Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 2 (1949)

Artikel: Sur la diffusion par électrons libres dans une atmosphère stellaire étendue

Autor: Bouvier, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739723

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA DIFFUSION PAR ÉLECTRONS LIBRES DANS UNE ATMOSPHÈRE STELLAIRE ÉTENDUE

PAR

Pierre BOUVIER

Résumé. — Le problème étudié ici concerne une atmosphère stellaire de courbure non négligeable, qui diffuse le rayonnement d'après l'effet Thomson. Nous suivons, pour résoudre l'équation de transfert d'énergie, la méthode utilisée par Chandrasekhar dans le problème analogue relatif à une atmosphère stratifiée en couches planes. Le calcul ne peut s'achever qu'en admettant pour le coefficient d'absorption $\varkappa\rho$ une dépendance de la distance au centre r de la forme $\varkappa\rho = c.r^{-\alpha}$ (c, α constantes). Nous donnons les résultats numériques pour $\alpha = 4$, alors que Chandrasekhar ne s'était occupé que du cas $\alpha = 2$. Dans les deux cas, d'ailleurs, l'anisotropie de l'effet Thomson n'introduit pas de modification essentielle, comme on pouvait s'y attendre.

La diffusion par électrons libres (effet Thomson).

La diffusion du rayonnement par un électron libre est régie, pour les fréquences $\nu \ll mc^2/h \simeq 10^{20}$ sec^{-1}, par la section différentielle efficace de Thomson

$$dQ = r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} d\Omega \qquad (1)$$

qui fournit la probabilité de diffusion dans un cône d'angle solide $d\Omega$, incliné d'un angle Θ sur la direction du rayonnement incident. $r_0^2 = \frac{e^2}{mc^2}$ est le carré du « rayon » classique de l'électron diffuseur ($\simeq 10^{-13}$ cm); m, c, h, e ont les significations usuelles. La fréquence ν de la radiation reste inchangée au cours du processus.

La section différentielle (1) peut se décomposer, à la façon d'une probabilité composée, en un produit de la forme

$$dQ = Q \frac{\gamma}{4\pi} d\Omega \tag{2}$$

où la section efficace totale vaut

$$Q = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6{,}57 . 10^{-25}\, cm^2 \; ;$$

$\frac{\gamma}{4\pi} d\Omega$ est la probabilité pour que le quantum de rayonnement, une fois diffusé, le soit précisément dans la direction Θ:

$$\frac{\gamma}{4\pi} d\Omega = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \Theta)\, d\Omega \; . \tag{3}$$

Le recul de l'électron est ici négligeable; il en va de même du freinage de radiation. D'ailleurs, même si on voulait tenir compte de ce dernier, ce qui obligerait à pousser jusqu'à la troisième approximation en e^2/hc, $\gamma d\Omega/4\pi$ resterait inchangé car les divers travaux effectués sur cette question [1] montrent que la section (1) est alors multipliée par un facteur voisin de l'unité, dépendant de la fréquence ν mais pas de l'angle de diffusion Θ.

Dans deux articles [2] (que nous désignerons par III et V selon le rang qu'ils occupent dans une série de sept communications consacrées à l'équilibre radiatif des atmosphères stellaires), S. Chandrasekhar aborde le problème du transfert d'énergie

[1] P. Bouvier, thèse, Kundig, Genève, 1947, où l'on trouvera d'autres références.

[2] S. Chandrasekhar, *Ap. J.*, *100*, 117, 1944; *101*, 95, 1945.

rayonnante diffusée selon (3) à travers une atmosphère stratifiée en couches plan-parallèles (ceci dans III), pour étudier ensuite (en V) l'influence de la courbure dans le cas d'une diffusion isotrope.

Nous désirons discuter ici le cas intermédiaire de la diffusion Thomson à travers une atmosphère étendue, c'est-à-dire telle que la courbure des couches extérieures ne saurait être négligée.

