Solutions invariantes Dx2 (x,y) de l'équation de Schroedinger relativiste

Autor(en): **Stueckelberg, Ernest-C.-G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **24 (1942)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741754

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Solutions invariantes* $D_{\varkappa^2}(x, y)$ *de l'équation de Schroedinger relativiste.*

La théorie des champs quantifiés fait appel à une fonction $D(x, y)$ [1], qui satisfait à l'équation de Schroedinger: $\varkappa = m/h$, $D_\mu(x) = \partial/\partial x^\mu - j(e/h)\,\Phi_\mu(x)$; $j^2 = -1$; $F(j)^* = F(-j)$

$$(D^*_\mu(x)\,D^{\mu *}(x) - \varkappa^2)\,D_{\varkappa^2}(x, y) = (D_\mu(y)\,D^\mu(y) - \varkappa^2)\,D_{\varkappa^2}(x, y) = 0 \tag{1}$$

En l'absence des forces, les solutions invariantes ne peuvent dépendre que de R^2. Dans la note précédente [2], nous avons démontré qu'il n'existe que deux fonctions de ce type, qui disparaissent pour $R^2 \to \infty$, soit

$$D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y) = -D^{(0)}_{\varkappa^2}(y, x) \;; \qquad D^{(1)}_{\varkappa^2}(x, y) = D^{(1)}_{\varkappa^2}(y, x) \;. \tag{2}$$

Nous allons démontrer que si $\Phi_\mu \neq 0$, il existe une série de fonctions complexes $D^{(n)}_{\varkappa^2}(x, y)$ ayant la symétrie

$$D^{(n)}_{\varkappa^2}(x, y) = j^{n+1}\,D^{(n)}_{\varkappa^2}(y, x)^* \;. \tag{3}$$

La solution $D^{(0)}(x, y)$ est l'analogue spatiotemporelle de la *fonction de Green:* Une solution quelconque $\Psi_{\varkappa^2}(y)$ de l'équation de Schroedinger (1) est déterminée en un événement y, si sa valeur et la valeur de sa dérivée normale sont connues sur un hyperplan $x = (\vec{x},\ x^4 = \text{const.})$.

$$\Psi_{\varkappa^2}(y) = -\frac{1}{4\pi}\int (dx)^3 \left\{ \left(D^{4*}(x)\,D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y)\right)\Psi_{\varkappa^2}(x) - D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y)\left(D^4\Psi_{\varkappa^2}(x)\right)\right\} . \tag{4}$$

La fonction $D^{(0)}_{\varkappa^2}$ doit donc avoir la propriété

$$D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y) = 0 \;; \qquad \frac{\partial D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y)}{\partial x^4} = -4\pi\,\delta(\vec{x} - \vec{y})$$
$$\text{pour} \quad x^4 = y^4 \tag{5}$$

[1] *Cf.* p. ex. PAULI. *Rapport du Congrès Solvay* 1939, paru dans Phys. Rev. *58*, 716, 1940 et Rev. Mod. Phys. *13*, 203, 1941.

[2] E. C. G. STUECKELBERG. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *59*, 49, 1942.

parce que, sur l'hyperplan $x = x^4$, $\Psi_{\varkappa^2}(y)$ et $\partial\Psi_{\varkappa^2}/\partial y^4$ peuvent être donnés arbitrairement.

Pour démontrer (4), nous cherchons l'ensemble des fonctions propres $S(x/\mu)$ de l'équation de Schroedinger, qui appartiennent à des valeurs propres de la masse $\varkappa^2(\mu)$ et qui sont dénombrées par un indice μ (continu ou discontinu). Soit $\int (d\mu)^4$ la sommation sur l'ensemble invariant de cet indice, et $\int (dx)^4 = \int (dx)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx^4$ la sommation sur tout l'espace-temps. Alors ces fonctions peuvent être normalisées à

