Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 27 (1945)

Artikel: Étude de la statistique attachée à l'opérateur i/q à l'aide de sa fonction caractéristique

Autor: Arnous, Edmond

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742509

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Edmond Arnous. — *Etude de la statistique attachée à l'opérateur* $i\partial/\partial q$ *à l'aide de sa fonction caractéristique.* — Note transmise par R. Wavre.

En nous inspirant de la Mécanique ondulatoire, nous pouvons, pour un élément donné X de l'espace de Hilbert E, attacher une statistique à tout opérateur linéaire et hermitien A. La donnée d'une statistique étant équivalente à celle d'une répartition de masses le long d'un axe Ox, nous pouvons, ou bien nous donner la fonction de répartition $F(x)$ (poids de l'intervalle $-\infty, x$), ou bien la fonction caractéristique $\varphi(t)$ (transformée de Laplace-Stieltjes de $F(x)$). La Mécanique ondulatoire nous invite, ainsi que nous l'avons montré ailleurs[1], à choisir la fonction caractéristique et à poser:

$$\varphi(t) = (X, e^{itA} X) \quad \text{avec} \quad \| X \| = 1 . \tag{1}$$

Deux cas vont se présenter dans la suite: Celui d'une répartition absolument continue. La densité de répartition $f(x)$ est alors reliée à $\varphi(t)$ par la formule de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \varphi(t)\, dt . \tag{2}$$

Celui d'une répartition totalement discontinue, distribuée entre les points d'abscisses entières n. Le poids p_n au point d'abscisse n est alors relié à $\varphi(t)$ par la formule:

$$p_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(t)\, dt . \tag{3}$$

Nous allons montrer, en nous plaçant dans la représentation fonctionnelle E_f de E, comment la fonction caractéristique (1) permet d'étudier la statistique attachée à l'opérateur « quan-

[1] C. R. Acad. des Sc. Paris, 1944, t. 218, p. 108. Voir aussi les notes des 19 juin, 16 août 1944, 12 et 19 mars 1945.

tité de mouvement » $i\partial/\partial q$ et de retrouver de façon rapide les résultats connus. X est maintenant une fonction de carré sommable d'une variable q (ou de plusieurs); nous la supposerons analytique. Il faut distinguer deux cas: q varie de $-\infty$ à $+\infty$ et q varie de a à b (mettons de $-\pi$ à π). Etudions le premier. Calculons la fonction caractéristique.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X} e^{-t\partial/\partial q} X \, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X}(q) X(q-t) \, dq \ . \qquad (4)$$

Désignons par LX la transformée de Fourier-Laplace de X

$$LX = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixq} X(q) \, dq \ .$$

Calculons enfin $\overline{LX} \, . \, LX$ et comparons à (2), il vient:

$$\overline{LX} \, . \, LX = 2\pi f(x) \ . \qquad (5)$$

Comme la densité de répartition de la variable q est $\overline{X}X$, nous pouvons énoncer ce résultat en disant: *la statistique de* $i\partial/\partial q$ *au point* X *est la même que celle de* q *au point* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ LX.

Mais alors, pour comparer les deux statistiques, il suffit de comparer les modules de X et LX, et ceci nous mène facilement à la relation d'Heisenberg qui relie les écarts-types $\sigma_1 \, . \, \sigma_2 \geqslant \frac{1}{2}$.

Passons au deuxième cas. L'intégrale (4) est maintenant prise entre $-\pi$ et π et nous devons poser:

$$L_n X = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inq} X(q) \, dq \ . \qquad (6)$$

Calculons $\overline{L_n X} \, . \, L_n X$ et comparons à (3), il vient:

$$\overline{L_n X} \, . \, L_n X = 2\pi p_n \ .$$

Bien d'autres questions de ce genre peuvent être étudiées à l'aide de la fonction caractéristique. C'est le cas de celles qui, en Mécanique ondulatoire, correspondent à la *théorie du centre*

de gravité d'un système de points $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ [1]. Ainsi étudions l'opérateur $P = \Sigma_k\, i\,\partial/\partial x_k$. Introduisons les coordonnées x_g, y_g, z_g du centre de gravité et les coordonnées ξ_k, η_k, ζ_k autour du centre de gravité et calculons la fonction caractéristique de P

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int \overline{X} \,.\, X(\ldots, x_k - t, \ldots)\, dv = \\ &= \int \overline{X}(\ldots, \xi_k + x_g, \ldots)\, X(\ldots, \xi_k + x_g - t, \ldots)\, dv = \\ &= \int \overline{X}(\ldots, \xi_k + x_g, \ldots)\, e^{-t\partial/\partial x g}\, X(\ldots, \xi_k + x_g, \ldots)\, dv\,.\end{aligned}$$

Par suite, la statistique de P est la même que celle de $i\,\partial/\partial x_g$, ou, dans le langage de la Mécanique ondulatoire, la quantité de mouvement totale du système est égale à la quantité de mouvement du centre de gravité. Etudions de même l'opérateur « moment cinétique » $M_z = \Sigma_k\, i(x_k\, \partial/\partial y_k - y_k\, \partial/\partial x_k)$ dont la fonction caractéristique est:

$$\begin{aligned}\int \overline{X}\, e^{itM_z}\, X\, dv &= \int \overline{X} \,.\, X(\ldots, e^{itM_z} x_k, e^{itM_z} y_k, e^{itM_z} z_k, \ldots)\, dv \\ &= \int \overline{X} \,.\, X(\ldots, x_k \cos.\, t + y_k \sin.\, t, -x_k \\ &\qquad \sin.\, t + y_k \cos.\, t, z_k, \ldots)\, dv\,.\end{aligned}$$

Un calcul analogue au précédent montre alors que la statistique de M_z est la même que celle de

$$i(x_g\, \partial/\partial y_g - y_g\, \partial/\partial x_g) + i\,\Sigma_k(\xi_k\, \partial/\partial \eta_k + \eta_k\, \partial/\partial \xi_k)\,.$$

Ceci traduit le deuxième théorème de Koenig. On voit combien la méthode de la fonction caractéristique se révèle souple dans les applications.

(Cette note fait suite à cinq notes communiquées par M. L. de Broglie jusqu'en mars 1945 à l'Académie des Sciences de Paris et parues aux *Comptes rendus* de cette académie.)

[1] Voir L. de Broglie, *Méc. ond. des syst. de corpusc.* Paris, 1939, pp. 75 et 85.