L'ÉQUATION DE TRANSFERT ET SA RÉSOLUTION

Soit r la distance du centre de symétrie, au point considéré où $I(r, \theta)$ est l'intensité diffusée dans la direction s, de vecteur unité $\vec{s^0}$, faisant avec r l'angle θ compté positivement à partir de $\vec{s^0}$. L'équation de transfert, caractérisant l'équilibre thermodynamique local, s'écrira sous la forme:

$$\frac{dI}{ds} = -\varkappa\rho I(r, \theta) + \\ + \frac{\varkappa\rho}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} I(r, \theta')\,\gamma(\theta', \varphi'; \theta)\,d(\cos\theta')\,d\varphi' \qquad (4)$$

où ρ est la densité, $\varkappa$ le coefficient d'absorption, indépendant de la fréquence par hypothèse (corps gris), et $\gamma\, d(\cos\theta')\, d\varphi'$ la probabilité pour qu'un quantum de rayonnement, arrivant de la direction (θ', φ'), soit diffusé dans la direction fixe $(\theta, 0)$ qui détermine avec r le plan $\varphi = 0$. Cette probabilité est donnée par (3) où Θ est l'angle des directions (θ', φ') et $(\theta, 0)$, de sorte que

$$\cos\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi'$$

Le premier membre de (4) vaudra, dans les coordonnées r, θ:

$$\frac{dI}{ds} = (\vec{s^0}, \text{grad } I) = \cos\theta\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial I}{\partial\theta}.$$

En procédant avec la variable $\mu = \cos\theta$, on obtient, après intégration sur φ', l'équation

$$\mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I}{\partial \mu} =$$

$$= -\varkappa\rho I + \frac{3\varkappa\rho}{16}\left[(3-\mu^2)\int_{-1}^{+1} I\,d\mu' + (3\mu^2-1)\int_{-1}^{+1} I\,\mu'^2\,d\mu'\right]. \tag{5}$$

Pour résoudre l'équation (5), nous suivons une méthode d'approximations successives due à G. C. Wick et qui, adaptée par Chandrasekhar [1], permet de traiter les problèmes astrophysiques reliés à l'équation de transfert d'une façon beaucoup plus systématique que les anciennes méthodes de Milne et d'autres.

Cette méthode-ci repose sur le procédé de Gauss [2], consistant à remplacer les intégrales du second membre de (5) par des sommes:

$$\sum_{-n}^{+n} a_i I_i\ , \quad \text{resp.} \sum_{-n}^{+n} a_i \mu_i^2 I_i$$

où $I_i = I(r, \mu_i)$, μ_i étant les $2n$ racines, opposées deux à deux, ($\mu_{-i} = -\mu_i$) du polynôme de Legendre $P_{2n}(\mu)$. Quant aux poids a_i, ce sont des nombres satisfaisant aux relations:

$$a_i \geqslant 0\ , \qquad a_i = a_{-i}\ , \qquad \sum_{-n}^{+n} a_i \mu_i^m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{m+1} & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases}$$

L'équation intégrodifférentielle (5) est alors remplacée, en $n^{\text{ième}}$ approximation, par le système différentiel d'ordre $2n$:

$$\mu_i \frac{dI_i}{dr} + \frac{1-\mu_i^2}{r}\left(\frac{\partial I}{\partial \mu}\right)_{\mu_i} =$$

$$= -\varkappa\rho I_i + \frac{3\varkappa\rho}{16}\left[(3-\mu_i^2)\sum_j a_j I_j + (3\mu_i^2-1)\sum_j a_j \mu_j^2 I_j\right]. \tag{6}$$

[1] S. Chandrasekhar, *Ap. J.*, *100*, 76, 1944.

[2] Riemann-Weber, *Differentialgleichungen der Physik*, t. I, p. 315; Vieweg, Braunschweig, 1925.

La convergence du procédé est assurée car, pour toute fonction continue I (μ), les sommes de Gauss diffèrent des intégrales correspondantes d'autant moins que n est grand. Il reste à éliminer les valeurs aux points μ_i, de la dérivée $\frac{\partial I}{\partial \mu}$; à cet effet, Chandrasekhar (V, p. 96) définit des polynômes $Q_m(\mu)$ à l'aide de la relation

$$P_m(\mu) = -\frac{dQ_m}{d\mu}$$

où l'on déterminera la constante d'intégration par la condition toujours réalisable $Q_m = 0$ pour $|\mu| = 1$. Il en résulte que $Q_m(\mu)$ est divisible par $1 - \mu^2$; et que l'on peut écrire, en intégrant par parties,

