Les groupements de la multiplication counivoque des classes et des relations

Autor(en): **Piaget, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **23 (1941)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741201

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

des aliments plastiques azotés. Nous pouvons déduire des constatations précédentes que le clône leucophytique est *hétérotrophe* en ce qui concerne l'azote. Ces observations nous conduisent en ligne droite au problème de l'organisation couplée du carbone et de l'azote au niveau du du plastide. Une contribution positive à ce problème ne sera cependant apportée, que lorsque nous aurons établi le rôle joué par l'hétérotrophie de l'azote et celui joué par les facteurs de croissance.

Université de Genève.
Institut de Botanique générale.

En *séance particulière*, M. le Président annonce que le Comité de publication a nommé Mme Irène MUSTER, associée libre.

Séance particulière du 26 juin 1941.

L'*Assemblée générale* convoquée spécialement à cet effet approuve le projet de Statuts revisés, ainsi que le Règlement des Publications éditées par la Société. Ces deux textes entrent immédiatement en vigueur.

Séance du 3 juillet 1941.

Jean Piaget. — *Les groupements de la multiplication co-univoque des classes et des relations.*

Dans une communication précédente (15 mai 1941) nous avons montré que si l'on multiplie deux classifications simples (ou deux séries qualitatives) en associant chaque classe (ou relation) élémentaire de l'autre, on constitue un groupement. Il nous reste à démontrer que les lois du groupement s'appliquent aussi lorsque l'on multiplie une classification simple par la classification complète qui lui correspond, de même que si l'on multiplie entre elles les relations asymétriques et symétriques découlant d'un tel système.

Hypothèses et définitions. — Soient A_1, A_1', B_1', etc. les classes élémentaires d'une classification simple et A_2, A_2', B_2', etc. les classes de différents ordres susceptibles d'y être incluses entièrement. Nous appellerons multiplication co-univoque des classes l'opération qui associera chaque classe de la première suite à chaque classe de la seconde suite jusque (inclusivement) à celle du même ordre. Si M_1 et M_2 sont les classes totales des deux suites, on a donc

$$M_1 \times M_2 = \begin{cases} A_1 A_2 \\ A_1' A_2 + A_1' A_2' \\ B_1' A_2 + B_1' A_2' + B_1' B_2' \\ C_1' A_2 + C_1' A_2' + C_1' B_2' + C_1' C_2' \\ \ldots \text{ etc.} \end{cases}$$

Nous appellerons, d'autre part, relation asymétrique co-univoque toute relation unissant un seul terme à plusieurs (par exemple un père à ses fils). Soit $\downarrow a$, $\downarrow b$, $\downarrow c$, etc., une suite de relations co-univoques emboîtées (par exemple père, grand-père, etc.). On sait (Russell) que le produit d'une relation co-univoque par sa converse est toujours une relation symétrique et transitive, soit $(\alpha \downarrow \beta) \times (\gamma \uparrow \alpha) = (\beta \leftrightarrow \gamma)$. Nous appellerons multiplication co-univoque des relations la multiplication d'une suite de relations asymétriques par ses co-univoques ou par la suite des relations symétriques correspondantes, opération qui déterminera donc entre deux individus quelconques α et γ les relations de l'ordre le plus faible issues des relations entre α et β et entre β et γ, soit $(\alpha \downarrow \leftrightarrow \beta) \times (\beta \downarrow \leftrightarrow \gamma) = (\alpha \downarrow \leftrightarrow \gamma)$.

Théorème XIII. — Toutes les équations vraies portant sur un système de multiplications co-univoques de classes forment un groupement.

En effet, une multiplication co-univoque pourrait être assimilée à une multiplication bi-univoque dont le produit serait tel que l'association entre toute classe élémentaire et une classe d'ordre supérieur demeurerait nulle. Il est donc évident que les lois du groupement multiplicatif des classes s'appliquent ici

à titre de cas particulier ou de sous-groupement. D'autre part, il est évident que deux multiplications co-univoques donnent encore une multiplication co-univoque.

