Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 24 (1942)

Artikel: Sur un appareil de mesure du frottement en mouvement
Autor: Esnault-Pelterie, Robert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741780

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

D'autre part, ce minerai renferme un minéral opaque, de couleur gris jaunâtre, un peu moins dur et moins lumineux que la pyrite, isotrope ou très faiblement anisotrope, renfermant au moins du fer et du soufre.

Université de Genève.
Laboratoire de minéralogie.

Séance du 18 juin 1942.

Robert Esnault-Pelterie. — *Sur un appareil de mesure du frottement en mouvement.*

L'étude d'une thermo-pompe à fluide non condensable (air) m'a conduit à voir la nécessité, dans ce cas, d'un rendement mécanique extrêmement élevé. La plupart des forces qui prennent naissance dans l'appareil peuvent être plus ou moins contrebalancées les unes par les autres; en ce qui concerne les frottements, notamment ceux des joints de pistons, cela est impossible.

Je me trouvai ainsi conduit à la recherche d'un type de joints aussi glissants que possible et il ne semblait exister aucune machine permettant de les comparer dans les conditions même de leur emploi; il me fallut donc en concevoir une. Elle fut construite et utilisée avec satisfaction, non seulement pour la mesure du frottement lui-même, mais encore pour celle des fuites en marche.

Tout appareil de mesure doit être régi par une équation dont on soit certain qu'elle représente la réalité; j'ai, dans ce but, conçu le mien de telle manière que la seule force intervenante soit précisément le frottement qu'il s'agit de connaître:

Un piston animé d'un mouvement impératif sinusoïdal, porte les joints à essayer et reçoit un cylindre dans lequel ces joints glissent; le cylindre est, par ailleurs, entièrement libre.

En marche continue, ce cylindre prend un mouvement périodique forcé de même fréquence que celui du piston; la mesure de l'amplitude de ce mouvement, comparée à celle du mouvement du piston, et le déphasage entre les deux, permettent d'évaluer

le frottement développé. La loi est différente selon que le frottement est de nature solide ou visqueuse; en pratique, il se révèle mixte, comme on pouvait le supposer.

Le problème se met en équation de la manière suivante: le mouvement impératif du piston étant

$$x = X \,.\, \sin \omega t \,, \tag{1}$$

$$x' = X\omega \,.\, \cos \omega t \,, \tag{2}$$

le cylindre de masse M sera soumis d'une part à la force de frottement solide

$$|f| = \text{Const.} \,, \tag{3}$$

dont le signe est toujours le même que celui de la différence $(x' - y')$ des vitesses du piston et du cylindre; d'autre part à la force de frottement visqueux

$$h = r(x' - y') \,. \tag{4}$$

Ces deux forces seront donc constamment de même signe et en changeront aux mêmes instants, la première avec discontinuité, la seconde sans.

Il résulte de ceci que l'équation du mouvement s'écrira

$$M \,.\, y'' = r(x' - y') + j \,.\, f \,, \tag{5}$$
$$j = \pm 1$$

ayant constamment le signe de la parenthèse; on tire de là l'intégrale générale

$$y = C_1 e^{-\frac{r}{M}t} + A \,.\, \cos \omega t + B \,.\, \sin \omega t + j \frac{f}{r} t + C_2 \,, \tag{6}$$

qui se dérive successivement

$$y' = - C_1 \frac{r}{M} e^{-\frac{r}{M}t} - A\omega \sin \omega t + B\omega \,.\, \cos \omega t + j \frac{f}{r} \tag{7}$$

$$y'' = + C_1 \frac{r^2}{M^2} e^{-\frac{r}{M}t} - A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \,. \tag{8}$$

Les C sont les deux constantes libres d'intégration; les autres ont pour valeur

$$A = -\frac{X \cdot a}{1 + a^2}, \qquad B = \frac{X}{1 + a^2}, \tag{9-10}$$

où

$$a = \frac{M\omega}{r}. \tag{11}$$

Avant d'attaquer la discussion de la solution complète, il est avantageux de nous éclairer par l'examen des deux solutions simples extrêmes:

1° *Cas du frottement visqueux seul:* $f \equiv 0$.

