Sur les rotations avec frottement d'une superposition de sphèresconcentriques

Autor(en): **Wavre, Rolin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **23 (1941)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741224

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

8. BIEDA, F., *Remarques sur la nomenclature et la classification de certaines espèces de Nummulites*. Première partie, Bull. Acad. Pol. Sc. Varsovie, 1930.
9. BARBIER, R., *Sur la présence de calcaires à Rosalines dans les écailles de Saint-Florent (Corse)*. C.R.S.S.G.F., fasc. 5, p. 70, 1938.
10. COLLET, L.-W., *La Corse, Elbe et l'Apennin du point de vue tectonique*. B.S.G.F., t. VIII, fasc. 9, p. 737. 1938.
11. FLANDIN, J., *Contribution à l'étude paléontologique du Nummulitique algérien*. Mat. Carte géol. Alg., t. pal., nº 8, 1938.
12. ARNI, P., *Über die Nummuliten und die Gliederung des Untereocäns*. Eclog. geol. Helv., vol. 32, nº 1, 1939.
13. GINDRAT, H., *Le Crétacé supérieur dans les klippes d'Oletta-Patrimonio (Corse)*. C. R. Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *56*, 74. 1939.

Rolin Wavre. — *Sur les rotations avec frottement d'une superposition de sphères concentriques.*

Plusieurs questions de géologie dépendent de la mécanique, et pourront constituer un chapitre spécial de géodynamique. Il en est ainsi en particulier de la position du pôle au cours des époques anciennes. Dans le but de préciser l'aspect mathématique du chapitre en question, il faut évidemment faire des hypothèses simplificatrices. En 1925 nous avons étudié l'hypothèse autrefois émise par Marcel Bertrand d'un noyau solide et d'une écorce solide et calculé le mouvement des axes de rotation des deux corps en supposant un frottement sur la surface sphérique de séparation.

Nous avons étudié depuis quelque temps des hypothèses moins simples et nous voudrions résumer ici succinctement ces hypothèses et l'aspect mathématique des équations qui les traduisent.

Le frottement sur les surfaces de séparation entre les couches solides sera pris proportionnel à la vitesse relative des matières en contact mais la stratification pourra être formée:

1) d'un nombre fini n de couches superposées;
2) d'une suite infinie de couches d'épaisseurs non nulles;
3) d'une infinité de couches, chacune infiniment mince;
4) d'une superposition de couches relevant des cas précédents réunis.

Dans ces différents cas, les couches peuvent être supposées sphériques et concentriques, ou planes et indéfinies; les équations du mouvement ne diffèrent que par les valeurs de certains coefficients. Elles ont la même forme algébrique.

Dans le cas 1) le problème relève de l'algèbre. Dans le cas 2) des déterminants infinis et la théorie des formes quadratiques complètement continues, si une certaine série S converge. 3) se traite par une certaine équation aux dérivées partielles (voir la note ci-dessous de M. Letestu). Enfin pour 4) il y a avantage à introduire une équation intégrale où la sommation est faite au sens de Stieltjes.

Nous donnerons ici un bref aperçu des cas 1) et 2) ainsi que la série S dont la convergence rend légitime les formules employées. On trouvera, en plus, dans la note de M. Letestu ses intéressantes recherches à partir des équations de Navier des fluides visqueux.

Les équations revêtent pour une suite discrète de couches la forme:

$$\mathcal{J}_i \frac{dp_i}{dt} = \Gamma_{i-1}(p_{i-1} - p_i) + \Gamma_i(p_{i+1} - p_i) \qquad i = 1, 2, 3 \ldots \begin{cases} n \\ \infty \end{cases} . \tag{1}$$

