Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 24 (1942)

Artikel: La décomposition spectrale des opérateurs hermitiens
Autor: Wavre, Rolin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741771

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

diminuent progressivement. La souche est pourtant identique, de même que son milieu de conservation. Les conditions culturales requises, suffisantes au début, ne le sont plus et les exigences du microorganisme semblent avoir augmenté. Pour parer à cette « dégénérescence », il eût été facile de repiquer notre souche sur un milieu riche à base de peptones. La souche serait alors devenue pléomorphe et nous n'aurions pu inoculer nos milieux d'expérience avec des aleuries. La souche utilisée devra être régénérée par un passage sur l'animal. Il serait d'un grand intérêt d'établir en quoi consiste cette dégénérescence et si elle n'est pas liée à des pertes nouvelles et progressives de pouvoirs de synthèse.

Nous exprimons notre reconnaissance au département scientifique des établissements F. Hoffmann-La Roche & Co. pour son appui et pour les produits qu'il nous a fait parvenir. Nous exprimons également nos remerciements à la Fondation de Giacomi pour l'aide accordée à l'un de nous.

Université de Berne.
Institut et Jardin botaniques.

Rolin Wavre. — *La décomposition spectrale des opérateurs hermitiens.*

Dans une note précédente (séance du 19 février 1942) nous avons introduit les itérés d'un opérateur hermitien $A(f)$ supposé défini pour tout élément f d'un espace E isomorphe à l'espace d'Hilbert et à l'espace fonctionnel.

Nous poserons

$$l_0 l_1 \ldots l_r g_r = A^r(g_0) \;;$$

$$l_0 = \| g_0 \| \,, \qquad \| g_r \| = 1 \,, \qquad r = 1, 2, \ldots \,.$$

On a

$$0 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \,, \qquad l = \lim l_i \,,$$

$$\varpi = l_0 \frac{l_1}{l} \frac{l_2}{l} \ldots \qquad 0 \leqslant \varpi(g_0) \leqslant l_0 \,.$$

Si l'opérateur est complètement continu l'on a dans tout E, $\varpi \neq 0$; mais la condition $\varpi \neq 0$ est plus générale et répond

à des opérateurs que j'appellerai réguliers, bien qu'ils recouvrent une partie de la théorie des équations intégrales singulières. Les valeurs propres qui lui sont attachées et prises en valeur absolue forment un ensemble bien ordonné, donc numérotable au moyen des ordinaux transfinis; nous appellerions volontier, pour cette raison, ces opérateurs des opérateurs transfinis. Ils n'ont cependant pas de spectre continu, celui-ci ne pouvant se présenter que si $\varpi = 0$.

Voici quelques lemmes utiles pour la suite:

I. Si $\varpi(g_0) \neq 0$ les itérés g_{2r} convergent fortement vers une limite g de E.
Si $\varpi(g_0) = 0$ les itérés g_r convergent faiblement vers l'élément zéro.

II. Si $f = \varphi + \psi$ les trois nombres l liés à f, φ et ψ sont tels qu'aucun n'est supérieur aux deux autres.

III. Une parenthèse indiquant le produit scalaire, on a: $(g, g_0) = \varpi(g_0)$ et $g_0 - \varpi(g_0)\, g$ est orthogonal à g.

IV. Si $\varpi(g_0) \neq 0$, la limite g est solution non nulle (vecteur propre) de l'équation homogène

$$A^2(g) = l^2 g \ .$$

V. Si g est un vecteur propre quelconque de E et si h_0 est orthogonal à g, tous les itérés h_r et la limite forte ou faible h est orthogonale à g.

VI. Soient N_i^2 une suite de valeurs propres distinctes et ψ_i les vecteurs propres correspondants. Posons:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i \ , \quad \sum |a_i|^2 \text{ convergente } ;$$

alors $l(\varphi) =$ borne supérieure des $|N_i|$. Si la borne n'est pas atteinte $\varpi(\varphi) = 0$.

VII. Il résulte de VI que pour un opérateur régulier ($\varpi \neq 0$), les valeurs propres peuvent être « bien ordonnées », par ordre de grandeur. Elles forment donc une suite numérotable au moyen des ordinaux transfinis de la classe II.