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(\mu) \frac{\partial I}{\partial \mu} d\mu = \int_{-1}^{+1} I P_m(\mu) d\mu$$

ou, en termes des sommes de $n^{\text{ième}}$ approximation,

$$\sum_i a_i Q_m(\mu_i) \left(\frac{\partial I}{\partial \mu}\right)_{\mu_i} = \sum_i a_i I_i P_m(\mu_i) .$$

Il sera en outre commode de poser par la suite

$$Q_m(\mu) = \overline{Q}_m(\mu) \cdot (1 - \mu^2) .$$

Multiplions les deux membres de (6) par $a_i \overline{Q}_{mi} = a_i \overline{Q}_m(\mu_i)$ et sommons sur i de $-n$ à $+n$, nous obtiendrons ainsi, après quelques modifications au second membre, le système suivant en $n^{\text{ième}}$ approcimation:

$$\frac{d}{dr}\left(\sum_i a_i (\mu_i \overline{Q}_{mi} I_i\right) + \frac{1}{r} \sum_i a_i P_{mi} I_i = -\varkappa \rho \sum_i a_i \overline{Q}_{mi} I_i$$
$$+ \frac{1}{2} \varkappa \rho \sum_i a_i \overline{Q}_{mi} \sum_j a_j I_j + \frac{1}{4} \varkappa \rho \sum_i a_i P_{2i} \overline{Q}_{mi} \sum_j a_j P_{2j} I_j \quad (7)$$

où $P_{mi} = P_m(\mu_i)$.

Les équations (7) diffèrent de celles de Chandrasekhar (V, p. 97, éq. (11)) par le dernier terme seulement, caractéris-

tique d'une diffusion anisotrope. On vérifie d'abord que l'équation pour $m = 1$ s'intègre immédiatement et donne, comme dans le cas de la diffusion isotrope, l'expression du flux total

$$F = 2 \int_{-1}^{+1} I \mu \, d\mu = \sum_i a_i \mu_i I_i = \frac{F_0}{r^2} \tag{8}$$

F_0 étant une constante d'intégration.

Pour toute valeur paire de m, $\overline{Q}_m$ est impaire en μ et il en résulte que le second membre de (7) est réduit à son premier terme. La première approximation où $n = 1$, $m = 1$ et 2, ne différera donc pas du cas isotrope. Aussi passons-nous sans autre à la seconde approximation, pour laquelle $n = 2$ et m prend les valeurs 1, 2, 3 et 4.

Les quatre équations correspondantes (7) s'écriront plus aisément si on introduit les notations commodes:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{-n}^{+n} a_i I_i \,, \qquad H = \frac{1}{2} \Sigma a_i \mu_i I_i \,, \qquad K = \frac{1}{2} \Sigma a_i \mu_i^2 I_i \,,$$

$$L = \frac{1}{2} \Sigma a_i \mu_i^3 I_i \,, \qquad M = \frac{1}{2} \Sigma a_i \mu_i^4 I_i \,.$$

Nous aurons alors:

$$H = \frac{1}{4} \frac{F_0}{r^2} \tag{9 a}$$

$$\frac{dK}{dr} + \frac{1}{r}(3K - J) = -\varkappa \rho H \tag{9 b}$$

$$\frac{d}{dr}(5L - H) + \frac{4}{r}(5L - 3H) = -\frac{3}{2} \varkappa \rho (3K - J) \tag{9 c}$$

$$\frac{d}{dr}(7M - 3K) = -\varkappa \rho (7L - 3H) \,. \tag{9 d}$$

Aux équations 9 *b*), *c*), *d*) nous devons encore adjoindre l'identité résultant de la définition des μ_i pour $n = 2$:

$$\Sigma a_i \mu_i P_{i4} = 0 \,,$$

ou

$$35M - 30K + 3J = 0 \tag{9 e}$$

afin de déterminer les quatre inconnues J, K, L, M. Seule l'équation 9 c) diffère de l'équation correspondante pour la diffusion isotrope; cette dernière avait au second membre $\frac{5}{3}$ au lieu du facteur $\frac{3}{2}$ de 9 c).

D'une façon générale d'ailleurs, le dernier terme de (7) est proportionnel à

$$\sum_j a_j P_{2j} I_j = 3 K - J$$

ce qui montre que l'anisotropie de l'effet Thomson se traduit par une modification des coefficients de J et de K dans le second membre de toutes les équations pour m impair > 1.