Enfin, les relations asymétriques et co-univoques d'inclusion tirées d'un tel système ainsi que ses relations symétriques de co-inclusion constituent à elles deux un groupement dont nous allons démontrer l'existence.

Théorème XIV. — Toutes les équations vraies portant sur un système de multiplications co-univoques de relations forment un groupement.

En effet, toute composition des relations co-univoques données entre trois individus quelconques α, β et γ est bien déterminée si l'on applique respectivement les règles du groupement des relations asymétriques (théorème IV) et celles du groupement des relations symétriques (théorème X). Si $\overset{m}{\longleftrightarrow}$ est une relation symétrique quelconque et $\downarrow g$ une relation asymétrique quelconque d'un système co-univoque (par exemple l'une de parenté en une même génération et l'autre de filiation, mais en excluant les parentés par alliance). On a d'abord les conversions suivantes, dues au fait que la multiplication co-univoque n'est pas commutative:

$$(\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow g\beta) = (\beta \uparrow g \overset{m}{\longleftrightarrow} \alpha) \qquad (1)$$

et

$$(\alpha \downarrow g \overset{m}{\longleftrightarrow} \beta) = (\beta \overset{m}{\longleftrightarrow} \uparrow g\alpha) .$$

Par exemple $\overset{0'}{\longleftrightarrow} \downarrow a$ = oncle (frère du père) et $\uparrow a \overset{0'}{\longleftrightarrow}$ = neveu (fils du frère).

Ensuite, la multiplication étant co-univoque et non pas bi-univoque, on a la transformation fondamentale:

$$(\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow g\beta) = (\alpha \downarrow g \overset{mg}{\longleftrightarrow} \beta) \qquad (2)$$

ou en vertu de (1): $(\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow g\beta = (\beta \overset{mg}{\longleftrightarrow} \uparrow g\alpha)$.

La multiplication $(m \times g)$ s'obtient en considérant la suite de relations g comme prolongeant additivement la suite m: si m est une relation primaire, alors mg est la relation primaire

d'ensemble, par exemple $a + b = c$, parce que b $(= a + a')$ prolonge a sous la forme $+ a' + b'$; et si m est secondaire, alors mg est la dernière relation secondaire de la suite additive $m + g$, par exemple $a' + b = c'$, parce que les deux relations élémentaires de b, soit a et a', prolongent alors a' sous la forme $(+ b' + c')$.

En effet, si $\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \alpha_2$, on a, par définition, $\alpha_0 \downarrow m\, \alpha$ et $\alpha_0 \downarrow m\, \alpha_2$. D'où, pour $\alpha \downarrow g\, \beta_2$ et $\alpha_2 \downarrow g\, \beta$, les relations $\alpha_0 \downarrow^{g+m} \beta_2$ et $\alpha_0 \downarrow^{g+m} \beta$ et, par conséquent, les relations $\beta_2 \overset{g+m}{\longleftrightarrow} \beta$ et $\alpha \downarrow g \overset{g+m}{\longleftrightarrow} \beta$. Nous pouvons alors, pour abréger, écrire $\downarrow g \overset{gm}{\longleftrightarrow}$ le produit de la multiplication de $\alpha \downarrow g\, \beta_2$ par $\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow g\, \beta$. (Exemple: si α est le frère du père de β, soit $(\alpha \overset{0'}{\longleftrightarrow} \downarrow a\, \beta)$, alors il est le père du cousin-germain (s'il existe) de β, soit $\alpha \downarrow a \overset{a'}{\longleftrightarrow} \beta$).

On a inversement:

$$(\alpha \downarrow g \overset{m}{\longleftrightarrow} \beta) = (\alpha \overset{m:g}{\longleftrightarrow} \downarrow g\beta) \qquad (3)$$

ou, en vertu de (1):

$$(\alpha \downarrow g \overset{m}{\longleftrightarrow} \beta) = (\beta \uparrow g \overset{m:g}{\longleftrightarrow} \alpha)$$

la suite additive g étant alors à soustraire de la suite additive m.