Ces lemmes précisés, partons d'un élément $f_0^0 = f$ de E, formons $l(f)$ et $\varpi(f)$ et la fonction limite f_0 et posons:

$$f = f_0^0 = \varpi(f_0^0) f^0 + f_0^1 \qquad (1)$$

puis d'une manière générale, ce qui définit de nouveaux restes $f_0^{\alpha+1}$:

$$f_0^\alpha = \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + f_0^{\alpha+1} . \qquad (2)$$

En vertu du lemme V les f^α, vecteurs propres, seront orthogonaux entre eux.

En vertu du lemme II on a: $l^{\alpha+1} \leqslant l^\alpha$ car l^α est le l du premier membre de (2) et du premier terme du second. Si l'égalité était vraie on aurait en itérant par A les deux membres de (2):

$$\varpi(f_0^\alpha) f^\alpha = \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + \varpi(f_0^{\alpha+1}) f^{\alpha+1} ;$$

ce qui n'est possible que si l_0 ou l_1 de $f_0^{\alpha+1}$ est nul. L'élément $f_0^{\alpha+1}$ serait donc soit l'élément zéro, soit un antécédent de zéro. Dans ce cas nous arrêterions le procédé à l'équation faisant apparaître un tel élément. Nous poursuivons au contraire si l'on a

$$l^{\alpha+1} < l^\alpha .$$

Les l^α diminuent donc constamment. Le procédé sera poursuivi indéfiniment ou même transfiniment jusqu'à

$$\lim l^\alpha = 0 .$$

Comme on a $l_1 < l$ on aura également $\lim l_1(f_0^\alpha) = 0$.

On aura donc

$$f = \sum_\alpha \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + h , \qquad A^2(f) = \sum_\alpha l^{\alpha^2} \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha ; \qquad (1)$$

si le procédé a été suspendu h est zéro ou un antécédent de zéro: $A(h) = 0$.

Si l'opérateur A^r, pour un entier r, est complètement continu, on a déjà $\lim l^n = 0$, le procédé ne nécessite pas l'emploi des ordinaux transfinis, il permet de retrouver le théorème d'Hilbert-Schmidt de la théorie classique des équations intégrales.

Pour les opérateurs réguliers, le procédé transfini peut être nécessaire dans de nombreux cas. La seule difficulté réside alors dans l'obtention d'un élément f^β qui n'a pas de précédent immédiat (nombre de deuxième espèce). Nous écrivons alors:

$$f = \sum_{\alpha<\beta} \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + f_0^\beta , \qquad \lim l(f_0^\alpha) = \lambda , \qquad l(f_0^\alpha) > \lambda .$$

Il suffit de montrer que $l(f_0^\beta) \leqslant \lambda$; si non $l(f_0^\beta) = \lambda + k$, $k > 0$.

Il existerait, alors, un ordinal γ tel que

$$l(f_0^\gamma) < \lambda + \frac{k}{2} \qquad \text{et} \qquad f_0^\gamma = \sum_{\gamma\leqq\alpha<\beta} \varpi(f_0^\alpha) f^\alpha + f_0^\beta ;$$

mais alors en vertu des lemmes II et VI:

$$l(f_0^\beta) \leqslant l(f_0^\gamma) \leqslant \lambda + \frac{k}{2}$$

ce qui est contradictoire. Les l s'abaissent donc toujours.

D'où le théorème suivant: *La décomposition spectrale d'un élément peut se faire pour tout opérateur hermitien régulier* ($\varpi \neq 0$) *par simple itération à partir de cet élément et des restes successifs.* Si l'opérateur est complètement continu, les restes successifs peuvent être numérotés au moyen des entiers ordinaires. S'il est régulier ($\varpi \neq 0$) cette numérotation exige un ensemble dénombrable d'ordinaux transfinis. En plus ce procédé n'exige pas la détermination de tous les éléments propres (fonction fondamentale) mais seulement de ceux qui interviennent dans la décomposition de l'élément donné.

M. J.-P. Vigier a étendu la méthode exposée dans notre note précédente au cas des opérateurs hermitiens gauches et retrouve ainsi les résultats relatifs au noyau symétrique gauche, ou aux matrices antisymétriques. Il a en plus reconstruit par cette méthode le théorème d'Hilbert-Schmidt pour un noyau continu quelconque, en considérant les opérateurs hermitiens AA* et A*A.

Nous espérons qu'il pourra exposer ses résultats prochainement.