Ainsi l'équation pour $m = 5$, qui intervient dès la troisième approximation, a pour second membre

$$-\varkappa\rho\left(\frac{21}{8}M + \frac{3}{40}J - \frac{9}{5}K\right)$$

au lieu de

$$-\varkappa\rho\left(\frac{21}{8}M + \frac{7}{120}J - \frac{7}{4}K\right)$$

en diffusion isotrope.

Remarquons aussi que la relation $3K - J = 0$ du cas isotrope n'est autre que l'expression de la pression de radiation p', égale au tiers de la densité d'énergie u, le tenseur des pressions étant sous forme diagonale. On vérifie en effet aisément que $K = c.p'$ et $J = c.u$.

La solution de seconde approximation.

Le calcul sera ici pareil à celui de Chandrasekhar (V, p. 101 à 103); il ne peut d'ailleurs être mené jusqu'au bout que moyennant une hypothèse sur la dépendance de $\varkappa\rho$ à l'égard de r. Par raison de simplicité, on adopte une loi du type

$$\varkappa\rho = c r^{-\alpha} \tag{10}$$

c et α étant deux constantes. Toute autre forme de loi paraît en effet se heurter à des difficultés de calcul considérables.

En prenant $\alpha > 1$, on introduira la profondeur optique (opacité radiale) τ, mesurée du bord $r \simeq \infty$ de l'atmosphère vers l'intérieur:

$$\tau = \int_r^\infty \varkappa \rho \, dr = \frac{c}{\alpha - 1} \frac{1}{r^{\alpha-1}} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\alpha-1}$$

où r_1 est la valeur de r où $\tau = 1$. Après élimination de M entre les équations 9 *d*) et 9 *e*), il reste une équation en J, K, L, H qui, jointe à l'équation 9 *c*), permet l'élimination de la fonction $Y = 5L - 3H$. C'est au cours de cette seconde élimination que l'emploi de la variable indépendante τ se révèle avantageux; on est alors naturellement amené à mesurer les intégrales J, K, L, H en unités du flux $\frac{F_0}{r_1^2}$. Nous obtenons finalement une équation de la forme

$$x^2 \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + z \frac{d\Phi}{dz} - (z^2 + \nu^2)\Phi = -z^{\mu+1} \qquad (11)$$

où

$$z = q\tau, \qquad \nu = \frac{\alpha + 5}{2(\alpha - 1)}, \qquad \mu = \frac{3 - \alpha}{2(\alpha - 1)}$$

$$X = 3K - J = q^{-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} z^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}} \frac{7}{3(\alpha - 1)} \Phi(z) \qquad (12)$$

q est un nombre qui vaut $\frac{\sqrt{35}}{3} = 1{,}9720$ en diffusion isotrope et $\sqrt{\frac{7}{2}} = 1{,}8708$ dans le problème examiné ici.

L'équation (11) est une équation de Bessel d'argument imaginaire $i\nu$, avec second membre. Privée de ce dernier, elle admet les deux solutions particulières réelles et linéairement indépendantes, généralement désignées[1] par $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$. $I_\nu(z)$ s'exprime par une série de puissances croissantes de z, débutant par un terme $\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$, tandis que

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}$$

[1] G. N. Watson, *Theory of Bessel functions*, Cambridge, 1922, p. 77.

tend vers zéro comme e^{-z} lorsque $z \longrightarrow \infty$. L'application de la méthode de variation des constantes permet d'écrire la solution générale de (11) sous la forme

$$\Phi(z) = I_\nu(z) \int_z^{c_1} z^\mu K_\nu(z)\, dz + K_\nu(z) \int_{c_2}^{z} z^\mu I_\nu(z)\, dz \qquad (13)$$

où l'on fera $c_1 = \infty$ et $c_2 = 0$, en vertu des conditions aux limites d'après lesquelles aucune des quantités observables ne doit tendre exponentiellement vers l'infini quand $z \longrightarrow \infty$, et toutes les quantités doivent s'annuler à la limite extérieure de l'atmosphère $z = 0$.

