La décomposition spectrale des opérateurs hermitiens

Autor(en): **Wavre, Rolin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **24 (1942)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741771

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

diminuent progressivement. La souche est pourtant identique, de même que son milieu de conservation. Les conditions culturales requises, suffisantes au début, ne le sont plus et les exigences du microorganisme semblent avoir augmenté. Pour parer à cette « dégénérescence », il eût été facile de repiquer notre souche sur un milieu riche à base de peptones. La souche serait alors devenue pléomorphe et nous n'aurions pu inoculer nos milieux d'expérience avec des aleuries. La souche utilisée devra être régénérée par un passage sur l'animal. Il serait d'un grand intérêt d'établir en quoi consiste cette dégénérescence et si elle n'est pas liée à des pertes nouvelles et progressives de pouvoirs de synthèse.

Nous exprimons notre reconnaissance au département scientifique des établissements F. Hoffmann-La Roche & Co. pour son appui et pour les produits qu'il nous a fait parvenir. Nous exprimons également nos remerciements à la Fondation de Giacomi pour l'aide accordée à l'un de nous.

Université de Berne.
Institut et Jardin botaniques.

Rolin Wavre. — *La décomposition spectrale des opérateurs hermitiens.*

Dans une note précédente (séance du 19 février 1942) nous avons introduit les itérés d'un opérateur hermitien $A(f)$ supposé défini pour tout élément f d'un espace E isomorphe à l'espace d'Hilbert et à l'espace fonctionnel.

Nous poserons

$$l_0 l_1 \ldots l_r g_r = A^r(g_0) \;;$$

$$l_0 = \| g_0 \| \,, \qquad \| g_r \| = 1 \,, \qquad r = 1, 2, \ldots \,.$$

On a

$$0 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \,, \qquad l = \lim l_i \,,$$

$$\varpi = l_0 \frac{l_1}{l} \frac{l_2}{l} \ldots \qquad 0 \leqslant \varpi(g_0) \leqslant l_0 \,.$$

Si l'opérateur est complètement continu l'on a dans tout E, $\varpi \neq 0$; mais la condition $\varpi \neq 0$ est plus générale et répond

à des opérateurs que j'appellerai réguliers, bien qu'ils recouvrent une partie de la théorie des équations intégrales singulières. Les valeurs propres qui lui sont attachées et prises en valeur absolue forment un ensemble bien ordonné, donc numérotable au moyen des ordinaux transfinis; nous appellerions volontier, pour cette raison, ces opérateurs des opérateurs transfinis. Ils n'ont cependant pas de spectre continu, celui-ci ne pouvant se présenter que si $\varpi = 0$.

Voici quelques lemmes utiles pour la suite:

I. Si $\varpi(g_0) \neq 0$ les itérés g_{2r} convergent fortement vers une limite g de E.
Si $\varpi(g_0) = 0$ les itérés g_r convergent faiblement vers l'élément zéro.

II. Si $f = \varphi + \psi$ les trois nombres l liés à f, φ et ψ sont tels qu'aucun n'est supérieur aux deux autres.

III. Une parenthèse indiquant le produit scalaire, on a: $(g, g_0) = \varpi(g_0)$ et $g_0 - \varpi(g_0)\, g$ est orthogonal à g.

IV. Si $\varpi(g_0) \neq 0$, la limite g est solution non nulle (vecteur propre) de l'équation homogène

$$A^2(g) = l^2 g \ .$$

V. Si g est un vecteur propre quelconque de E et si h_0 est orthogonal à g, tous les itérés h_r et la limite forte ou faible h est orthogonale à g.

VI. Soient N_i^2 une suite de valeurs propres distinctes et ψ_i les vecteurs propres correspondants. Posons:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i \ , \quad \sum |a_i|^2 \text{ convergente } ;$$

alors $l(\varphi) =$ borne supérieure des $|N_i|$. Si la borne n'est pas atteinte $\varpi(\varphi) = 0$.

VII. Il résulte de VI que pour un opérateur régulier ($\varpi \neq 0$), les valeurs propres peuvent être « bien ordonnées », par ordre de grandeur. Elles forment donc une suite numérotable au moyen des ordinaux transfinis de la classe II.

