Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 24 (1942)

Artikel: Remarques à propos de l'itération des opérateurs hermitiens
Autor: Wavre, Rolin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741804

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

il faut que la fraction continue converge. Le résultat final sur le domaine de convergence de la série, subsiste entièrement. Les théorèmes généraux sur les points singuliers en fournissent une preuve suffisante.

3. Légèrement plus bas, la formule:

$$\left|\frac{D_{|m|+1}}{D_{|m|}}\right| \longrightarrow \left|\frac{e_n}{2f_n}\left(1 + \sqrt{1 + 4\varphi}\right)\right| = \frac{1}{|Z_1|}$$

doit être corrigée en

$$\left|\frac{D_{|m|+1}}{D_{|m|}}\right| \longrightarrow \left|\frac{e_n}{2f_n}\left(1 + \sqrt{1 - 4\varphi}\right)\right| = \frac{1}{|Z_1|} .$$

Nous profitons enfin de l'occasion pour remercier le professeur Wavre pour tout l'intérêt qu'il a pris à nos recherches. Nous le remercions aussi de nous avoir signalé ces erreurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PATRY, C. R. Soc. Phys. Hist. nat., Genève, *59*, 118, 1942.
[2] PATRY, C. R. Soc. Phys. Hist. nat., Genève, *59*, 122, 1942.
[3] RIESZ, *Les systèmes d'équations à une infinité d'inconnues.*

Rolin Wavre. — *Remarques à propos de l'itération des opérateurs hermitiens.*

Dans trois notes précédentes, données au cours de cette année 1942, nous avons indiqué que l'on peut reconstruire très rapidement la théorie des équations intégrales de Fredholm à noyau symétrique à partir de l'étude directe de l'itération des opérateurs hermitiens. Ce sont des compléments à cette étude directe que nous donnons ici.

Soient: A l'opérateur, A^2, A^3, ... ses itérés; x_0 un élément et x_r ses conséquents normalisés. On a donc

$$A^r x_0 = l_1 \ldots l_r x_r \qquad \| x_r \| = 1 \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

On a en plus les inégalités de Kellogg:

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant \ldots . \qquad \text{Posons} \quad l = \lim l_i .$$

Une parenthèse indiquant le produit scalaire, on a

$$(x_0, x_{2q}) = \frac{l_1 \dots l_q}{l_{q+1} \dots l_{2q}}, \qquad (x_q, x_{3q}) = \frac{l_{q+1} \dots l_{3q}}{l_{2q+1} \dots l_{3q}}, \quad \text{etc.}$$

d'où Π indiquant un produit infini de produits scalaires

$$\prod_{i=0}^{\infty} (x_{iq, (i+2)q}) = \frac{l_1 \dots l_q}{l^q}. \tag{1}$$

En particulier:

$$(x_0, x_2)(x_1, x_3)(x_2, x_4) \dots = \frac{l_1}{l}.$$

Si $\delta_{p,q}$ indique la distance des deux points x_p et x_q, on a par le théorème du cosinus valable ici

$$(x_p, x_q) = 1 - \frac{\delta_{p,q}^2}{2}$$

et l'on sait qu'un produit infini Π à facteurs tous positifs:

$$\Pi = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - \theta_i^2) \qquad \Sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2$$

est égal à zéro ou différent de zéro suivant que la série Σ diverge ou converge. Donc la série suivante diverge ou converge:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_{iq, (i+2)q}^2 \quad \text{suivant que} \quad \begin{cases} l = +\infty \\ l \text{ est fini} \end{cases}. \tag{2}$$

En particulier la série des carrés des distances des conséquents pris de deux en deux, diverge ou converge dans les mêmes conditions

$$\delta_{0,2}^2 + \delta_{1,3}^2 + \delta_{2,4}^2 + \dots.$$

Partant d'un x_0, normalisé ou non, posons:

$$a(x_0) = \frac{l_1}{l} \frac{l_2}{l} \dots \qquad b(x_0) = \|x_0\| \cdot \frac{l_1}{l} \cdot \frac{l_2}{l} \dots.$$

Ces nombres existent si les conséquents x_r existent tous. Supposons maintenant l'opérateur régulier, $a(x_0) \neq 0$ quel que soit x_0. Comme précédemment (note du 7 mai) nous ferons la décomposition spectrale d'un élément $f = f_0^0$ quelconque comme suit:

$$\begin{array}{lll} f_0^0 = b(f_0^0) f^0 + f_0^1 & & f^0 = \text{lim forte des } f_{2r}^0 \\ \dots\dots\dots\dots & (3) & \dots\dots\dots\dots \quad (4) \\ f_0^\alpha = b(f_0^\alpha) f^\alpha + f_0^{\alpha+1} & & f^\alpha = \text{lim forte des } f_{2r}^\alpha \end{array}$$

Ces limites existent. Quant aux $f_0^1, \dots f_0^{\alpha+1}$, ce sont des restes successifs, non normalisés, que l'on décompose à leur tour. Il peut subsister un reste irréductible appelé résidu h obtenu à un rang fini n ou infini ω, ou transfini $\omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, \dots$ Ces résidus transfinis ne se présentent pas dans la théorie classique des opérateurs complètement continus. On a donc en vertu de (3), par addition:

$$f = \sum_\alpha b(f_0^\alpha) f^\alpha + h \; ; \qquad f = \sum_\alpha b_\alpha f^\alpha + h \; . \tag{5}$$

