Un cas de mouvements stellaires doublement perturbés

Autor(en): **Bouvier, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **11 (1958)**

Heft 4

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-738828

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UN CAS DE MOUVEMENTS STELLAIRES DOUBLEMENT PERTURBÉS

PAR

Pierre BOUVIER

Résumé. — Travail complémentaire à une étude antérieure. On examine de plus près les actions perturbatrices du champ galactique général et d'un nuage de matière interstellaire sur le mouvement d'une étoile à l'intérieur d'un amas.

Nous avons examiné récemment l'influence gravifique possible d'un grand nuage de matière diffuse sur la stabilité d'un amas galactique situé à proximité de ce nuage [1].

Il apparaissait que le nuage considéré pouvait, dans certaines conditions favorables, produire sur l'amas un effet de marée au moins égal à celui du champ galactique général. On ne saurait s'attendre ici à une conclusion plus nette, vu que la densité de matière diffuse est assez mal déterminée dans un nuage donné, et que les lois de force adoptées pour la Galaxie et le nuage reposent sur des modèles très simplifiés de la réalité.

En outre, le problème est rendu délicat par la présence de deux perturbations indépendantes donnant lieu à deux développements en série dont l'un converge plus vite que l'autre.

Revenons donc, pour fixer les idées, au cas où l'amas est situé dans le plan galactique et le nuage est vu, depuis l'amas, dans la direction du centre galactique. Au moyen des notations déjà utilisées en I (p. 529 et fig. 1, p. 530), nous envisageons une étoile S (X, Y, Z) attirée par le centre de gravité C (x, y, O) de l'amas avec une force par unité de masse supposée de la forme $g(\rho)$ où $\rho = \mathrm{CS}$, perturbée par l'attraction $f(\mathrm{R})$ du

centre galactique O (R = OS) et celle du nuage de centre N (x', y', O). Si le nuage est très étiré le long de la tangente au cercle de rayon ON, nous pourrons identifier son champ de gravitation à proximité de N à celui d'un cylindre droit infini d'axe normal à ON, donnant par conséquent à ce champ, si R′ = NS, la forme φ (R′). Par hypothèse,

$$\rho \ll r = \mathrm{OC}\ , \qquad \rho < r' = \mathrm{NC}\ , \qquad r' \ll r\ .$$

Restreignons-nous au mouvement de S autour de C, projeté sur le plan galactique; il est alors décrit par les équations (voir I, p. 533)

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{X}-x) + \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}} f(\mathrm{R}) - \frac{\mathrm{X}}{r} f(r) + \frac{\mathrm{X}-x}{r} f(r) +$$
$$+ \frac{\mathrm{X}-x'}{\mathrm{R}'} \varphi(\mathrm{R}') - \frac{\mathrm{X}}{r} \varphi(r') + \frac{\mathrm{X}-x}{r} \varphi(r') + \frac{\mathrm{X}-x}{\rho} g(\rho) = 0$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{Y}-y) + \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R}} f(\mathrm{R}) - \frac{\mathrm{Y}}{r} f(r) + \frac{\mathrm{Y}-y}{r} f(r) +$$
$$+ \frac{\mathrm{Y}-y'}{\mathrm{R}'} \varphi(\mathrm{R}') - \frac{\mathrm{Y}}{r} \varphi(r') + \frac{\mathrm{Y}-y}{r} \varphi(r') + \frac{\mathrm{Y}-y}{\rho} g(\rho) = 0$$

où f et φ sont choisis de la forme

$$f(\mathrm{R}) = \mathrm{K}\mathrm{R}^{-2} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \mathrm{K}'\mathrm{R}'^{-1} \qquad (\mathrm{K},\ \mathrm{K}' \text{ const.} > 0)\ .$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées de S dans le référentiel centré sur C et d'axe Cξ passant par O à tout instant. En première approximation nous avons R = $r + \xi$ et la différence

$$\delta_x = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}} f(\mathrm{R}) - \frac{\mathrm{X}}{r} f(r)$$

conduit à un terme en $\mathrm{K}\frac{\xi}{r^3}$; de même si R′ = $r' + \xi$, la différence

$$\delta'_x = \frac{\mathrm{X}-x'}{\mathrm{R}'} \varphi(\mathrm{R}') - \frac{\mathrm{X}}{r} \varphi(r')$$

donne un terme de l'ordre de $\mathrm{K}'\frac{\xi}{r'^2}$. Or, avec une masse du noyau galactique central de 1,5 . 10^{11} soleils et une densité

moyenne estimée à 10^{-23} g/cm^3 pour le nuage, il se trouve que les deux termes ci-dessus sont du même ordre de grandeur à l'égard d'un amas stellaire situé à proximité du bord du nuage et à environ 10^4 pc du centre galactique. L'on est alors fondé à considérer ces deux termes comme constituant ensemble la première approximation du problème, justifiant ainsi le point de vue adopté en I.

