**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles

**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

**Band:** 24 (1942)

**Artikel:** Le théorème de Fuchs et les équations linéaires à coefficients périodiques

**Autor:** Patry, Jean

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-741773

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 05.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Lorsque X et Y sont de parités différentes, F peut être remplacée par un polynome hypergéométrique de Jacobi — en particulier si $X = Y + 1$ on obtient: $\left(\frac{X}{2} - 1\right) w^{\frac{X}{2}-2}$. Lorsque X et Y sont de même parité F s'exprime à l'aide des intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième espèce K et E pour lesquelles des tables ont été établies par Legendre.

3. Les distributions des expressions $p = q_x q_y$ et

$$w = \frac{1}{(1 + q_x)(1 + q_y)}$$

ayant été établies il résulte de chacune d'elles un critère applicable au cas de deux distributions normales indépendantes, de moyennes $a_x$, $a_y$ connues, et de précisions $h_x$, $h_y$ inconnues — non nécessairement égales. Ces critères peuvent être utilement employés alors que le critère de Student appliqué séparément à chacune des suites de résultats n'aboutit à aucune conclusion.

**Jean Patry.** — *Le théorème de Fuchs et les équations linéaires à coefficients périodiques.*

Le théorème de Fuchs est à la base de la résolution de la plupart des équations différentielles linéaires et homogènes. Il a, en effet, conduit aux solutions de l'équation de Bessel ou de l'équation hypergéométrique sous forme de séries. D'autre part, les équations linéaires à coefficients périodiques présentent un intérêt certain pour la technique. Elles se présentent presque dans tous les cas où un phénomène est sous l'influence d'une action perturbatrice périodique. Nous ne citerons comme exemple que les phénomènes d'élasticité dans les milieux stratifiés, l'étude du courant électrique dans un circuit dont les caractéristiques varient périodiquement avec le temps, etc. Il est donc intéressant de chercher à appliquer ce théorème si fécond à une classe d'équations qui n'ont été résolues pratiquement que dans quelque cas particuliers.

Le théorème de Fuchs montre que les $n$ solutions linéairement indépendantes de l'équation:

$$z^n \frac{d^n u}{dz^n} + z^{n-1} P_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \ldots + P_0(z) u = 0 \qquad (1)$$

où les $P_i$ n'ont pas de points singuliers à l'origine, sont, en général, de la forme:

$$u_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^{\mu+i} \qquad (2)$$

ou, dans certains cas particuliers:

$$u_2 = \log x \cdot u_1 + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot z^{\mu' \neq 1} \qquad (3)$$

ou d'autres formes s'exprimant toujours par la fonction log et des séries de la forme $u_1$. Ce cas ne se présentant qu'exceptionnellement, nous ne l'étudierons pas dans ce bref travail, le réservant à une étude plus approfondie de cette équation.

Soit maintenant une équation linéaire à coefficients périodiques sous la forme:

$$\sum_{m=0}^{n} (e_m + f_m e^{-ix} + g_m e^{ix}) \frac{d^m u}{dx^m} = 0 \ . \qquad (4)$$

Posons

$$z = e^{ix} \ .$$

L'équation se transforme en tenant compte de

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \left(iz \frac{d}{dz}\right)^m u$$

et peut s'écrire:

$$\sum_{m=0}^{n} (F_m + E_m z + G_m z^2) z^m \frac{d^m u}{dz^m} = 0 \qquad (5)$$

avec les relations suivantes entre les $F_m$ et les $f_m$:

$$F_m = \sum_{i=m}^{n} d_{im} f_i$$

et des relations identiques entre $E_m$ et $e_m$, $G_m$ et $g_m$.

Ainsi, nous pouvons déterminer les conditions pour lesquelles le théorème de Fuchs est applicable. Il faut soit:

$$f_n \neq 0$$

soit:

$$f_k = 0 \quad \text{avec} \quad e_n \neq 0 \ .$$

Une transformation $z = e^{-ix}$ aurait par contre donné les conditions:

$$g_n \neq 0 \quad \text{ou} \quad g_k = 0 \ \text{avec} \ e_n \neq 0 \ .$$

Supposons maintenant une de ces conditions remplies. Nous savons que la solution de l'équation (4) est de la forme:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cdot e^{i(k+\mu)x} \tag{6}$$

si la condition se rapporte à $f_n$ ou

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} D_{-k} \cdot e^{i(\mu-k)x} \tag{6'}$$

si c'est $g_n$ qui intervient.