Cette dernière manière d'écrire est simplement plus abrégée. Les f^α, éléments propres, sont solutions de l'équation homogène et h est un antécédent de zéro:

$$A^2 f^\alpha = l_{(\alpha)}^2 f^\alpha \; ; \; (f^\alpha, f^\beta) = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right. ; \; Ah = \text{zéro} \; , \qquad (f^\alpha, h) = 0 \; .$$

On vérifie alors facilement les relations suivantes entre les a_α et les b_α formés avec les f_0^α:

$$\| f_0^\alpha \|^2 = \prod_{i=0}^{i<\alpha} (1 - a_i^2) \; ; \qquad b_\alpha^2 = a_\alpha^2 \prod_{i=0}^{i<\alpha} (1 - a_i^2) \tag{6}$$

puis en inversant:

$$a_\alpha^2 = b_\alpha^2 \cdot \frac{1}{1 - b_0^2 - b_1^2 - \dots - b_{\alpha-1}^2} \; . \tag{7}$$

On démontre alors facilement que les propositions écrites dans une même ligne (tableau 9) s'impliquent mutuellement,

en posant

$$\Pi = \prod_{\alpha} (1 - a_\alpha^2) , \qquad (\text{on a} \quad 1 - \|h\|^2 = \Sigma\, b_\alpha^2) , \quad (8)$$

produit étendu à tous les α, fini, infini, ou transfini

$$\begin{array}{llll} \Pi = 0 , & \Sigma\, a_\alpha^2 \text{ diverge} , & \Sigma\, b_\alpha^2 = 1 , & \|h\| = 0 ; \\ \Pi \neq 0 , & \Sigma\, a_\alpha^2 \text{ converge} , & \Sigma\, b_\alpha^2 < 1 & \|h\| \neq 0 . \end{array} \quad (9)$$

S'il y avait quelque doute au sujet des produits transfinis, ou des séries transfinies, il suffit pour les lever, de rappeler que les α sont dénombrables pris dans un autre ordre. L'ordre dans lequel ils sont apparus ici, dans la décomposition spectrale (3) est celui des valeurs propres décroissantes

$$l_{(0)} > l_{(1)} > \dots > l_{(n)} > \dots > l_{(\omega+1)} > \dots > l_{(\omega+2)} > \dots .$$

Mais on a, dans un autre ordre, ce qui ne fera plus de doute:

$$\sum_{\alpha} a_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 , \qquad \prod_{\alpha} (1 - a_\alpha)^2 = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - a_i^2) .$$

Les a et les b sont des nombres réels, les f peuvent être complexes.

On sera donc assuré de ne pas rencontrer de résidu si le produit Π est nul et d'en rencontrer un à un rang transfini quelconque si $\Pi \neq 0$. Il ne faut pas confondre Π avec ϖ de nos anciennes notes. Les relations (9) s'interprètent géométriquement.

$f = f_0^0$ se décompose en: 1° un élément $b_0 f^0$ suivant l'élément propre f^0 de l'opérateur A^2 et 2° un reste f_0^1 orthogonal à f^0; f_0^1 se décompose à son tour en $b_1 f^1$ élément propre et f_0^2 orthogonal à f^0 et f^1, etc.;

$$f_0^\alpha \text{ se décompose en } \begin{cases} b_\alpha f^\alpha \text{ élément propre de } A^2 \\ \text{et } f_0^{\alpha+1} \text{ orthogonal à tous les } f^0, f^1, \dots, f^\alpha . \end{cases}$$

Si φ_α est l'angle de f^α et de f_0^α défini par le cosinus réel positif et inférieur à l'unité

$$\cos\varphi_\alpha = (f^\alpha, f_0^\alpha) \qquad \text{on a} \quad a_\alpha = \cos\varphi_\alpha \,.$$

Il ne faut pas confondre les φ_α avec les angles d'un même vecteur et des axes f^α. On a:

$$\sum_\alpha a_\alpha^2 = \sum_\alpha \cos^2\varphi_\alpha \,, \quad (10) \qquad \Pi = \prod_\alpha \sin^2\varphi_\alpha \,. \quad (11)$$

Donc s'il n'y a pas de résidu h orthogonal à tous les f^α, la série 10 est infinie et le produit Π est nul. Les φ_α ne tendent pas assez rapidement vers $\frac{\pi}{2}$; et les normes des restes successifs tendent vers zéro

$$\left\| f_0^\alpha \right\| = \sin\varphi_0 \ldots \sin\varphi_{\alpha-1} \,.$$

S'il y a au contraire un résidu $h \neq 0$, les φ_α tendent rapidement vers $\frac{\pi}{2}$. Ceci dit pour le cas où une infinité d'alpha entrent en ligne, bien entendu.

Kurt-H. Meyer et **Clément de Traz.** — *Méthode de dosage et enrichissement de la phosphorylase de pomme de terre.*

L'enzyme appelé phosphorylase a été récemment identifié dans une série d'organes animaux [1]: foie, cœur, muscle, etc.; il a son représentant dans le règne végétal aussi: les travaux de Hanes notamment, après s'être portés sur la phosphorylase du pois [2], se sont adressés à celle de la pomme de terre [3]. C'est cette dernière qui fait l'objet de nos recherches.

La molécule de l'amidon, soumise à l'action de la phosphorylase de pomme de terre en présence de phosphore inorganique, se scinde pour donner en premier stade l'ester glucose-1-phosphorique, dit ester de Cori; cet effet est réversible: l'ester de Cori, sous l'action de la phosphorylase, reforme le polysaccharide *in vitro*. S'agit-il de la phosphorylase du foie, le polysaccharide