Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 8 (1955)
Heft: 1

Artikel: Une extension particulière de la méthode de Wiener-Hopf
Autor: Bouvier, Pierre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739841

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

cette distinction et les propriétés du parallélisme sont des conséquences des conventions faites sur l'ordre.

La considération des éléments impropres permet de montrer facilement la vanité de la recherche d'une géométrie ressemblant à celle connue et telle qu'une droite posséderait trois points impropres. En effet, dans toute géométrie élémentaire, le déplacement joue un rôle important. Le déplacement d'une droite sur elle-même est une projectivité dans laquelle les points impropres sont unis. Or l'existence de trois éléments impropres fait de toute projectivité une identité; une telle géométrie ignorerait la notion de déplacement.

Pierre Bouvier. — *Une extension particulière de la méthode de Wiener-Hopf.*

Nous savons que l'équation de transfert, écrite pour une atmosphère stratifiée en couches planparallèles sous la forme

$$\mu \frac{d\mathrm{I}}{d\tau} = \mathrm{I} - \mathcal{J} \tag{1}$$

relie l'intensité $\mathrm{I}(\tau, \mu)$ à la profondeur optique τ et dans la direction $\theta = \cos^{-1} \mu$ à la fonction-source $\mathcal{J}$. En prenant les transformées de Laplace des deux membres de (1), l'on obtient sans peine l'égalité

$$\overline{\mathrm{I}}(p, \mu) = \frac{\overline{\mathcal{J}} - \mu \mathrm{I}(0, \mu)}{1 - p\mu} \tag{2}$$

où

$$\overline{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

désigne la transformée de Laplace de $f(t)$ et où à la surface de l'atmosphère $\tau = 0$,

$$\mathrm{I}(0, \mu) = 0 \text{ si } \mu < 0 , \qquad \mu \mathrm{I}(0, \mu) = \overline{\mathcal{J}}(1/\mu) \text{ si } \mu > 0 .$$

Jusqu'ici I et $\mathcal{J}$ peuvent être considérées comme des fonctions de la direction μ, de la fréquence ν et de la profondeur τ_ν.

Cependant, pour faire de (2) une équation intégrale en la transformée de la fonction-source, il nous faut une condition supplémentaire telle que la constance du flux net intégré [1].

Cette dernière condition, que nous conserverons, nous porte à envisager dans (2) I et $\mathcal{J}$ comme grandeurs intégrées et non plus monochromatiques, fonctions de μ et de τ, où cette dernière variable ne dépend pas de la fréquence (atmosphère grise). Adoptons pour la fonction-source la forme assez générale

$$\mathcal{J}(\tau, \mu) = \sum_n A_n(\mu) J_n(\tau) \tag{3}$$

où les $A_n(\mu)$ sont des polynômes, et les J_n sont les intégrales

$$J_n(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^n I(\tau, \mu) \, d\mu$$

avec, en particulier $J_0 = J$ (intensité totale), $4J_1 = F$ (flux net), $J_2 = K$. En supposant que dans (3), la somme comporte un nombre fini N de termes, multiplions les deux membres de (2) par μ^m, intégrons ensuite sur μ de -1 à $+1$, et laissons prendre à m les valeurs 1, 2, ..., N. Nous aurons obtenu un système linéaire d'ordre N entre les $\overline{J}_n$, de la forme

$$\overline{J}_m(p) = \sum_n a_{mn} \overline{J}_n(p) - g_m \tag{4}$$

où les seconds membres

$$g_m(p) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mu^{m+1} I(0, \mu)}{1 - p\mu} \, d\mu$$

recèlent l'intensité émergente $I(0, \mu)$ et dont les coefficients

$$a_{mn}(p) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu^m A_n(\mu)}{1 - p\mu} \, d\mu$$

[1] Pour plus de détails, voir les ouvrages de R. v. d. R. Woolley et D. W. N. Stibbs, *The Outer layers of a star* (Oxford, 1953), ch. III, § 3; V. Kourganov, *Basic methods in transfer problems* (Oxford, 1952), ch. VI, § 29.

sont liés par les relations

$$a_{mn} = p^2 a_{m+2,n} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^m (1 + p\mu) A_n(\mu) d\mu$$

faciles à vérifier.