La substitution (6) conduit à un système récurrent de la forme:

$$A(\mu + k) D_{k-1} + B(\mu + k) D_k + C(\mu + k) D_{k+1} = 0$$

avec

$$A(\mu + k) = \sum_{l=0}^{n} i^l (\mu + m - 1)^l g_l$$

$$B(\mu + k) = \sum_{l=0}^{n} i^l (\mu + m)^l e_l$$

$$C(\mu + k) = \sum_{l=0}^{n} i^l (\mu + m + 1)^l f_l \ .$$

Pour que la série soit interrompue du côté des $k$ négatifs, il faut que $\mu$ satisfasse l'équation caractéristique:

$$C(\mu) = 0 \tag{7}$$

qui donne $n$ solutions pour $\mu$ puisque $f_n \neq 0$. Si c'est la condition $f_k = 0$ qui est satisfaite, le système se simplifie et l'équation caractéristique devient:

$$B(\mu) = 0 \tag{7'}$$

avec de nouveau $n$ valeurs de $\mu$.

Les valeurs de $D_k$ se déterminent alors par récurrence:

$$\begin{aligned} D_k &= 0 \qquad \text{pour} \quad k \leqslant 0 \\ D_1 &= D_1 \\ D_2 &= -\frac{B(\mu+1)}{C(\mu+1)} D_1 \\ D_3 &= -\frac{B(\mu+2)}{C(\mu+2)} D_2 - \frac{A(\mu+2)}{C(\mu+2)} D_1 \end{aligned} \tag{8}$$

et ainsi de suite.

Il faut, cependant, que la série (6) converge absolument pour que la solution soit utilisable.

Introduisons tout d'abord les expressions:

$$\varepsilon_n = -\frac{C(\mu+n)}{B(\mu+n)} \frac{D_{n+1}}{D_n}$$

et

$$\varphi = \lim_{k \to \infty} \frac{A(\mu+k)\, C(\mu+k-1)}{B(\mu+k)\, B(\mu+k-1)} = \frac{f_n \cdot g_n}{e_n^2} .$$

A partir de la dernière équation (8), on constate facilement que $\varepsilon_n$ tend vers $\varepsilon$ avec:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\varphi}) . \tag{9}$$

Dans ce cas, le rapport $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ tend en valeur absolue vers:

$$\left| \frac{D_{|n|+1}}{D_{|n|}} \right| \longrightarrow \left| \frac{e_n}{2 f_n} (1 + \sqrt{1 + 4\varphi}) \right| = 1/|z_1|$$

$$\left| \frac{D_{-1-|n|}}{D_{-|n|}} \right| \longrightarrow \left| \frac{e_n}{2 g_n} (1 + \sqrt{1 - 4\varphi}) \right| = |z_2|$$

où $|z_1| \leqslant |z_2|$ sont les deux points singuliers de l'équation différentielle, solutions de l'équation

$$f_n + e_n \cdot z + g_n \cdot z^2 = 0 \ . \tag{10}$$

Dans certaines conditions tout à fait déterminées, il est possible de faire tendre $\varepsilon_n$ vers $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varphi})$.

Le rapport:

$$\left| \frac{D_{|n|+1}}{D_{|n|}} \right|$$

tend alors vers $\left| \frac{1}{z_2} \right|$.

Ainsi, pour que le théorème de Fuchs soit directement applicable avec utilité, il faut que les deux points singuliers $Z_1$ et $Z_2$ soient du même côté du cercle de rayon unité dans le plan des Z. En effet, supposons $|Z_1| < 1$ et $Z_2 > 1$, la série entière en Z divergera pour $|Z| > 1/|z_1|$ donc pour une valeur réelle de $x$ et la série entière en $1/Z$, pour $|Z| < |Z_2|$ donc de nouveau pour une région intéressante.

Toutes les séries obtenues par cette méthode seront donc en général divergentes dans la région intéressante, si la condition déjà exprimée n'est pas remplie. Il faudra alors employer une autre méthode moins directe pour résoudre l'équation. Elle fera l'objet de notre seconde communication.

Ainsi, le théorème de Fuchs peut très facilement être appliqué rapidement aux équations à coefficients périodiques et donne des résultats dans un très grand nombre de cas, mais, malheureusement, pas dans tous les cas.

**Jean Patry.** — *Une méthode numérique pour résoudre les équations linéaires à coefficients périodiques.*

La méthode analytique que nous avons exposée dans notre dernière communication ne permet pas de résoudre toutes les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Nous allons alors considérer une méthode numérique développée par Ince, Wannier et Extermann pour les équations de Mathieu, et nous chercherons à la généraliser. Elle consiste aussi à