Notre système (6-7-8) ainsi réduit, peut s'écrire

$$y = C_1 e^{-\frac{r}{M}t} + C \cdot \sin(\omega t + \varphi) + C_2, \tag{6'}$$

$$y' = -C_1 \frac{r}{M} e^{-\frac{r}{M}t} + C\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi), \tag{7'}$$

$$y'' = +C_1 \frac{r^2}{M^2} e^{-\frac{r}{M}t} - C\omega^2 \sin(\omega t + \varphi); \tag{8'}$$

où

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{X}{\sqrt{1 + a^2}}, \tag{12}$$

avec

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{B} = -a = -\frac{M\omega}{r}. \tag{13}$$

On voit que le mouvement, périodique dès l'origine, se rapproche asymptotiquement d'un mouvement sinusoïdal par une sorte de glissement latéral qui diminue exponentiellement.

X, M et ω étant connus, on pourra déterminer r, soit au moyen de (12), par une mesure de C, c'est-à-dire de la demi-amplitude du mouvement limite, soit à l'aide de (13), par une mesure de φ: la première, qui sera beaucoup plus simple et généralement plus précise, nous donnera

$$r = \frac{C \cdot M\omega}{\sqrt{X^2 - C^2}}. \tag{14}$$

2° *Cas du frottement solide seul :* $r \equiv 0$.

L'équation (5) se réduit à

$$y'' = j \frac{f}{M} , \tag{15}$$

qui s'intègre successivement

$$y' = j \frac{f}{M} t + y'_0 , \tag{16}$$

$$y = j \frac{f}{M} \frac{t^2}{2} + y'_0 t + y_0 , \tag{17}$$

Ces équations devront être traitées distinctement dans chacun des intervalles successifs où le signe de j demeure le même; selon ce qui a été dit, ces intervalles sont séparés à chacun des instants où

$$(x' - y') = 0 . \tag{18}$$

Si l'on trace le diagramme des vitesses, celle du piston va être représentée par la sinusoïde (2). Le cylindre étant libéré à un instant quelconque, le point figuratif de sa vitesse va se déplacer suivant une droite de pente y'' jusqu'au moment où il rencontrera la sinusoïde (2); à cet instant, la pente change brusquement de signe tout en conservant la même valeur absolue, jusqu'à la prochaine rencontre. On a ainsi une ligne qui se brise successivement à chacune de ses intersections avec (2).

Pour un point figuratif initial convenablement choisi, on obtient une ligne brisée B_0 symétrique par rapport à chacun de ses points anguleux et qui présente ainsi une période égale à celle du mouvement sinusoïdal. Pour tout autre point figuratif initial, on obtient une ligne brisée qui se rapproche asymptotiquement de B_0, à l'image de ce qui se passait pour le frottement visqueux.

Les caractéristiques du mouvement limite peuvent se déterminer en partant des conditions de symétrie par demi-périodes :

$$y'_1 = - y'_0 , \tag{19}$$

$$y_1 = - y_0 ; \tag{20}$$

l'introduction de ces conditions dans (16) et (17), où l'on fait $t = T/2$ (T étant la période du mouvement imposé), donne

$$y'_1 = j\frac{f}{2M}\frac{T}{2} = -y'_0 , \qquad y_1 = y_0 = 0 . \qquad (21\text{-}22)$$

Ces valeurs, introduites à leur tour dans (16) et (17), donnent les équations générales

$$y = j\frac{f}{2M}t^2 - j\frac{f}{2M}\frac{T}{2}t , \qquad (17')$$

$$y' = j\frac{f}{M}t - j\frac{f}{2M}\frac{T}{2} ; \qquad (16')$$

en faisant $y' = 0$, c'est-à-dire $t = T/4$, on aura la valeur de l'élongation maximum

$$Y = \frac{f}{M}\frac{T^2}{32} . \qquad (23)$$

En appliquant la condition (18) à l'une des extrémités d'un intervalle, par exemple à l'origine où $t = 0$, nous aurons, par (16'),

$$-j\frac{f}{2M}\frac{T}{2} = X\omega . \cos\psi , \qquad (24)$$

ψ représentant la différence de phase entre les maxima de x et de y, de telle manière que

$$\cos\psi = -j\frac{\pi}{2X}\frac{f}{M\omega^2} . \qquad (25)$$

X, M et ω (ou T) étant connus, on déterminera f, soit au moyen de (23) en mesurant Y, amplitude du mouvement limite, soit avec (25) en mesurant ψ; la mesure de Y est plus simple et plus précise.