Et, si $m \leqslant g$, on a naturellement:

$$(\alpha \downarrow g \overset{m}{\longleftrightarrow} \beta) = (\alpha \downarrow g\beta)\ . \qquad (3\,bis)$$

Cela posé, nous pouvons tirer de (3 *bis*) la composition:

$$\text{Si } m \leqslant g, \text{ alors } (\alpha \downarrow g\beta) \times (\beta \overset{m}{\longleftrightarrow} \gamma) = (\alpha \downarrow g\gamma) \qquad (4)$$

qui définit la « famille d'ordre g de α », soit l'ensemble de ses descendants ne dépassant pas, pour chaque génération $a \ldots g$, la parenté $m = g$. Si $m > g$, on a, en vertu de (3):

$$(\alpha \downarrow g\, \beta) \times (\beta \overset{m}{\longleftrightarrow} \gamma) = (\alpha \overset{m:g}{\longleftrightarrow} \downarrow g\gamma)\ . \qquad (4\,bis)$$

On déduit, d'autre part, de (2), (3) et (4):

$$(\alpha \downarrow g\, \beta) \times (\beta \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow g'\, \gamma) = (\alpha \overset{m:g}{\longleftrightarrow} \downarrow g + g'\, \gamma) \qquad (5)$$

$$\text{ou} \quad = (\alpha \downarrow g + g' \overset{mg}{\longleftrightarrow} \gamma) \quad \text{et si} \quad m \leqslant g \quad \text{alors} \quad (\alpha \downarrow g + g'\, \gamma)\ .$$

De même:

$$(\alpha \downarrow g \overset{m}{\longleftrightarrow} \beta) \times (\beta \times \downarrow g' \gamma) = (\alpha \overset{m:g}{\longleftrightarrow} \downarrow g + g'\gamma) \qquad (6)$$

ou $\quad = (\alpha \downarrow g + g' \overset{mg}{\longleftrightarrow} \gamma) \quad$ et si $m \leqslant g$ alors $(\alpha \downarrow g + g'\gamma)$.

D'où, par composition de (5) et de (6):

$$(\alpha \downarrow g \overset{m}{\longleftrightarrow} \beta) + (\beta \downarrow g' \overset{m'}{\longleftrightarrow} \gamma) = (\alpha \downarrow g + g' \gamma) \qquad (7)$$

si $m \leqslant g$ et si $m' \leqslant (g + g')$.

Si ces deux conditions ne sont pas remplies simultanément, on a:

si $m' < mg'$ alors $(\alpha \downarrow g + g' \overset{mg'}{\longleftrightarrow} \gamma)$

si $m' > mg'$ alors $(\alpha \downarrow g + g' \overset{m'}{\longleftrightarrow} \gamma)$

et si $m' = mg'$ alors $(\alpha \downarrow g + g' \gamma)$.

De même, on calcule:

$$(\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow g \beta) \times (\beta \overset{m'}{\longleftrightarrow} \downarrow g' \gamma) = \qquad (8)$$

si $m' < mg$ alors $(\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow g + g' \gamma)$

si $m' > mg$ alors $(\alpha \overset{m':g}{\longleftrightarrow} \downarrow g + g' \gamma)$

et si $m' = mg$ alors $(\alpha \overset{m'!}{\longleftrightarrow} \downarrow g + g' \gamma)$,

où $\overset{m!}{\longleftrightarrow}$ signifie la première relation primaire englobant m si m est d'ordre secondaire (voir dans le groupement des relations symétriques la composition de deux altérités positives de même ordre, par exemple $a' + a' = b$).

Telles sont (4 à 8) les compositions élémentaires du groupement. Il est facile, ensuite, en associant de toutes les manières les diverses relations en jeu, d'établir le tableau des compositions possibles, qui sont très nombreuses mais se déduisent toutes des transformations fondamentales (2) et (3) en appliquant simultanément aux relations asymétriques et symétriques en jeu leurs règles respectives d'addition.