Sitôt connue la fonction $\Phi(z)$, nous revenons aux grandeurs X, donnée par (12), K par (9 *b*), J par (12) :

$$K = \frac{1}{\alpha - 1} \int_0^z X \frac{dz}{z} + \frac{\alpha - 1}{4(\alpha + 1)} \tau^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \qquad (14\,a)$$

$$J = 3K - X \qquad (14\,b)$$

$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I d\mu$ étant la densité de quantité de mouvement du rayonnement.

Indétermination relative de l'exposant α. Calcul du cas $\alpha = 4$.

Nous n'avons pour l'instant aucun moyen de déterminer l'exposant α qui figure dans la loi (10) régissant la structure de l'atmosphère. Il est vrai que certaines recherches sur les systèmes doubles à éclipses [1] ainsi que sur les enveloppes en expansion des *novæ* font porter l'attention plus particulièrement sur les valeurs de α comprises entre 1 et 1,5. Cependant, les conclusions de ces travaux sont encore très discutables et difficilement vérifiables, de sorte qu'aucune valeur positive de α n'est à exclure à priori, bien qu'une valeur élevée soit

[1] C. Payne, S. Gaposchkin, *Ap. J.*, *101*, 56, 1945.

improbable puisque, d'après (10), l'extension moyenne de l'atmosphère est d'autant plus faible que α est grand.

Chandrasekhar et miss Herman ont calculé numériquement la solution (13) pour $\alpha = 2$, en donnant sous forme de table [1], les valeurs de K, J et $\frac{1}{4}z^3$ qui exprime J en première approximation. Il se dégage de ces résultats que la seconde approximation corrige la première dans une mesure pouvant atteindre 10%.

Le cas $\alpha = 1{,}5$ met en jeu les fonctions $I^{13/2}(z)$ et $K^{13/2}(z)$ qui comportent des facteurs exponentiels $\frac{e^{\pm z}}{\sqrt{z}}$ multipliant des puissances négatives de z pouvant aller jusqu'à la sixième. Le calcul devient, déjà pour $\Phi(z)$, non seulement fastidieux, mais pratiquement impossible à conduire avec précision si l'on ne dispose que de tables de logarithmes à cinq décimales.

En adoptant $\alpha = 1^2/_3$, on pourrait songer à profiter des tables établies [2] pour $I_2(z)$ et $K_2(z)$, mais comme il faut effectuer numériquement deux quadratures successives pour obtenir les grandeurs physiques J et K, les causes d'imprécision sont nombreuses.

Parmi les valeurs de $\alpha > 2$, nous retiendrons $\alpha = 4$ pour laquelle les fonctions I_ν et K_ν ont une forme plutôt simple:

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\operatorname{ch} z - \frac{1}{z}\operatorname{sh} z\right),$$

$$K_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

Le calcul de $\Phi(z)$ conduit, pour (13), à la valeur suivante:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}z^{-1/2}(\operatorname{ch} z - z^{-1}\operatorname{sh} z)\left[3z^{-2/3}e^{-z} + \mathrm{E}i_{2/3}(z) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2}z^{-1/2}e^{-z}(1 + z^{-1})\left[3z^{-2/3}\operatorname{sh} z - \mathcal{C}i_{2/3}(z)\right] \qquad (15)$$

[1] S. Chandrasekhar, V, p. 104.
[2] G. Watson, *loc. cit.*, p. 736.

où nous avons posé

$$\mathrm{E}i_{2/3}(z) = \int_0^z z^{-2/3} e^{-z}\, dz\ , \qquad \mathcal{C}\, i_{2/3}(z) = \int_0^z z^{-2/3} \operatorname{ch} z\, dz\ .$$

Les formules (12) et (14) donneront ensuite:

$$q^{5/3}\, \mathrm{X}(z) = \frac{7}{9} z^{5/3}\, \Phi(z) \tag{16 a}$$

$$q^{5/3}\, \mathrm{K}(z) = \frac{1}{3} q^{5/3} \int_0^z \mathrm{X}(z)\, \frac{dz}{z} + \frac{3}{20} z^{5/3} \tag{16 b}$$

$$q^{5/3}\, \mathrm{J}(z) = 3 q^{5/3}\, \mathrm{K}(z) - q^{5/3}\, \mathrm{X}(z)\ . \tag{16 c}$$