$$\int (dx)^4 S^*(x/\mu)\, S(x/\mu') = \delta(\mu/\mu') \;;$$

$$\int (d\mu')^4 S^*(x/\mu')\, S(y/\mu') = \delta(x/y) \;. \tag{6}$$

le symbole $\delta(a/b)$ signifie que $\int (db)^4\, \delta(a/b)\, f(a) = f(b)$. A l'aide de ces fonctions, on forme la matrice

$$\varepsilon(\mu/\mu') = 2\pi j\, \delta\big(\varkappa^2(\mu) - \varkappa^2(\mu')\big)$$

$$\int (dx)^3 \Big\{ \big(D^4 S(x/\mu)\big)^* S(x/\mu') - S(x/\mu)^*\, D^4 S(x/\mu') \Big\} \tag{7}$$

qui, étant hermitique, peut toujours être mise en forme diagonale $\varepsilon(\mu/\mu') = \varepsilon(\mu)\, \delta(\mu/\mu')$. Les fonctions $D^{(n)}$ sont définies par

$$D^{(n)}_{\varkappa^2}(x, y) = 2(2\pi)^2 \int (d\mu)^4\, \delta\big(\varkappa^2(\mu) - \varkappa^2\big)$$

$$\big(j\,\varepsilon(\mu)\big)^{n-1} S(x/\mu)^*\, S(y/\mu) \;. \tag{8}$$

La relation (4) est obtenue pour $\Psi_{\varkappa^2(\mu')}(y) = A(\mu')\, S(y/\mu')$ si l'on multiplie (7) avec $A(\mu')\, \varepsilon(\mu)^{-1}\, S(y/\mu)$ et si on somme sur $(d\mu)^4$. Elle est vraie d'abord pour tout $A(\mu')\, S(y/\mu')$ appartenant à la masse $\varkappa^2(\mu')$. A cause de la linéarité de (4), ceci est vrai pour toute solution $\Psi_{\varkappa^2}(y)$ de l'équation de Schroedinger avec $\varkappa^2 = \varkappa^2(\mu')$. La solution $D^{(1)}$ permet de définir à partir d'une fonction $\Psi(x)$ quelconque des fonctions

$$\Psi_{\varkappa^2}(y) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int (dx)^4\, D^{(1)}_{\varkappa^2}(x, y)\, \Psi(x) \tag{9}$$

qui satisfont à (1) et ont la propriété que

$$\Psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\varkappa^2)\, \Psi_{\varkappa^2}(y) \quad . \tag{10}$$

Pour démontrer ce théorème, on exprime d'abord $\Psi(x)$ par la somme

$$\Psi(x) = \int (d\mu')^4\, A(\mu')\, S(x/\mu') \tag{11}$$

et substitue cette expression en (9) tenant compte de la définition (8) de $D^{(1)}$. En vertu de la première relation d'orthogonalité (6), on trouve

$$\Psi_{\varkappa^2}(y) = \int (d\mu)^4\, \delta\left(\varkappa(\mu)^2 - \varkappa^2\right) A(\mu)\, S(y/\mu) \tag{12}$$

qui, à son tour, satisfait à (10). En l'absence des Φ_μ, on choisit les $S(x/k) = (2\pi)^{-2} \exp\,(j k_\alpha x^\alpha)$ et l'on retrouve $D^{(n)} = D^{(0)}$ ou $D^{(1)}$ de la communication précédente suivant que n est pair ou impair.

L'application de ces fonctions montrera une nouvelle analogie entre la mécanique du point matériel et celle des champs quantifiés complexes [1].

[1] E. C. G. Stueckelberg. Helv. Phys. Acta, *14*, 321 et 588, 1941; *15*, 588, 1942, et un article en préparation.

* $\delta(a)$ et $\delta(\vec{x})$ sont les symboles de Dirac habituels, qui sont les propriétés

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da\, \delta(a-b)\, f(a) = f(b) \;; \qquad \int (dx)^3\, \delta(\vec{x}-\vec{y})\, f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \;.$$