Une méthode numérique pour résoudre les équations linéaires à coefficients périodiques

Autor(en): **Patry, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **24 (1942)**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741774

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

où $|z_1| \leqslant |z_2|$ sont les deux points singuliers de l'équation différentielle, solutions de l'équation

$$f_n + e_n \cdot z + g_n \cdot z^2 = 0 \ . \tag{10}$$

Dans certaines conditions tout à fait déterminées, il est possible de faire tendre ε_n vers $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varphi})$.

Le rapport:

$$\left| \frac{D_{|n|+1}}{D_{|n|}} \right|$$

tend alors vers $\left| \frac{1}{z_2} \right|$.

Ainsi, pour que le théorème de Fuchs soit directement applicable avec utilité, il faut que les deux points singuliers Z_1 et Z_2 soient du même côté du cercle de rayon unité dans le plan des Z. En effet, supposons $|Z_1| < 1$ et $Z_2 > 1$, la série entière en Z divergera pour $|Z| > 1/|z_1|$ donc pour une valeur réelle de x et la série entière en $1/Z$, pour $|Z| < |Z_2|$ donc de nouveau pour une région intéressante.

Toutes les séries obtenues par cette méthode seront donc en général divergentes dans la région intéressante, si la condition déjà exprimée n'est pas remplie. Il faudra alors employer une autre méthode moins directe pour résoudre l'équation. Elle fera l'objet de notre seconde communication.

Ainsi, le théorème de Fuchs peut très facilement être appliqué rapidement aux équations à coefficients périodiques et donne des résultats dans un très grand nombre de cas, mais, malheureusement, pas dans tous les cas.

Jean Patry. — *Une méthode numérique pour résoudre les équations linéaires à coefficients périodiques.*

La méthode analytique que nous avons exposée dans notre dernière communication ne permet pas de résoudre toutes les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Nous allons alors considérer une méthode numérique développée par Ince, Wannier et Extermann pour les équations de Mathieu, et nous chercherons à la généraliser. Elle consiste aussi à

développer la solution en série de Fourier. Les système algébrique, dit « fondamental » est alors étudié directement.

Soit donc:

$$\sum_{k=0}^{s} (e_k + f_k e^{-ix} + g_k e^{ix}) \frac{d^k u}{dx^k} = 0 \qquad (1)$$

et effectuons la substitution

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{i(\mu+n)x} \ . \qquad (2)$$

Le développement est, en général, infini dans les deux sens, car le théorème de Fuchs n'est pas supposé applicable. Nous avons vu que le système « fondamental » s'écrit:

$$A(\mu + m) D_{m-1} + B(\mu + m) D_m + C(\mu + m) D_m + 1 = 0 \qquad (3)$$

avec

$$A(\mu + m) = \sum_{k=0}^{s} i^k (\mu + m - 1)^k g_k$$

$$B(\mu + m) = \sum_{k=0}^{s} i^k (\mu + m)^k e_k$$

$$C(\mu + m) = \sum_{k=0}^{s} i^k (\mu + m + 1)^k f_k \ .$$

Le système ainsi obtenu est infini. Sa résolution directe est alors très difficile. Il existe cependant un moyen de tourner cette difficulté: Il est toujours possible de résoudre un système du même type, donc homogène, mais ne comprenant qu'un nombre fini d'équations. Les résultats ainsi obtenus devront converger vers une limite déterminée si le nombre des équations résolues tend vers l'infini. Cette limite donnera le résultat cherché.

Considérons donc un système formé des (2N — 1) équations (3) pour lesquelles $|m| < N$ et des deux équations

$$B(\mu - N) D_{-N} + C(\mu - N) D_{1-N} = 0 \qquad (4)$$

$$A(\mu + N) D_{N-1} + B(\mu + N) D_N = 0 \ .$$

Supposons, de plus, l'existence d'un paramètre c, qu'il s'agit de déterminer en fonction de μ, en général donné par les conditions aux limites. Le système à résoudre étant homogène, son déterminant doit s'annuler. Il en résulte une relation entre c et μ, dont il est facile d'obtenir une première approximation en développant le déterminant. Cette méthode n'est cependant pas pratique et surtout ne permet que très difficilement d'examiner la convergence des résultats.

Nous allons alors employer une méthode par approximations successives basée sur le principe dit d'écho: Considérons les deux systèmes inhomogènes formés avec les équations où m est positif d'une part, et négatif, d'autre part. Pour chaque valeur numérique de c et de μ, il sera possible de déterminer la valeur correspondante de:

$$\frac{D_{-1}}{D_0} \quad \text{et} \quad \frac{D_1}{D_0} .$$

Pour que le système homogène complet soit résolu, il faut, que l'équation de contrôle soit satisfaite:

$$A(\mu, C)\frac{D_{-1}}{D_0} + B(\mu, c) + C(\mu, c)\frac{D_1}{D_0} = 0 .$$

Si cette équation n'est pas satisfaite, il est possible de calculer une valeur de c qui se rapproche beaucoup de la valeur exacte qui la satisfait. Il sera ainsi possible de calculer $c(\mu)$ avec toute la précision désirée. Le calcul des D_n est alors immédiat.