Cependant, étant donné que les valeurs numériques invoquées sont en partie incertaines, il convient de procéder ici à une étude plus rigoureuse.

Les termes du deuxième ordre seront, pour δ_x et δ'_x respectivement, en $K \frac{\xi}{r^3} \frac{\xi}{r}$ et en $K' \frac{\xi}{r'^2} \frac{\xi}{r'}$; comme le rapport r'/r est très inférieur à l'unité, le développement en série de δ'_x convergera plus lentement que celui de δ_x. Par conséquent, si le premier terme de δ'_x est seulement du même ordre que le deuxième terme de δ_x, on peut regarder l'influence du nuage comme négligeable, tandis qu'inversement, si le premier terme de δ_x est de l'ordre du deuxième terme de δ'_x, l'influence du champ galactique, bien qu'inférieure à celle du nuage, est à retenir dans une deuxième approximation englobant les deux premiers termes de δ'_x et le premier terme de δ_x. Par contre, le rôle du champ galactique devient négligeable si le premier terme de δ_x est du même ordre que le troisième terme de δ'_x. Le premier terme de δ_x pourrait d'ailleurs être intermédiaire entre deux termes consécutifs de δ'_x; c'est alors une question de définition relative à la numérotation des approximations successives du problème considéré.

Développons donc les différences δ'_x, δ'_y jusqu'au deuxième ordre; en tenant compte de

$$x' = \left(1 - \frac{r'}{r}\right) x \ , \qquad y' = \left(1 - \frac{r'}{r}\right) y$$

nous avons:

$$\delta'_x = \frac{x\xi}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr'} - \frac{\varphi}{r}\right) + \frac{y\eta}{r}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\varphi + \\ + \frac{x\xi^2}{2r}\frac{d^2\varphi}{dr'^2} + \frac{x\eta^2}{2rr'}\left(\frac{d\varphi}{dr'} - \frac{\varphi}{r'}\right) + \frac{y\xi\eta}{rr'}\left(\frac{d\varphi}{dr'} - \frac{\varphi}{r'}\right)$$

$$\delta'_y = \frac{y\,\xi}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr'} - \frac{\varphi}{r}\right) - \frac{x\,\eta}{r}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\varphi + \\ + \frac{y\,\xi^2}{2\,r}\frac{d^2\varphi}{dr'^2} + \frac{y\,\eta^2}{2\,rr'}\left(\frac{d\varphi}{dr'} - \frac{\varphi}{r'}\right) - \frac{x\,\xi\,\eta}{rr'}\left(\frac{d\varphi}{dr'} - \frac{\varphi}{r'}\right)$$

soit, avec $\varphi = \mathrm{K}'/r'$ et en unités K',

$$\delta'_x = -\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r}\right)\frac{x\,\xi}{rr'} + \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\frac{y\,\eta}{rr'} + \frac{x}{rr'^3}(\xi^2 - \eta^2) - \frac{2\,y}{rr'^3}\,\xi\,\eta$$

$$\delta'_y = -\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r}\right)\frac{y\,\xi}{rr'} - \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\frac{x\,\eta}{rr'} + \frac{y}{rr'^3}(\xi^2 - \eta^2) + \frac{2\,x}{rr'^3}\,\xi\,\eta$$

d'où par suite les équations du mouvement relatif de S (I, p. 534)

$$x\,\ddot{\xi} + y\,\ddot{\eta} + 2\,\omega\,(y\,\dot{\xi} - x\,\dot{\eta}) + (\alpha_1 + \alpha_1^*)\,x\,\xi + \alpha_2\,y\,\eta \\ + \alpha\,(x\,\xi^2 - 2\,y\,\xi\,\eta - x\,\eta^2) + \frac{g\,(\rho)}{\rho}\,(x\,\xi + y\,\eta) = 0$$

$$y\,\ddot{\xi} - x\,\ddot{\eta} - 2\,\omega\,(x\,\dot{\xi} + y\,\dot{\eta}) + (\alpha_1 + \alpha_1^*)\,y\,\xi - \alpha_2\,x\,\eta \\ + \alpha\,(y\,\xi^2 + 2\,x\,\xi\,\eta - y\,\eta^2) + \frac{g\,(\rho)}{\rho}\,(y\,\xi - x\,\eta) = 0 \qquad (1)$$

avec

$$\alpha_1 = -\frac{\mathrm{K}'}{r'}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r}\right),\quad \alpha_1^* = -\frac{3\,\mathrm{K}}{r^3},\quad \alpha_2 = \frac{\mathrm{K}'}{r'}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right),\quad \alpha = \frac{\mathrm{K}'}{r'}.$$

