Sur le champ du tourbillon dans les fluides

Autor(en): **Mercier, André**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **24 (1942)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741806

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Abandonnée trois mois à la glacière, une préparation purifiée de phosphorylase n'a pas montré de désactivation sensible; à 35°, l'activité de la même préparation a baissé de moitié en trois semaines.

Les ions CN′, F′ et $Mg^{\cdot\cdot}$ n'exercent aucune action (80 mMol, pH 6).

Métaux lourds : $Cu^{\cdot\cdot}$ inhibe de 75% à 5.10^{-4} Mol; $Hg^{\cdot\cdot}$ de 70% à $2{,}5.10^{-5}$ Mol et $Ag^{\cdot}$ de 90% à 1.10^{-4} Mol (essais effectués au pH 6).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Cori et collab., J. Biol. Chem. à partir de *119*, 1937.
[2] Hanes, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. B, *128*, 421.
[3] Id., *129*, 174.
[4] Parnas, Ergeb. Enzymforsch., *6*, 57, 1937.
[5] D.-E. Green et P.-K. Stumpf, J. Biol. Chem., *140*, 47, 1941.
[6] G.-T. Cori et C.-F. Cori, J. Biol. Chem., *135*, 733, 1940.
[7] King, Biochem. J., *26*, 292, 1942.

André Mercier. — *Sur le champ du tourbillon dans les fluides.*

Première note. — On peut toujours mettre un champ vectoriel $\vec{v}(P)$ fonction du point P de l'espace sous la forme

$$\vec{v} = \nabla H + \nabla \times \vec{W} \qquad (1)$$

Il suffit pour cela de définir les « potentiels » scalaire et vecteur H et $\vec{W}$ comme suit:

$$H(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\tau} d\tau_Q \frac{\nabla \cdot \vec{v}(Q)}{r_{PQ}} + \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma} \frac{d\vec{\sigma}_{Q'} \cdot \vec{v}(Q')}{r_{PQ'}},$$

$$\vec{W}(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau} d\tau_Q \frac{\vec{\omega}(Q)}{r_{PQ}} - \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma} \frac{d\vec{\sigma}_{Q'} \times \vec{v}(Q')}{r_{PQ'}},$$

où $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v}$ et où τ est le domaine de frontière Σ où le champ est défini. Si $\vec{v}$ est le champ de la vitesse dans le mouvement d'un fluide, $\vec{\omega}$ est le champ du vecteur tourbillon.

D'une part, là où $\nabla \times \vec{W} = 0$, on a $\vec{v} = \nabla H$ et par conséquent $\vec{\omega} = 0$, ce qui fait dire que le mouvement est irrotationnel. Ce n'est pas là le cas le plus général de mouvement irrotationnel. En effet: irrotationnel veut dire que $\vec{\omega} = 0$; alors on peut écrire $\vec{v} = \nabla V$, où, en général, $V \neq H$, et l'on n'a pas nécessairement $\nabla \times \vec{W} = 0$ dans un tel mouvement; mais si $\vec{\omega} = 0$, on a nécessairement $\nabla \vec{W} = 0$, car on a $\nabla \cdot \vec{W} = 0$, et

$$\Delta \vec{W} = - \nabla \times (\nabla \times \vec{W}) = - 2 \vec{\omega} , \qquad (2)$$

en vertu de (1). Si $\vec{\omega} = 0$, on a donc encore $\nabla \times (\nabla \times \vec{W}) = 0$, et $\nabla \times \vec{W} = \nabla f$ (en général $\neq 0$).

D'autre part, là où $\nabla H = 0$, on a $\vec{v} = \nabla \times \vec{W}$. On peut appeler *rotationnel pur* ce mouvement, et le distinguer d'un mouvement *tourbillonnaire*, dans lequel on conviendra que $\vec{\omega} \neq 0$. D'après ces définitions, un mouvement n'est pas tourbillonnaire là où $\vec{\omega} = 0$, et il n'est pas rotationnel pur là où on ne peut pas écrire simplement $\vec{v} = \nabla \times \vec{W}$. Donc il y a des mouvements rotationnels purs qui ne sont pas tourbillonnaires; mais le contraire n'est pas vrai: il n'y a pas de mouvement tourbillonnaire qui ne soit rotationnel. En effet, en vertu de (2), $\Delta \vec{W}$ ne peut être nul là où $\vec{\omega}$ n'est pas nul, et à plus forte raison $\vec{W}$ non plus ni en particulier $\nabla \times \vec{W}$, puisque $\Delta \vec{W} = - \nabla \times (\nabla \times \vec{W})$.

Un exemple de cet état de choses est réalisé dans la partie externe du mouvement suivant: un tourbillon cylindrique tourne à vitesse constante comme un bloc autour de son axe et se raccorde, sans discontinuité de la vitesse, au fluide qui l'entoure (partie externe).

Deuxième note. — Nous avons indiqué ailleurs [1] la formule générale suivante pour décrire l'évolution du vecteur tourbillon $\vec{\omega}$ dans un fluide dont le coefficient de viscosité vaut μ:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{\omega} \nabla \cdot \vec{v} =$$

$$= \frac{1}{2} \nabla \times \left[\vec{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \vec{v} \right\} \right] , \qquad (3)$$

[1] Helv. Phys. Acta, *15*, 509, 1942.

où $\vec{F}$ est la force appliquée par unité de masse, ρ la densité et p la trace du tenseur des tensions. (A ce propos remarquons qu'il n'est pas rigoureux d'appeler p la pression, en tout cas pas si l'on entend par pression une tension uniforme négative, qui, par exemple dans le diagramme des cercles de Mohr, réduit le cercle à un point placé sur la partie négative de l'axe des tensions normales.)