La résolution de ces deux systèmes homogènes s'effectue de la manière suivante: soit

$$\varepsilon_m = -A(\mu + m)\frac{D_{m-1}}{D_m} \quad \text{et} \quad \delta_m = -C(\mu + m)\frac{D_{m+1}}{D_m} . \qquad (5)$$

Une équation quelconque du système (3) peut s'écrire: soit:

$$\varepsilon_m = \frac{A(\mu + m) . C(\mu + m - 1)}{B(\mu + m - 1) - \varepsilon_{m-1}} \qquad (6)$$

soit:

$$\delta_m = \frac{A(\mu + m + 1) . C(\mu + m)}{B(\mu + m + 1) - \delta_{m+1}} .$$

L'équation de contrôle prendra, par contre, la forme:

$$B(\mu, c) = \varepsilon_0 + \delta_0 \quad (7)$$

Enfin, les relations (4) montrent que l'on peut poser $\varepsilon_{-N} = \delta_N = 0$ dans (6). Il est donc possible de calculer ainsi ε_0 et δ_0. Si la fonction $B(\mu, c)$ est résoluble par rapport à c, on aura alors une équation de la forme

$$c = c'(c) \quad (8)$$

qui se résoud facilement par la méthode des approximations successives.

La question de la convergence des résultats n'a pas encore été envisagée. Pour l'étudier, posons tout d'abord:

$$\varphi(\mu + m) = \frac{A(\mu + m)\, C(\mu + m - 1)}{B(\mu + m)\, B(\mu + m - 1)} \underset{|m| \to \infty}{\longrightarrow} \frac{f_s g_s}{e_s^2} = \varphi$$

il vient:

$$\frac{\varepsilon_m}{B(\mu + m)} = \frac{\varphi(\mu + m)}{1 -} \frac{\varphi(\mu + m - 1)}{1 -} \frac{\varphi(\mu + m - 2)}{1 -} \cdots \quad (9)$$

et

$$\frac{\delta_m}{B(\mu + m)} = \frac{\varphi(\mu + m + 1)}{1 -} \frac{\varphi(\mu + m + 2)}{1 -} \frac{\varphi(\mu + m + 3)}{1 -} \cdots$$

Si le système comprend un nombre infini d'équations, ces deux fractions continues seraient infinies. Il faut donc établir leur convergence. Considérons une fraction continue majorante en remplaçant $\varphi(\mu \pm m)$ par une valeur plus grande que toute valeur $|\varphi(\mu + m)|$ pour $|m| > n$. On sait alors que la fraction continue:

$$f = \frac{\varphi'}{1 -} \frac{\varphi'}{1 -} \frac{\varphi'}{1 -} \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\varphi'}\right) \quad (10)$$

converge toujours si $\varphi' < 1/4$.

Si donc, à partir d'une certaine valeur n donnée, tous les $\varphi(\mu \pm m)$ sont inférieurs à $1/4$, les fractions continues envisagées convergent. On en arrive ainsi à la condition d'application de la méthode:

$$\varphi = \frac{f_s g_s}{e_s^2} < \frac{1}{4} \quad (11)$$

On peut montrer que, dans ce cas, une erreur sur ε_{-N} ou sur δ_N donne lieu à une erreur sur ε_0 et δ_0, que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut en choisissant N suffisamment grand. Il est donc possible d'obtenir les résultats avec la précision désirée. Il faut cependant que la série obtenue converge absolument, ce qui réduira un peu le domaine d'application:

Nous avons:

$$\left|\frac{D_{|n|+1}}{D_{|n|}}\right| \longrightarrow \left|\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\varphi}) \,.\, \lim \frac{B}{C}\right| = \left|\frac{e_s}{2f_s}(1-\sqrt{1-4\varphi})\right|$$

$$\left|\frac{D_{1-|n|}}{D_{-|n|}}\right| \longrightarrow \left|\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\varphi}) \,.\, \lim \frac{B}{A}\right| = \left|\frac{e_s}{2g_s}(1-\sqrt{1-4\varphi})\right|$$

Soit alors $|z_1| < |z_2|$, les deux points singuliers de l'équation différentielle, solutions de l'équation:

$$f_e + e_s z + g_s z^2 = 0 \tag{12}$$

on constate que

$$\left|\frac{D_{|n|+1}}{D_{|n|}}\right| \longrightarrow \frac{1}{|z_2|}$$

et

$$\left|\frac{D_{1-|n|}}{D_{-|n|}}\right| \longrightarrow |z_1| \,.$$

Ainsi, ces deux points singuliers doivent se trouver de part et d'autre du cercle unité $|Z| = 1$. Cette condition est exactement l'inverse de la condition trouvée pour l'application du théorème de Fuchs. Ainsi, les deux méthodes seront toujours applicables dans les conditions suivantes:

$$f_s + e_s \,.\, e^{ix} + g_s \,.\, e^{2ix} \neq 0 \quad \text{et} \quad \left|\frac{f_s g_s}{e_s^2}\right| < 1/4$$

cette dernière condition n'étant pas nécessaire.

En terminant, nous nous permettons de signaler que ce sujet fera l'objet d'une publication ultérieure plus détaillée.

En *séance particulière*, Mlle Anne-Marie Du Bois et M. Jean Patry sont élus Membres ordinaires.