3° *Solution complète.*

Nous reprendrons ce cas à la lumière des résultats obtenus dans les deux exemples particuliers qui viennent d'être traités; ici encore, les équations admettent une solution périodique et symétrique par demi-périodes.

Pour simplifier les écritures, nous reporterons l'angle de phase sur le mouvement impératif en écrivant

$$x = X . \sin(\omega t + \psi) , \qquad (26)$$

$$x' = X\omega . \cos(\omega t + \psi) . \qquad (27)$$

Comme précédemment, il faudra étudier le mouvement par intervalles successifs, coupés aux instants successifs où

$$y' = x' \; ; \tag{18'}$$

à l'origine de chaque intervalle, nous reprendrons $t = 0$.

Nous reportant au système (6-7-8), nous aurons ainsi, compte tenu du changement d'écriture (26-27),

$$y'_0 = -C_1 \frac{r}{M} + B\omega + j\frac{f}{r} = X\omega \,.\, \cos\psi \;, \tag{28}$$

$$y'_1 = -C_1 \frac{r}{M} e^{-\frac{r}{M}\frac{\pi}{\omega}} - B\omega + j\frac{f}{r} = -X\omega \,.\, \cos\psi \;. \tag{28'}$$

Posant

$$e^{-\frac{r}{M}\frac{\pi}{\omega}} = E \;, \tag{29}$$

nous tirerons de là

$$C_1 = j\frac{2fM}{r^2(1+E)} \;, \tag{30}$$

puis

$$\cos\psi = j\frac{f}{Xr\omega}\left(1 - \frac{2}{1+E}\right) + \frac{B}{X} \tag{31}$$

(rappelons ici que

$$\frac{B}{X} = \frac{r^2}{M^2\omega^2 + r^2}\Big) \,. \tag{32}$$

Ceci posé,

$$y_0 = C_1 + A + C_2 \tag{33}$$

$$y_1 = C_1 E - A + j\frac{f}{r}\frac{\pi}{\omega} + C_2 \;; \tag{33'}$$

si nous désirons également avoir la condition de symétrie

$$y_1 = -y_0 \;, \tag{34}$$

nous serons conduits à adopter

$$C_2 = -\frac{C_1}{2}(1+E) - \frac{j}{2}\frac{f}{r}\frac{\pi}{\omega} = -\frac{j}{2}\frac{f}{r}\left(\frac{2M}{r} + \frac{\pi}{\omega}\right) \;; \tag{35-35'}$$

on trouve alors

$$y_0 = j\frac{f}{r}\left[\frac{M}{r}\left(\frac{1-E}{1+E}\right) - \frac{\pi}{2\omega}\right] + A = -y_1 \ . \qquad (36)$$

Notre système devient enfin

$$y = j\frac{f}{r}\left[\frac{2\,.\,M}{r(1+E)}e^{-\frac{r}{M}t} + t - \left(\frac{M}{r} + \frac{\pi}{2\omega}\right)\right] + A\,.\cos(\omega t + \psi) + \\ + B\,.\sin(\omega t + \psi) \qquad (6'')$$

$$y' = j\frac{f}{r}\left[-\frac{2}{1+E}e^{-\frac{r}{M}t} + 1\right] - A\omega\,.\sin(\omega t + \psi) + \\ + B\omega\,.\cos(\omega t + \psi)\ , \qquad (7'')$$

$$y'' = j\frac{f}{M}\frac{2}{1+E}e^{-\frac{r}{M}t} - A\omega^2\cos(\omega t + \psi) - B\omega^2\sin(\omega t + \psi)\ . \qquad (8'')$$

Nous avons, cette fois, deux grandeurs à déterminer: r et f, il nous faudra donc effectuer deux mesures qui seront celle d'une élongation maximum (ou de la différence de deux élongations extrêmes successives) et celle d'un angle de phase.

L'élongation maximum Y ayant lieu pour une certaine valeur τ de t, telle que $y' = 0$, on est ramené au système

$$j\frac{f}{r}\left[\frac{2\,.\,M}{r(1+E)}e^{-\frac{r}{M}\tau} + \tau - \left(\frac{M}{r} + \frac{\pi}{2\omega}\right)\right] + A\,.\cos(\omega\tau + \psi) + \\ + B\,.\sin(\omega\tau + \psi) = Y\ , \qquad (6''')$$

$$y' = j\frac{f}{r}\left[-\frac{2}{1+E}e^{-\frac{r}{M}\tau} + 1\right] - A\omega\,.\sin(\omega\tau + \psi) + \\ + B\omega\,.\cos(\omega\tau + \psi) = 0\ , \qquad (7''')$$

qui, pour des valeurs numériques des paramètres, peut être résolu par approximations successives.