Lorsque les relations asymétriques sont inverses, le produit reposera alors naturellement sur leur soustraction. Par exemple:

$$(\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \downarrow g\,\beta) \times (\beta \uparrow g' \overset{m'}{\longleftrightarrow} \gamma) = \tag{9}$$

$$\text{pour } g > g' \begin{cases} \text{si } (g - g') > (m' - m) \text{ alors } (\alpha \downarrow g - g' \overset{m(g-g')}{\longleftrightarrow} \gamma) \\ \text{si } (g - g') < (m' - m) \text{ alors } (\alpha \downarrow g - g' \overset{m'}{\longleftrightarrow} \gamma) \\ \text{si } (g - g') = (m' - m) \text{ alors } (\alpha \downarrow g - g' \overset{m\,!}{\longleftrightarrow} \gamma) \end{cases}$$

$$\text{pour } g < g' \begin{cases} \text{si } (g' - g) < (m - m') \text{ alors } (\alpha \uparrow g' - g \overset{m:(g'-g)}{\longleftrightarrow} \gamma) \\ \text{si } (g' - g) > (m - m') \text{ alors } (\alpha \uparrow g' - g \overset{m'}{\longleftrightarrow} \gamma) \\ \text{si } (g' - g) = (m - m') \text{ alors } (\alpha \uparrow g' - g' \overset{m\,!}{\longleftrightarrow} \gamma) \end{cases}$$

$$\text{pour } g = g' \begin{cases} \text{si } m > m' \text{ alors } (\alpha \overset{m}{\longleftrightarrow} \gamma) \\ \text{si } m < m' \text{ alors } (\alpha \overset{m'}{\longleftrightarrow} \gamma) \\ \text{si } m = m' \text{ alors } (\alpha \overset{m\,!}{\longleftrightarrow} \gamma)\ . \end{cases}$$

Toute suite homogène de ces compositions sera en outre associative puisque les suites de relations symétriques et asymétriques dont elles sont formées le sont respectivement et que leur produit est toujours déterminé. Par exemple si nous appellons a l'équation $(\overset{a'}{\longleftrightarrow} \times \downarrow c = \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow c)$, a' l'équation $(\uparrow d \times \overset{b'}{\longleftrightarrow} = \uparrow d \overset{b'}{\longleftrightarrow})$ et a'' l'équation $(\downarrow b \times \overset{a'}{\longleftrightarrow} = \downarrow b \overset{a'}{\longleftrightarrow})$, on a $(a + a') + a'' = a + (a' + a'')$. En effet:

$$(\alpha \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow c\,\beta) \times (\beta \uparrow d \overset{b'}{\longleftrightarrow} \gamma) \times (\gamma \downarrow b \overset{a'}{\longleftrightarrow} \delta) = \tag{10}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (\alpha \uparrow a \overset{b'}{\longleftrightarrow} \gamma) \times (\gamma \downarrow b \overset{a'}{\longleftrightarrow} \delta) = (\alpha \downarrow a \overset{d'}{\longleftrightarrow} \delta) \\ (\alpha \overset{a'}{\longleftrightarrow} \downarrow c\,\beta) \times (\beta \uparrow b \overset{d'}{\longleftrightarrow} \delta) = (\alpha \downarrow a \overset{d'}{\longleftrightarrow} \delta) \end{array} \right\}.$$

La composition, la réversibilité et l'associativité du système de ces équations en font donc un groupement, l'existence des identiques spéciales et de l'identique générale [1] étant évidente.

[1] On se rappelle (Jean PIAGET, *Les groupements de la multiplication bi-univoque des classes et de celle des relations*. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève. *58*, 154, 1941) que l'identique générale de la multiplication des classes est $\times$ B : B = $\times$ Z parce qu'abstraire la classe B d'elle-même consiste à la supprimer en tant que système d'emboîtements (A + A′ = B), tout en laissant ses éléments α, β, ... dans la classe générale Z. De même abstraire une suite de relations $\alpha \downarrow r\,\rho$ d'elle-même consistera à supprimer les relations entre les termes α ... ρ, tout en conservant ces termes comme tels, en tant que termes de toutes les autres relations possibles. Donc $\times\ (\alpha \downarrow r\,\rho) : (\alpha \downarrow r\,\rho) = (\alpha \downarrow 0\,\rho)$.