Lorsque $\vec{F}$ dépend d'un potentiel et que le fluide peut être considéré comme incompressible, l'équation (3) se réduit, du fait que $\nabla \times \Delta \vec{v} = \Delta \nabla \times \vec{v}$, à la suivante:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{\omega} . \tag{4}$$

Cette équation est connue. Elle permet par exemple de démontrer très simplement le théorème suivant: Dans un mouvement où la vitesse est partout et constamment parallèle à un plan et où $\vec{\omega}$ est partout et constamment perpendiculaire au même plan, la vitesse ne peut pas être fonction de la distance z à ce plan, à moins que $\vec{\omega}$ ne soit nul. (Nous n'indiquerons pas la démonstration.)

Dans les conditions de ce théorème, où $\vec{\omega}$ se réduit à sa composante dans la direction z, on a $\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$, $\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$. Imaginons de plus que l'évolution du tourbillon soit *lente*; cela s'exprime par l'inégalité $\left| \vec{v} . \nabla \vec{\omega} \right| \ll \left| \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \right|$. Alors on peut négliger le terme $\vec{v} . \nabla \vec{\omega}$, et (4) prend la forme

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) . \tag{5}$$

Telle est l'équation de l'évolution du tourbillon dans le mouvement plan et lent d'un fluide visqueux incompressible soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel.

L'équation (5) est intéressante tout d'abord par le fait qu'elle ne contient que le tourbillon, mais plus la vitesse. Ensuite elle ressemble beaucoup à celle de la conduction de la chaleur; ici, $\frac{\mu}{\rho}$ détermine la rapidité avec laquelle les tourbillons dispa-

raissent ($\Delta\omega < 0$) ou se développent ($\Delta\omega > 0$). Ainsi, on voit que même dans un cas aussi simple, la viscosité n'est pas sans influence sur l'évolution des tourbillons.

De l'équation (4), on déduit aussi la propriété suivante du mouvement plan des fluides parfaits: Soit $\mu = 0$. On ne peut pas dans ce cas négliger $\vec{v} \cdot \nabla\vec{\omega}$ par rapport à $\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}$, mais on a alors

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + v_x\frac{\partial\omega}{\partial x} + v_y\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0 ,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 ,$$

la dérivée totale d/dt signifiant que l'on suit une particule liquide le long de son parcours. C'est là un fait connu, en tout cas pour un mouvement stationnaire, auquel cas on démontre, par exemple grâce à l'introduction possible d'une fonction de courant, que le tourbillon a la même valeur tout le long d'une ligne de courant.

Retournons maintenant à l'équation générale (3) et imaginons que la densité ρ soit faiblement variable, de manière que l'on puisse poser

$$\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} \cong 0 , \qquad \nabla \times \frac{\nabla\nabla \cdot \vec{v}}{\rho} \cong 0 ,$$

bien que $\nabla \cdot \vec{v}$ ne soit pas rigoureusement nul. On aura alors de nouveau l'équation (4), qui convient donc aussi pour la description de l'évolution du champ du tourbillon dans un fluide de faible compressibilité. Si cette évolution est lente, on aura de nouveau une équation analogue à celle de la conductibilité, au terme $\vec{\omega} \cdot \nabla\vec{v}$ près. Or on peut négliger ce terme lorsque le champ du tourbillon n'est nulle part intense et que ρ est faiblement variable. En effet, le tenseur $\nabla\vec{v}$ peut être écrit comme la somme $\nabla\vec{v} = \Phi + \Omega$ de sa partie symétrique Φ et de sa partie antisymétrique Ω. Le tenseur Ω est alors dual du vecteur $\vec{\omega}$, de sorte que, dans $\vec{\omega} \cdot \nabla\vec{v} = \vec{\omega} \cdot \Phi + \vec{\omega} \cdot \Omega$, le vecteur $\vec{\omega} \cdot \Omega$ est en valeur absolue inférieur à $6\omega^2$. Si ω^2 est faible, $\vec{\omega} \cdot \Omega$ est négligeable. Quant à $\vec{\omega} \cdot \Phi$, on peut le calculer

en imaginant que Φ est réduit aux axes principaux x, y, z avec les composantes a, b, c qui valent $\partial v_x/\partial v$, $\partial v_y/\partial y$, $\partial v_z/\partial z$, et l'on montre que $|\vec{\omega} \,.\, \Phi| < |\omega\nabla \,.\, \vec{v}|$.

Si le fluide est peu compressible et le champ $\vec{\omega}$ peu intense, $|\omega\nabla \,.\, \vec{\omega}|$ est négligeable. Ainsi on peut biffer les termes $\vec{v} \,.\, \nabla\vec{\omega} - \vec{\omega} \,.\, \nabla\vec{v}$ dans (4) et l'on obtient l'équation

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{\omega} \tag{6}$$

pour décrire l'évolution lente d'un champ peu intense du tourbillon dans un fluide peu compressible soumis à des forces qui dépendent d'un potentiel.

Université de Berne.
Séminaire de Physique théorique.