Applications. On peut se proposer de comparer la force f du frottement purement solide à celle du frottement purement visqueux dont la valeur instantanée est

$$h = r(x' - y')\ . \qquad (4)$$

Quand le régime est devenu pratiquement sinusoïdal, nous aurons, d'après (2) et (7′), et en conservant l'écriture de (7),

$$h = r\omega\left[(X - B)\cos\omega t + A\,.\sin\omega t\right] , \tag{37}$$

qui peut s'écrire

$$h = r\omega\,.\,Z\,.\sin(\omega t + \chi) \;; \tag{38}$$

$$Z = \pm\sqrt{A^2 + (X - B)^2} = \pm\frac{X}{\sqrt{1 + a^{-2}}} , \tag{39-39′}$$

représentant l'élongation maximum de M *par rapport au piston* (valeur maximum de $(y - x)$ dans le cas d'un mouvement limite (6) symétrique ($C_2 = 0$)).

Remarque. On voit que, pour $r = 0$ (a infini), $Z = -X$ (immobilité de M) et que, pour r infini ($a = 0$), $Z = 0$ (entraînement complet de M par le piston).

D'après (38) et (39), la valeur maximum de h sera

$$H = r\omega\sqrt{A^2 + (X - B)^2} , \tag{40}$$

c'est-à-dire, d'après (39′),

$$H = \frac{X r\omega a}{\sqrt{1 + a^2}} , \tag{41}$$

que (11) et (12) permettent d'écrire

$$H = CM\omega^2 . \tag{41′}$$

La fonction (37-38) étant purement harmonique, ses deux valeurs moyennes prises, l'une par rapport au temps, l'autre par rapport aux élongations, seront

$$\bar{h}_t = \frac{2}{\pi}CM\omega^2 , \tag{42}$$

$$\bar{h}_x = \frac{\pi}{4}CM\omega^2 \;; \tag{43}$$

on choisira celle qu'on veut comparer au frottement solide, suivant qu'on accorde plus d'importance à l'impulsion ou au travail.

Comme ce sont des nombres de tours que nous mesurerons, il est bon d'introduire cette grandeur dans les formules plutôt que la vitesse angulaire; nous trouverons alors, n étant le nombre de tours par seconde,

$$\bar{h}_t = 8\pi \,.\, \mathrm{CM}n^2 = 25{,}1327 \,.\, \mathrm{CM}n^2 \,, \tag{42'}$$

$$\bar{h}_x = \pi^3 \mathrm{CM}n^2 = 31{,}0063 \,.\, \mathrm{CM}n^2 \,; \tag{43'}$$

en ce qui concerne le frottement solide, (23) devient

$$f = 32 \,.\, \mathrm{YM}n^2 \,. \tag{23'}$$

Comme il sera plus commode d'utiliser le nombre N de tours par minute, nous écrirons finalement

$$\bar{h}_t = 0{,}71157 \,.\, 10^{-5}\, \mathrm{CMN}^2 \,, \tag{42''}$$

$$\bar{h}_x = 0{,}87787 \,.\, 10^{-5}\, \mathrm{CMN}^2 \,, \tag{43''}$$

$$f = 0{,}90600 \,.\, 10^{-5}\, \mathrm{CMN}^2 \,. \tag{23''}$$

Notre préoccupation portant sur le travail dissipé, il sera naturel de nous référer à (43″) et il est remarquable de constater alors que, si l'on prend pour le coefficient numérique la valeur moyenne 0,892, on ne commettra qu'une erreur de l'ordre de $\pm$ 1,5%, que le frottement soit de nature purement visqueuse ou purement solide. Etant donné la grande instabilité des coefficients de frottement, ce degré de précision sera généralement très suffisant.

Remarque. Le fait que, pour une même force moyenne, les deux types de frottement provoquent presque la même élongation maximum du cylindre, n'entraîne pas nécessairement qu'ils soient indiscernables par ailleurs.