Ces lemmes précisés, partons d'un élément $f_0^0 = f$ de E, formons $l(f)$ et $\varpi(f)$ et la fonction limite f_0 et posons:

$$f = f_0^0 = \varpi(f_0^0) f^0 + f_0^1 \qquad (1)$$

puis d'une manière générale, ce qui définit de nouveaux restes $f_0^{\alpha+1}$:

$$f_0^\alpha = \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + f_0^{\alpha+1} . \qquad (2)$$

En vertu du lemme V les f^α, vecteurs propres, seront orthogonaux entre eux.

En vertu du lemme II on a: $l^{\alpha+1} \leqslant l^\alpha$ car l^α est le l du premier membre de (2) et du premier terme du second. Si l'égalité était vraie on aurait en itérant par A les deux membres de (2):

$$\varpi(f_0^\alpha) f^\alpha = \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + \varpi(f_0^{\alpha+1}) f^{\alpha+1} ;$$

ce qui n'est possible que si l_0 ou l_1 de $f_0^{\alpha+1}$ est nul. L'élément $f_0^{\alpha+1}$ serait donc soit l'élément zéro, soit un antécédent de zéro. Dans ce cas nous arrêterions le procédé à l'équation faisant apparaître un tel élément. Nous poursuivons au contraire si l'on a

$$l^{\alpha+1} < l^\alpha .$$

Les l^α diminuent donc constamment. Le procédé sera poursuivi indéfiniment ou même transfiniment jusqu'à

$$\lim l^\alpha = 0 .$$

Comme on a $l_1 < l$ on aura également $\lim l_1(f_0^\alpha) = 0$.

On aura donc

$$f = \sum_\alpha \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + h , \qquad A^2(f) = \sum_\alpha l^{\alpha^2} \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha ; \qquad (1)$$

si le procédé a été suspendu h est zéro ou un antécédent de zéro: $A(h) = 0$.

Si l'opérateur A^r, pour un entier r, est complètement continu, on a déjà $\lim l^n = 0$, le procédé ne nécessite pas l'emploi des ordinaux transfinis, il permet de retrouver le théorème d'Hilbert-Schmidt de la théorie classique des équations intégrales.

Pour les opérateurs réguliers, le procédé transfini peut être nécessaire dans de nombreux cas. La seule difficulté réside alors dans l'obtention d'un élément f^β qui n'a pas de précédent immédiat (nombre de deuxième espèce). Nous écrivons alors:

$$f = \sum_{\alpha<\beta} \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + f_0^\beta , \qquad \lim l(f_0^\alpha) = \lambda , \qquad l(f_0^\alpha) > \lambda .$$

Il suffit de montrer que $l(f_0^\beta) \leqslant \lambda$; si non $l(f_0^\beta) = \lambda + k$, $k > 0$.

Il existerait, alors, un ordinal γ tel que

$$l(f_0^\gamma) < \lambda + \frac{k}{2} \qquad \text{et} \qquad f_0^\gamma = \sum_{\gamma\leqq\alpha<\beta} \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + f_0^\beta ;$$

mais alors en vertu des lemmes II et VI:

$$l(f_0^\beta) \leqslant l(f_0^\gamma) \leqslant \lambda + \frac{k}{2}$$

ce qui est contradictoire. Les l s'abaissent donc toujours.

D'où le théorème suivant: *La décomposition spectrale d'un élément peut se faire pour tout opérateur hermitien régulier* ($\varpi \neq 0$) *par simple itération à partir de cet élément et des restes successifs.* Si l'opérateur est complètement continu, les restes successifs peuvent être numérotés au moyen des entiers ordinaires. S'il est régulier ($\varpi \neq 0$) cette numérotation exige un ensemble dénombrable d'ordinaux transfinis. En plus ce procédé n'exige pas la détermination de tous les éléments propres (fonction fondamentale) mais seulement de ceux qui interviennent dans la décomposition de l'élément donné.

M. J.-P. Vigier a étendu la méthode exposée dans notre note précédente au cas des opérateurs hermitiens gauches et retrouve ainsi les résultats relatifs au noyau symétrique gauche, ou aux matrices antisymétriques. Il a en plus reconstruit par cette méthode le théorème d'Hilbert-Schmidt pour un noyau continu quelconque, en considérant les opérateurs hermitiens AA* et A*A.

Nous espérons qu'il pourra exposer ses résultats prochainement.