A_1A_2) & \xrightarrow{a_2} & (A_1A_2)
\end{array}
\right.$$

Les multiplications logiques des classes et des relations sont ainsi transformées simultanément en multiplication arithmétique, c'est-à-dire que, pour $(B_1 = 2A_1) \times (C_2 = 3A_2)$, les

associations A_1A_2 ainsi que les différences de rang $\downarrow a_1 \xrightarrow{a_2}$, une fois égalisées, perdent leurs caractères qualitatifs et se réduisent alors à l'opération $2 \times 3 = (1 \times 3) + (1 \times 3) = (1 \times 2) + (1 \times 2) + (1 \times 2) = 6$. La tautologie ne substituera donc que dans le cas $A \times A = A$, soit $1 \times 1 = 1$, tandis que les multiplications $B \times B = B$, etc... donneront le carré $n \times n = n^2$ puisque $(A + A) \times (A + A) = 4(A_1A_2)$, etc... L'absorption sera exclue pour la même raison. Les identiques spéciales se réduisant ainsi à la seule identique $\times A$ ($= \times 1$), il en sera de même de l'identique générale logique $Z \times Z = Z$, car si les classes ne sont formées que d'unités $\times A = \times 1$, on aura toujours $\times nA : nA = \times 1A$. Dès lors, l'opération inverse consistera en une dissociation des couples d'association, c'est-à-dire en une division devenue purement numérique, et sa généralisation engendrera les rapports fractionnaires, inconnus des groupements logiques.

Marcel Monnier et **Tamara Devrient.** — *Les effets d'implantations répétées de glande pinéale bovine chez le jeune Rat.*

Le rôle de la glande pinéale (épiphyse) dans l'organisme est encore mal connu et les nombreuses recherches expérimentales entreprises pour le préciser ont fourni des résultats souvent très contradictoires. Dans une étude critique sur la physiologie de la glande pinéale [1], nous avons passé en revue les données expérimentales acquises jusqu'à ce jour et considéré comme probables les fonctions suivantes: *a*) Action inhibitrice sur le développement des organes génitaux et des caractères sexuels; *b*) Rétraction des mélanophores du têtard (implants); *c*) Action hypotensive (extraits); *d*) Antagonisme fonctionnel entre le système habénulo-épiphysaire et le système hypothalamo-hypophysaire. Par contre, nous avons mis en doute l'action modératrice sur la croissance somatique (poids, taille), bien que l'épiphyse déploie son activité maximale dans la première période de la vie.

[1] M. Monnier et T. Devrient, Rev. méd. suisse romande, nº 14, 1178, 1940.