Les intégrales $\mathrm{E}i_{2/3}$ et $\mathcal{C}\, i_{2/3}$ ont été calculées numériquement, à partir des séries

$$\mathrm{E}i_{2/3}(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!} \frac{3}{3n+1} z^{n+1/3}$$

$$\mathcal{C}\, i_{2/3}(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n)\,!} \frac{3}{6n+1} z^{2n+1/3}$$

où il faut prendre un nombre de termes toujours plus grand à mesure que n augmente; nous avons fait les calculs avec trois décimales, pour z allant de 0, de dixième en dixième, jusqu'à 2. L'intégrale en (16 *b*) a été évaluée par trapèzes; les valeurs en sont peu précises quand l'intervalle d'intégration est faible, aussi n'avons nous noté ici que les valeurs de J et de K à partir de 0,5. La dernière colonne de la table ci-jointe concerne le terme $\frac{9}{20} z^{5/3}$ qui donne $q^{5/3}\, \mathrm{J}(z)$ en première approximation ($\mathrm{X} = 0$). Les résultats ainsi obtenus sont proches de ceux de Chandrasekhar pour $\alpha = 2$; J et K croissent un peu plus lentement, dans notre cas, lorsqu'on va du bord $z = 0$ de l'atmosphère vers l'intérieur, et la seconde approximation de J introduit, vis-à-vis de la première, des corrections allant jusqu'à environ 10%, comme dans le cas $\alpha = 2$; ceci du moins jusqu'à $z = 2$.

z	$q^{5/3}$ X	$q^{5/3}$ K	$q^{5/3}$ J	$\frac{9}{20} z^{5/3}$	z	$q^{5/3}$ X	$q^{5/3}$ K	$q^{5/3}$ J	$\frac{9}{20} z^{5/3}$
0	0	0	0	0					
0,1	0,0098			0,010	1,1	0,227	0,238	0,488	0,525
0,2	0,027			0,031	1,2	0,246	0,274	0,577	0,610
0,3	0,049			0,061	1,3	0,264	0,312	0,671	0,697
0,4	0,073			0,098	1,4	0,281	0,351	0,773	0,788
0,5	0,094	0,070	0,115	0,142	1,5	0,296	0,393	0,883	0,884
0,6	0,117	0,093	0,163	0,192	1,6	0,310	0,437	1,000	0,985
0,7	0,142	0,118	0,203	0,248	1,7	0,322	0,482	1,124	1,090
0,8	0,164	0,146	0,272	0,310	1,8	0,335	0,529	1,253	1,198
0,9	0,185	0,175	0,340	0,377	1,9	0,344	0,578	1,395	1,312
1,0	0,206	0,206	0,412	0,450	2,0	0,356	0,629	1,531	1,429

En quoi la diffusion Thomson vient-elle modifier les valeurs calculées ci-dessus ? Rappelons que le nombre q vaut $q = 1{,}9720$ dans le problème isotrope et $q' = 1{,}8708$ avec l'effet Thomson. Plaçons-nous en un point de l'atmosphère où τ prend une valeur donnée, à laquelle correspondront deux valeurs de z: $z = q\tau$, $z' = q'\tau$. Le rapport des densités de courant d'énergie $\frac{J(z)}{J(z')}$ est alors égal au rapport des valeurs données dans les tables, multiplié par $\left(\frac{q'}{q}\right)^3$ si $\alpha = 2$, ou par $\left(\frac{q'}{q}\right)^{5/3}$ si $\alpha = 4$. Nous avons calculé ce rapport pour $z = 0{,}5$; 1; 1,5 et 2; les valeurs en sont toutes comprises entre 0,95 et 1, aussi bien pour $\alpha = 2$ que pour $\alpha = 4$; et les rapports $\frac{K(z)}{K(z')}$ se comportent de façon analogue.

Il en résulte que l'effet Thomson n'exerce aucune influence notable sur le courant d'énergie rayonnante, ce qui est en accord avec la conclusion du même problème concernant une atmosphère à stratification plane [1]. De plus, comme le laisse penser la comparaison des deux cas $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$ sur ce point, l'anisotropie de la diffusion par électrons libres paraît être indépendante de la valeur de α dans la loi de structure (10).

[1] S. CHANDRASEKHAR, III, p. 126.