Considérons en effet deux séries de mesures au cours desquelles nous ne ferons varier que X, tous les autres paramètres demeurant inchangés y compris, naturellement, la pression qui agit sur les joints et leur lubrification; le coefficient de frottement doit, lui-même, demeurer inchangé. Cela entraîne, pour le frottement solide, l'invariance de f, mais, pour le frottement visqueux, seulement celle de r.

La formule (12) montre alors que, dans le cas du frottement visqueux, C varie proportionnellement à X, tandis que, dans le cas du frottement solide, on voit par (23) que Y demeure inchangé: il est indépendant de X. On voit aussi qu'à X constant, C et Y dépendent tous deux de ω, mais de manière différente.

L'examen des résultats expérimentaux fait ressortir que, toutes choses égales d'ailleurs, une variation de X en entraîne une de même sens de Y, généralement moindre, rarement nulle; ce fait s'accorde avec l'existence d'un frottement de nature mixte.

Malheureusement, le frottement se montre si sensible aux moindres actions que d'une expérience à l'autre se manifestent des variations à caractère nettement accidentel: on trouve même parfois que Y varie plus que proportionnellement à X. Il semble donc illusoire, dans l'état actuel des essais tout au moins, de vouloir tirer de la manière dont Y varie une caractérisation de la nature du frottement.

Variantes. On pourrait envisager d'appliquer l'appareil à une analyse instantanée, soit par un très grand allongement du diagramme des Y dans le sens du temps, puis par sa dérivation graphique, soit, préférablement, en reliant le cylindre à un ressort suffisamment raide et inscrivant ses faibles déplacements par l'intermédiaire d'un léger miroir ou d'un quartz piézo-électrique. Dans ce cas, et pourvu qu'on s'arrange pour que les effets d'inertie soient négligeables ou calculables, on obtiendrait directement les valeurs instantanées de la force de frottement elle-même.

Mais, comme il a été dit, s'agissant ici de travail dissipé, ce qui nous intéresse est la force *moyenne* de frottement par rapport aux élongations; un appareillage plus simple et effectuant lui-même cette moyenne m'a donc semblé préférable à tous points de vue.

Résultats. Dans les essais exécutés jusqu'à présent sous pression constante, j'ai pris pour habitude d'exprimer la force de frottement des joints en prenant pour unité la force totale de pression s'exerçant sur le piston; cela donne immédiatement

le taux du travail dissipé par rapport au travail mis en jeu, taux qui est justement ce qui nous intéresse (ultérieurement, je généraliserai les résultats en les réduisant par unité de longueur de joint et de section du piston).

J'ai ainsi trouvé que des segments ordinaires dissipent de 1 à 2% du travail utile et ai pu établir des joints particuliers ne dissipant que de 0,4 à 0,5% (occasionnellement même 0,27%, mais, dans ce dernier cas l'étanchéité était insuffisante).

Cette étanchéité se mesure en marche en coupant l'arrivée d'air et mesurant la baisse de pression en fonction du temps dans une capacité déterminée.

Malheureusement les difficultés de l'heure présente ont considérablement entravé mes recherches, surtout en rendant impossible l'obtention des matières dont j'avais besoin.

Rolin Wavre. — *Sur les équations linéaires à opérateurs hermitiens.*

Dans la séance du 7 mai 1942, nous avons indiqué un procédé pour décomposer un élément f de l'espace E (espace fonctionnel ou espace d'Hilbert) en série procédant suivant les éléments propres f^α de l'opérateur A^2 déduit d'un hermitien A. On posait si l'opérateur est régulier (c'est-à-dire à $\varpi \neq 0$)

$$f_0^\alpha = \varpi(f_0^\alpha)\, f^\alpha + f_0^{\alpha+1} ,$$

f^α étant la limite des itérées par A^2 de f_0^α et $f_0^{\alpha+1}$ étant un nouveau reste. On obtenait par réduction transfinie

$$f = f_0^0 = \sum_\alpha \varpi(f_0^\alpha)\, f^\alpha + h \tag{1}$$

avec

$$A(h) = 0 . \tag{2}$$

On a donc

$$A^2(f) = \sum_\alpha \varpi(f_0^\alpha)\, l_\alpha^2 f^\alpha \qquad \text{et} \qquad A^2(f^\alpha) = l_\alpha^2 f^\alpha .$$