Assimilant l'amas stellaire à un ellipsoïde homogène de potentiel intérieur

$$\Omega = -\frac{1}{2}\,\beta_0 + \frac{1}{2}\,(\beta_1\,\xi^2 + \beta_2\,\eta^2 + \beta_3\,\zeta^2) \qquad (\beta_i\,,\ \text{const.} > 0)$$

nous remplacerons dans les équations (1) $\frac{g}{\rho}\,\xi$ par $\beta_1\,\xi$ et $\frac{g}{\rho}\,\eta$ par $\beta_2\,\eta$. Cela posé, si le nuage et le noyau galactique exercent des actions comparables entre elles, nous aurons, à partir de (1) le système différentiel de première approximation

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\,\omega\,\dot{\eta} + (\alpha_1 + \alpha_1^* + \beta_1)\,\xi &= 0 \\ \ddot{\eta} + 2\,\omega\,\dot{\xi} + (\alpha_2 + \beta_2)\,\eta &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

de solution générale

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_{10}\,e^{iq_1t} + \xi_{01}\,e^{iq_2t} \\ \eta &= \eta_{10}\,e^{iq_1t} + \eta_{01}\,e^{iq_2t} \end{aligned} \qquad (3)$$

q_1 et q_2 étant racines, réelles si $\alpha_1 + \alpha_1^* + \beta_1 > 0$, de l'équation bicarrée

$$q^4 - \left(\alpha_1 + \alpha_1^* + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + 4\,\omega^2\right) q^2 + \\ + \left(\alpha_1 + \alpha_1^* + \beta_1\right)(\alpha_2 + \beta_2) = 0\,. \qquad (4)$$

Les racines positives q_1, q_2 sont distinctes sauf dans le cas très particulier $\omega = 0$, $\alpha_1 + \alpha_1^* + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$ où nous avons un mouvement elliptico-harmonique, caractérisé par une seule période et conservation du moment angulaire; ce type de mouvement a fait l'objet de quelques applications astronomiques [2].

Si le champ galactique général n'agit que dans une mesure comparable au terme de deuxième ordre pour le nuage, la première approximation consistera à envisager l'attraction du nuage seul, c'est-à-dire les équations (2) où $\alpha_1^* = 0$; en deuxième approximation, nous déduisons de (1) le système non linéaire

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi} - 2\,\omega\,\dot{\eta} + a_1\,\xi + \alpha\,(\xi^2 - \eta^2) = 0 \\ &\ddot{\eta} + 2\,\omega\,\dot{\xi} + a_2\,\eta - 2\,\alpha\,\xi\,\eta = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

ayant posé

$$a_1 = \alpha_1 + \alpha_1^* + \beta_1\,, \qquad a_2 = \alpha_2 + \beta_2\,.$$

Cherchons pour (5) une solution ξ_2, η_2 de la forme

$$\xi_2 = \xi_1 + \xi\,, \qquad \eta_2 = \eta_1 + \eta \qquad (6)$$

où ξ_1, η_1 vérifient les équations (2) relatives à la première approximation du problème où l'effet du champ galactique se serait déjà manifesté au premier ordre; d'ailleurs, comme ici $\alpha_1^* \ll \alpha_1$ par hypothèse, (ξ_1, η_1) diffère peu de la solution de première approximation où $\alpha_1^* = 0$. ξ, η sont des quantités de second ordre vis-à-vis de ξ_1, η_1, de sorte que

$$\xi_2^2 = \xi_1^2 + 2\,\xi_1\,\xi\,, \qquad \eta_2^2 = \eta_1^2 + 2\,\eta_1\,\eta\,. \qquad (6')$$

Substituant (6) et (6′) en (5) et négligeant ensuite $\xi_1\,\xi$ devant ξ_1^2, (plus précisément $\alpha\xi_1\,\xi$ devant $\alpha\xi_1^2$ et $a_1\,\xi$) $\eta_1\,\eta$ devant η_1^2,

$\xi_1 \eta$ et $\xi \eta_1$ devant $\xi_1 \eta_1$, nous sommes finalement conduits à un système linéaire à coefficients constants et avec second membre

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\,\omega\,\dot{\eta} + a_1\,\xi &= -\,\alpha\left(\xi_1^2 - \eta_1^2\right) \\ \ddot{\eta} + 2\,\omega\,\dot{\xi} + a_2\,\eta &= 2\,\alpha\,\xi_1\,\eta_1\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Les quatre constantes arbitraires liées aux conditions initiales $\xi(0)$, $\eta(0)$, $\dot{\xi}(0)$, $\dot{\eta}(0)$ sont déjà contenues dans la solution du système réduit; il suffit donc d'ajouter à celle-ci une solution particulière ξ, η des équations complètes (7), équations dont la forme nous amène à essayer des expressions du type