Pour les sphères $\mathcal{J}_i$ est le moment d'inertie de la $i^{\text{ième}}$ couche, les p_i sont les projections sur un axe fixe de la rotation instantanée de cette couche, les Γ_i sont des constantes. La méthode classique consiste à poser

$$p_i = \alpha_i(r)\, e^{rt} ,$$

on démontre qu'il existe n racines réelles de l'équation caractéristique

$$0 = r_1 > r_2 > \ldots > r_n .$$

Les solutions sont alors de la forme

$$p = \sum_{q=1}^{n} C_q\, \alpha_i(r_q)\, e^{r_q t} . \tag{2}$$

On a des relations d'orthogonalité

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}_i \, \alpha_i(r_q) \, \alpha_i(r_{q'}) = \begin{cases} f_q & \text{si} \quad q' = q \\ 0 & \text{si} \quad q' \neq q \end{cases}$$

de sorte que les C_q sont déterminés à partir des conditions initiales p_i^0

$$f_q \, C_q = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{J}_i \, p_i^0 \, \alpha_i(r_q) \; . \tag{3}$$

Donnons maintenant quelques indications sommaires sur une condition pour que cette méthode se généralise au cas où n est infini, cas d'une infinité d'équations et d'une infinité d'inconnues p_i.

Il y a intérêt à introduire les quantités

$$X_i = \sqrt{K_i} \, (\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

et à mettre le système sous une forme matricielle. La convergence de la série suivante représente la condition nécessaire et suffisante dans le cas d'une infinité de couches pour la validité de cette méthode matricielle

$$S = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_{i,\infty}}{\Gamma_{i-1}} \qquad \text{avec} \quad \mathcal{J}_{i,\infty} = \mathcal{J}_i + \mathcal{J}_{i+1} + \mathcal{J}_{i+2} + \ldots \; .$$

C'est aussi une condition suffisante pour qu'une certaine forme quadratique soit « complètement continue » et également la condition nécessaire et suffisante pour qu'un déterminant infini $| r - a |$ converge.

Si la somme S existe, il y a une infinité de racines r_q tendant vers $-\infty$, les $\alpha_i(r_q)$ tendent vers des quantités finies $\alpha(r_q)$ et la solution est donnée par les formules (2) et (3) sous la seule réserve que les p_i^0 soient bornés. Les séries (2) et (3) pour n infini sont alors convergentes.

Ces différents résultats seront développés dans un article consacré à la partie mathématique de cette recherche.

Il convient de remarquer que les mouvements relatifs tendent à durer d'autant plus qu'il y aura plus de surfaces de glissement. Une petite étude facile montre même qu'il peut y avoir une certaine indépendance si deux couches sont séparées par une infinité d'autres.

Prenons par exemple des couches parallèles de masse $m_i = \frac{2}{(i+1)(i-1)}$ et de coefficients de frottement $R_0 = R_1 = R_2 = \ldots = 1$. La couche supérieure peut être animée d'une vitesse $V_0 = e^t$ de plus en plus grande, et cependant les vitesses V_i des autres couches tendent vers zéro, quel que soit t avec $\frac{1}{i}$. La couche limite inférieure ne serait pas entraînée par la couche supérieure.

Serge Letestu. — *Sur les mouvements d'un fluide visqueux par sphères concentriques.*

Envisageons un nombre infini de couches sphériques concentriques infiniment minces. C'est un cas-limite du problème traité dans la note précédente par M. Wavre.

Nous appellerons r le rayon d'une surface de séparation Σ, Λ le moment résultant des forces de frottement sur Σ. L'axe instantané de rotation p est fonction de r, t, et la rotation relative de deux couches est $\frac{\partial p}{\partial r} dr$; Λ est alors une fonction de r et $\frac{\partial p}{\partial r}$; $d\mathcal{J}$ est le moment d'inertie d'une couche par rapport à un diamètre; il dépend de r.

Les équations d'Euler pour les rotations s'écrivent

$$\frac{d\mathcal{J}}{dr}\frac{\partial p_h}{\partial t} = \frac{\partial \Lambda_h}{\partial r} + \frac{\partial \Lambda_h}{\partial\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}. \qquad (1)$$