Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 24 (1942)

Artikel: Quelques résultats complémentaires à la théorie de l'itération des opérateurs de M. Wavre

Autor: Vigier, Jean-Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741782

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Et si dans ce cas $|\nu|$ est une valeur propre autre qu'un l_α, alors à la solution (5) on peut ajouter la solution générale de l'équation (3) homogène ($f = 0$).

On voit comment se présentent par cette méthode d'itération des opérateurs hermitiens et de réduction transfinie les théorèmes d'Hilbert-Schmidt.

Reprenant (5) on voit que la fonction analytique φ de ν admet les pôles simples $\nu = \pm l_\alpha$, lesquels peuvent avoir des points d'accumulation a à distance finie, les a pouvant à leur tour en avoir, comme le permet la théorie des nombres transfinis. Il n'y a pas d'autre singularité pour $\varphi|\nu|$, que les points $\pm l_\alpha$ et les points du dérivé de l'ensemble $\pm l_\alpha$.

Avec le paramètre habituel λ de Fredholm on aurait donc

$$\varphi|\lambda| = f^* + \lambda^2 \sum_\alpha \frac{f_\alpha^*}{\lambda_\alpha^2 - \lambda^2} f^\alpha ,$$

et les mêmes remarques peuvent être faites sur les points limites de pôles (le point $\lambda = 0$ n'est jamais singulier pour un opérateur borné).

Jean-Pierre Vigier. — *Quelques résultats complémentaires à la théorie de l'itération des opérateurs de M. Wavre.*

Nous opérons dans l'espace H isomorphe de l'espace fonctionnel E_f et de l'espace hilbertien E_ω.

δI) opérateurs hermitiens gauches.

Ils sont définis par la relation $(Ax, x) = -(x, Ax)$.

Les itérés d'un élément x_0 normalisé, ($\| x_0 \| = 1$) sont donnés par les relations suivantes:

$$l_i x_i = A(x_{x-1}) \; ; \qquad l_i = \| A(x_{i-1}) \| \; ; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Un raisonnement presque identique à celui de M. Wavre sur les opérateurs hermitiens montre que l'on a:

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant \ldots$$

Il en résulte, si A est borné

$$\lim_{n \to \infty} l_n = l \ .$$

De ce résultat fondamental on peut déduire, en introduisant le produit infini $\varpi = \frac{l_1}{l} \cdot \frac{l_2}{l} \ldots$ les théorèmes suivants:

I) Si $\varpi \neq 0$, les itérés d'indice pair tendent fortement vers un élément x satisfaisant à la relation:

$$l^2 x = \mathrm{A}^2 x \ .$$

II) Si $\varpi = 0$ les itérés d'indice pair tendent faiblement vers 0. Une série de résultats suivent, complémentaires de ceux obtenus par M. Wavre pour les hermitiens. Nous nous contenterons d'en énoncer deux qui recouvrent la théorie élaborée par M. Lalesco des noyaux symétriques gauches.

I) Les valeurs propres sont imaginaires pures.

En effet, soit

$$r x = \mathrm{A} x \ ,$$

Il vient

$$(x, \mathrm{A}x) = r(x, x) = -(\mathrm{A}x, x) = -\bar{r}(x, x) \ ;$$

donc $r = -\bar{r}$.

II) La solution de l'équation $\varphi = \frac{1}{r}\mathrm{A}\varphi + f$ est développable en la série

$$\varphi = f + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_1 f_i}{r - r_i} \psi_i$$

au sens de la convergence forte, ψ_i désignant une solution propre de A. Ce qui étend le théorème d'Hilbert-Schmidt à cette catégorie d'opérateurs.

δ II) La théorie de l'itération permet la démonstration du théorème suivant:

Tout élément f de H qui satisfait à la relation $f = \mathrm{A}h$ [h étant quelconque, mais tel que (h, h) existe] est développable en

série (au sens de la convergence forte) à l'aide de fonctions φ_i et ψ_i définies par le système I)

$$\text{I)} \quad \begin{cases} r_i \varphi_i = A \psi_i \\ r_i \psi_i = A^* \varphi_i \ . \end{cases}$$

Ce théorème recouvre le développement de Schmidt dans la théorie des équations intégrales et entraîne un théorème correspondant dans celle des équations matricielles de l'espace E_ω.

Le système I) est équivalent au système II)

$$\begin{cases} r_i^2 \varphi_i = AA^* \varphi_i \\ r_i^2 \psi_i = A^* A \psi_i \ . \end{cases}$$

AA^* et A^*A étant des opérateurs hermitiens dont les φ et les ψ sont les fonctions propres.

Les lemmes suivants sont nécessaires à la démonstration:

I) Démontré par M. Wavre dans sa théorie des opérateurs hermitiens.

a) La valeur (propre) $|r_{n+1}|$ est la plus grande valeur que puisse prendre $\| A(h) \|$ lorsque f est orthogonal aux n fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ de A.

b) On peut trouver n tel que

$$|r_{n+1}| < \varepsilon \ .$$

II) Les r_i du système i sont réels et positifs.

Posons:

$$f_i = (\varphi, f) \ ; \qquad f_i^* = (\psi_i, f) \ ; \qquad f = A(h) \ .$$

Il vient:

$$f_i = \bar{r}_i h_1^* \ ; \qquad f = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i h_i^* \varphi_i + H^n \ .$$

Montrons que $\| H^n \| \to 0$ si $n \to \infty$, ce qui démontre le théorème.

En effet,

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i^* \psi_i + h^n .$$

D'où l'on déduit:

$$A^* A h = \sum_{i=1}^{n} h_i^* r_i^2 \psi_i + A^* A h^n .$$

Nous avons d'autre part:

$$A^* f = \sum_{i=1}^{n} r_i \bar{r}_i h_i^* \psi_i + A^* H^n .$$

Compte tenu de II) il vient:

$$A^* A h^n = A^* H^n ;$$

et en vertu de I)

$$\| A^* H^n \| < r_{n+1} .$$

Or,

$$(H^n, f) = \left(H^n, \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i h_i^* \varphi_i \right) + \| H^n \|^2 = \| H^n \|^2 =$$

$$= (H^n, A h) = (A^* H^n, h) \to 0 \qquad \text{si} \quad n \to \infty .$$

On a donc bien:

$$\| H^n \|^2 \to 0 .$$

La théorie de l'itération de M. Wavre permet de recouvrir l'essentiel de la théorie des équations intégrales.