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_{20}\,e^{2iq_1t} + \xi_{11}\,e^{i(q_1+q_2)t} + \xi_{02}\,e^{2iq_2t} \\ \eta &= \eta_{20}\,e^{2tq_1t} + \eta_{11}\,e^{i(q_1+q_2)t} + \eta_{02}\,e^{2iq_2i} \end{aligned} \tag{8}$$

où l'on exigera qu'aucune des deux fréquences angulaires q_1, q_2 ne soit double de l'autre, sinon (8) comprend l'une des solutions particulières de (2) ayant déjà servi à construire (3), ce qui contredit la définition de q_1, q_2 comme racines de (4). Par substitution de (8) dans (7), nous obtenons pour les six amplitudes complexes ξ_{20}, ..., η_{02} trois systèmes algébriques linéaires de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\left(a_1 - 4\,q_1^2\right)\xi_{20} - 4\,i\,\omega\,q_1\,\eta_{20} = \mathrm{A}_{20} \\ &4\,i\,\omega\,q_1\,\xi_{20} + \left(a_2 - 4\,q_1^2\right)\eta_{20} = \mathrm{B}_{20} \\ &[a_1 - (q_1 + q_2)^2]\,\xi_{11} - 2\,i\,\omega\,(q_1 + q_2)\,\eta_{11} = \mathrm{A}_{11} \\ &2\,i\,\omega\,(q_1 + q_2)\,\xi_{11} + [a_2 - (q_1 + q_2)^2]\,\eta_{11} = \mathrm{B}_{11} \\ &\left(a_1 - 4\,q_2^2\right)\xi_{02} - 4\,i\,\omega\,q_2\,\eta_{02} = \mathrm{A}_{02} \\ &4\,i\,\omega\,q_2\,\xi_{02} + \left(a_2 - 4\,q_2^2\right)\eta_{02} = \mathrm{B}_{02}\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Soit $\Delta(q)$ le déterminant

$$\Delta(q) = \begin{vmatrix} a_1 - 4\,q^2 & -4\,i\,\omega\,q \\ 4\,i\,\omega\,q & a_2 - 4\,q^2 \end{vmatrix}.$$

Par décomposition en somme de déterminants partiels, nous trouvons sans peine

$$\Delta(q) = \begin{vmatrix} a_1 - q^2 & -2\,i\,\omega\,q \\ 2\,i\,\omega\,q & a_2 - q^2 \end{vmatrix} + 15\,q^4 - 3\,(a_1 + a_2 + 4\,\omega^2)\,q^2$$

en particulier, tenant compte de (4) et de la relation $q_1^2 . q_2^2 = a_1 a_2$

$$\Delta (q_1) = 3 q_1^2 \left(4 q_1^2 - q_2^2\right)$$
$$\Delta (q_2) = 3 q_2^2 \left(4 q_2^2 - q_1^2\right)$$

valeurs non nulles dès l'instant où, comme il a été postulé plus haut, l'une des racines q_1, q_2 n'est pas double de l'autre. Quant au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 - (q_1 + q_2)^2 & -2 i \omega (q_1 + q_2) \\ 2 i \omega (q_1 + q_2) & a_2 - (q_1 + q_2)^2 \end{vmatrix}$$

il n'est pas nul car si q_1 et q_2 sont les racines positives de (4) il ne peut en être de même de $q_1 + q_2$. Les trois systèmes (9) sont donc compatibles et la solution de (5) se présente comme une superposition de vibrations de fréquences angulaires q_1, q_2, $q_1 + q_2$, $2q_1$, $2q_2$; nous pouvions aussi l'obtenir en développant $\xi (t)$, $\eta (t)$ en série entière des conditions initiales $\xi (0)$, $\eta (0)$, $\dot{\xi} (0)$, $\dot{\eta} (0)$ selon un théorème de Poincaré [3].

La deuxième approximation décrite ici par la solution (6) et (8) n'exige donc pas d'autre condition, pour la stabilité de l'amas stellaire, que celle qu'impliquait déjà la première approximation, à savoir $\alpha_1 + \alpha_1^* + \beta_1 > 0$ ou l'existence d'une densité critique de l'amas, à ne pas dépasser.

Septembre 1958.

Observatoire de Genève.

1. P. Bouvier, *Pub. Obs. Genève*, A 56 (1958), désigné ici par I.
2. F. Zagar, *Contrib. del Oss. di Milano-Merate*, n.s. 37 (1952).
3. J. Chazy, *Mécanique rationnelle*, tome II, ch. XVI (Gauthier-Villars, Paris, 1942).