Nous allons poursuivre cette étude en nous limitant, pour simplifier, au cas où, dans l'expression (3), tous les A_n sont nuls sauf

$$A_0 = \frac{3}{8}(3 - \mu^2) \qquad \text{et} \qquad A_2 = \frac{3}{8}(3\mu^2 - 1)$$

Ceci correspond à une diffusion anisotrope de Rayleigh-Thomson. Le système (4) pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} a\overline{J} + b\overline{K} &= g_1 \\ c\overline{J} + d\overline{K} &= g_3 \end{aligned} \qquad (5)$$

où

$$a = 1 - \frac{3}{16}\int_{-1}^{+1} \frac{3 - \mu^2}{1 - p\mu} d\mu \qquad c = -\frac{3}{16}\int_{-1}^{+1} \frac{3 - \mu^2}{1 - p\mu} \mu^2 d\mu$$

$$b = -\frac{3}{16}\int_{-1}^{+1} \frac{3\mu^2 - 1}{1 - p\mu} d\mu \qquad d = 1 - \frac{3}{16}\int_{-1}^{+1} \frac{3\mu^2 - 1}{1 - p\mu} \mu^2 d\mu$$

$$g_1 = -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{\mu I(0, \mu)}{1 - p\mu} d\mu \qquad g_3 = -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{\mu^3 I(0, \mu)}{1 - p\mu} d\mu$$

Tenant compte de ce que

$$a = p^2 c \qquad b = p^2 (d - 1)$$

la solution du système (5) s'écrira

$$\overline{J}(p) = \frac{g_1}{a} + (p^{-2} g_1 - g_3)\frac{b}{a}$$

$$\overline{K}(p) = g_3 - p^{-2} g_1$$

La fonction $a(p)$ est holomorphe si $-1 < \mathcal{R}(p) < +1$ et possède un zéro double à l'origine. $g_1(p)$ est holomorphe si $\mathcal{R}(p) < 1$; quant à

$$g = p^{-2} g_1 - g_3 = -\frac{1}{2p^2} \int_0^1 \mu (1 + p\mu) \, \mathrm{I}(0, \mu) \, d\mu$$

c'est une fonction méromorphe dont le seul pôle, double, est à l'origine. Sa valeur changée de signe, qu'on peut écrire

$$-g = \frac{\mathrm{F}}{4p^2} + \frac{\mathrm{K}(0)}{p}$$

concorde avec la transformée de Laplace de $\frac{1}{4}\,\mathrm{F} \,.\, \tau + \mathrm{K}(0)$.

De même que $a(p)$, $b(p)$ est holomorphe quand $-1 < \mathcal{R}(p) < +1$ et possède un zéro double à l'origine; il en résulte que

$$g(p)\, b(p) = \frac{3}{32p^2} \int_0^1 \mu (1 + p\mu) \, \mathrm{I}(0, \mu) \, d\mu \int_{-1}^{+1} \frac{3\mu'^2 - 1}{1 - p\mu'} \, d\mu'$$

est holomorphe à l'origine et comme à toute singularité $p = -\frac{1}{\mu'} < -1$ de $b(p)$ correspond la valeur $\frac{1}{\mu'} = -\frac{1}{\mu}$ qui annule $1 + p\mu$, nous pouvons déduire de là, que $g(p)\, b(p)$ est holomorphe si $\mathcal{R}(p) < 1$. Posant alors $g_1 + b \,.\, g = \gamma(p)$ nous sommes en mesure de traiter la fonction

$$\overline{\mathrm{J}}(p) = \frac{\gamma(p)}{a(p)} \tag{6}$$

selon la méthode de Wiener-Hopf.

Introduisons donc

$$\mathrm{T}(p) = \frac{p^2 - 1}{p^2} \, a(p)$$

qui est une fonction paire, valant 0,3 à l'origine et tendant vers l'unité lorsque $|p| \longrightarrow \infty$ tout en restant dans la bande verticale du plan complexe définie par $-1 < \mathcal{R}(p) < 1$. En conséquence,

$$\varphi(p) = ln\, \mathrm{T}(p)$$

est uniforme dans cette bande, tendant vers zéro si $|p| \longrightarrow \infty$; la formule de Cauchy permet d'écrire

$$\varphi(p) = \int \frac{\varphi(w)}{w - p} \, dw = \varphi_+(p) - \varphi_-(p)$$

où $\varphi_+(p)$ désigne l'intégrale sur la droite verticale coupant l'axe réel à la distance $\beta\,(0 < \beta < 1)$, $\varphi_-(p)$ la même intégrale le long de la droite symétrique de la précédente par rapport à l'axe imaginaire. On peut alors mettre $T(p)$ sous la forme

$$T(p) = \frac{T_+(p)}{T_-(p)}$$

avec

$$ln\, T_+ = \varphi_+ , \qquad ln\, T_- = \varphi_-$$

L'équation (6) devient ainsi

$$\frac{p^2 \overline{J}(p)}{(p+1)\, T_-(p)} = \frac{(p-1)\,\gamma(p)}{T_+(p)} \tag{7}$$

où le second membre, holomorphe dans le domaine $\mathcal{R}(p) < \beta < 1$, est le prolongement analytique du premier, holomorphe si $\mathcal{R}(p) > 0$. Les fonctions impliquées en (7) étant pareilles, quant à leurs propriétés, à celles du cas isotrope, nous concluons au caractère borné à l'infini (et par suite dans tout le plan) des deux membres de (7), lesquels sont alors égaux, en vertu du théorème de Liouville, à une constante C:

$$\overline{J}(p) = C\,\frac{p+1}{p^2}\, T_-(p)$$

Comparant, au voisinage de l'origine, les valeurs de $J(p)$ obtenues ici

$$\overline{J}(p) = C\,\frac{T_-(0)}{p^2} + C\,\frac{T_-(0) + T'_-(0)}{p} + \ldots$$

et antérieurement comme solution de (5),

$$\overline{J}(p) = \frac{g_1 - gb}{a} = \frac{3F}{4p^2} + \frac{3K(0)}{p} + \ldots$$

nous en tirons l'expression de C

$$C = \frac{3F}{4T_-(0)}$$

avec

$$ln\, T_-(0) = -\frac{1}{2}\, ln\, T(0)\ , \qquad \text{donc} \qquad T_-(0) = \frac{1}{\sqrt{0,3}}$$

de sorte que

$$\overline{J}(p) = \frac{3F}{4}\sqrt{0,3}\,\frac{p+1}{p^2}\,T_-(p)$$

La fonction $q(\tau)$ définie par $J(\tau) = \frac{3}{4}F[\tau + q(\tau)]$ admet en particulier les valeurs

$$q(0) = \lim_{p=\infty} pq(p) = \sqrt{0,3}$$

à l'origine et

$$q(\infty) = \lim_{p=0} pq(p) = 1 + \frac{T'_-(0)}{T_-(0)} = 1 + \frac{1}{\pi i}\int_0^{i\infty} \frac{T'}{T}\,\frac{dw}{w}$$

à l'infini avec

$$\frac{T'(w)}{w\,T(w)} = -\frac{2}{w^2} + \frac{2}{w^2-1} + \frac{a'(w)}{w\,a(w)}$$

$$= -\frac{2}{w^2} + \frac{2}{w^2-1} - 3\,\frac{w^2-1}{w^2(3w^2-1)} -$$

$$- \frac{23w^6 - 33w^4 + 17w^2 - 3}{w^2(w^2-1)^2\left[1 - \frac{1}{2w}\,ln\,\frac{w+1}{w-1}\right] - \frac{w^4}{3}(w^2-1)}$$

La loi d'assombrissement s'écrira

$$I(0,\mu) = \frac{3}{8\mu}\left\{(3-\mu^2)\,\overline{J}\left({}^1/_\mu\right) + (3\mu^2-1)\,\overline{K}\left({}^1/_\mu\right)\right\}$$

où

$$\overline{J}\left({}^1/_\mu\right) = \frac{3F}{4}\sqrt{0,3}\,\mu(\mu+1)\,T_-\left({}^1/_\mu\right)$$

$$T_-\left({}^1/_\mu\right) = \exp\left\{-\frac{\mu}{\pi}\int_0^\infty \frac{ln\,T(it)}{1+\mu^2t^2}\,dt\right\}$$

$$\overline{K}\left({}^1/_\mu\right) = \frac{F}{4}\mu^2 + K(0)\,\mu$$

et comme

$$K(0) = \frac{F}{4}\,q(\infty)$$

nous aurons finalement

$$I(0, \mu) = \frac{3F}{32}\left\{3\sqrt{0,3}\,(3 - \mu^2)(\mu + 1)\,T_-(^1/_\mu) + (3\mu^2 - 1)[\mu + q(\infty)]\right\}$$

Ces résultats présentent, comme il fallait s'y attendre, une nette similitude de forme avec ceux du problème restreint (isotrope), mais exigent pour leur expression numérique, des calculs notablement plus compliqués.

Hermann Gisin. — *Améliorations de la technique de montage à l'acide lactique d'objets microscopiques d'histoire naturelle.*

On connaît aujourd'hui un grand nombre de milieux de montage qui permettent d'obtenir des préparations microscopiques permanentes de petits animaux et d'autres objets biologiques avec un minimum de manipulations; je pense, par exemple, aux liquides à base de gommes ou d'alcool polyvinylique. En principe, ces liquides contiennent des réactifs (éclaircissants, gonflants, réfractants, etc.) et des gommes ou des résines dissoutes dans des solvants. Les gommes ou résines ont évidemment pour rôle de solidifier le liquide après évaporation du solvant. Toutefois elles peuvent nuire à l'action du réactif qui, trop dilué, n'a plus le même effet qu'à l'état plus concentré. Certains objets mous, plus ou moins ratatinés, ne sont plus suffisamment gonflés ni éclaircis dans de tels mélanges; et une fois gonflés et ramollis dans le réactif concentré, ces objets ne supportent plus le transfert dans un autre milieu sans se rider à nouveau. C'est le cas des Collemboles, insectes microscopiques primitifs mal chitinisés, dont je n'ai jamais vu de préparations entièrement satisfaisantes au cours d'une pratique de quinze ans poursuivie en relation avec tous les spécialistes du monde. La difficulté d'obtenir des préparations impeccables a beaucoup retardé nos connaissances systématiques et par conséquent biologiques sur ce groupe d'animaux.

En 1947, j'ai publié une technique de montage permanent en milieu liquide renfermé dans une cellule de cire molle. Cette