Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 14 (1961)
Heft: 2

Artikel: Trois applications des surfaces développables
Autor: Rossier, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739574

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Séance du 1er juin 1961

Paul Rossier. — *Trois applications des surfaces développables.*

1. Les surfaces réglées telles que la distance de deux génératrices infiniment voisines est un infiniment petit d'ordre supérieur sont dites développables.

En général, sur une surface, si on mène une courbe et qu'on trace la normale à la surface en chacun de ses points, la surface réglée obtenue n'est pas développable. Cependant, toute portion infiniment petite de surface possède un tore osculateur tel que le point de contact appartient à l'équateur ou au cercle de gorge du tore. Dans l'infiniment petit, la surface possède deux plans de symétrie, ceux du méridien et de l'équateur (ou du cercle de gorge) du tore osculateur. Les lignes de courbure de la surface sont les courbes tracées sur elle tangentes en chaque point à l'une des directions de symétrie précédentes. Les normales à une surface, élevées sur une ligne de courbure constituent une surface développable.

2. *Construction de la tangente aux limites de la pénombre d'une surface.*

Soit une surface σ éclairée en lumière parallèle de direction l. En un point A de la limite entre les portions éclairée et dans l'ombre, menons le plan tangent α; un plan β, parallèle à α coupe sur la surface une courbe c; les tangentes à c, parallèles à l ont comme points de contact des points de la limite ci-dessus. Rapprochons indéfiniment β de α; la portion de c voisine de A tend vers l'indicatrice en A et deux points de contact des tangentes précédentes appartiennent au diamètre conjugué de la direction l par rapport à cette indicatrice.

Pour étendre la propriété au cas de la lumière focale, de source S, après avoir mené une tangente SA à la surface σ, dans la plan tangent à σ en A, construisons la perpendiculaire p à SA menée par S. Par p, faisons passer le plan β. Sur σ, il coupe la courbe c et les tangentes à c issues de S déterminent des points de la limite d'ombre. Pour β tendant vers α, la courbe c contient l'indicatrice en A; l'angle des deux tangentes issues de S à cette indicatrice est infiniment petit. La tangente au contour est le diamètre conjugué du rayon SA par rapport à l'indicatrice.

Dans cette démonstration, il n'est fait usage que de la convergence de projetantes infiniment voisines mais pas du fait qu'elles appartiennent à un cône. Cela va nous permettre d'étendre le théorème précédent au cas de la pénombre.

Supposons la surface σ éclairée par une surface λ. Les limites de la pénombre sont obtenues en construisant sur σ le lieu des points de contact des plans α simultanément tangents à λ et à σ. Ces plans enveloppent la surface développable de noyaux λ et σ. Cette surface est le lieu des droites déterminées par les deux points de contact du plan α. Des génératrices infiniment voisines sont concourantes, à des infiniment petits d'ordre supérieur près; la démonstration précédente subsiste et conduit au théorème suivant: toute tangente à la courbe de contact d'un noyau d'une surface développable avec celle-ci est conjuguée à la génératrice passant par le point de contact par rapport à l'indicatrice du noyau en ce point.

3. *Surfaces se coupant sous un angle constant.*

Soient deux surfaces σ et τ et c leur courbe d'intersection; en un point M de cette courbe, menons les normales aux deux surfaces; si l'angle de ces normales est constant, indépendant du choix de M sur c, les deux surfaces sont dites se couper sous un angle constant.

En deux points voisins de c, M et N, menons les plans normaux à c et soit p leur intersection. En passant de M à N, le plan normal tourne autour de p. En général, les normales à σ sont gauches; les points du plan normal subissent alors un mouvement hélicoïdal lorsque son intersection avec c passe de M à N.

Supposons que la courbe c est de courbure sur σ; les normales en M et N sont concourantes; le mouvement du plan normal est une rotation, puisque un point de l'axe est invariable. Si les deux surfaces σ et τ se coupent sous un angle constant, les normales à τ en M et N coupent aussi l'axe en un point fixe dans la rotation précédente et la courbe c est aussi de courbure sur τ. Si deux surfaces se coupent sous un angle constant, si l'intersection est ligne de courbure sur l'une d'elles, elle l'est aussi sur l'autre.

4. *Systèmes triples orthogonaux de surfaces.*

Un ensemble de trois familles infinies de surfaces qui se coupent deux à deux orthogonalement est appelé un système triple orthogonal.

Le plus simple de ces systèmes est celui constitué par trois faisceaux de plans respectivement parallèles aux trois faces d'un trièdre trirectangle. Transformons la figure par une inversion; nous obtenons un nouveau système triple orthogonal constitué par des sphères qui passent toutes par le pôle de l'inversion. Les plans d'un faisceau d'axe a, les sphères centrées sur un point de cet axe et les cônes de révolution ayant a comme axe et le centre des sphères comme sommet constituent aussi un système triple orthogonal; si le centre des sphères est impropre, le système est composé des plans d'un faisceau d'axe a, des plans perpendiculaires à a et des cylindres de révolution d'axe a.

Dans ces figures, les courbes d'intersection de deux surfaces sont des lignes de courbures sur chacune d'elles.

L'exemple des sphères concourantes montre en outre l'existence d'hexaèdres rectangles à faces courbes. Un tel corps est limité par trois paires de sphères appartenant aux trois familles du système. Supposons infiniment voisines ces paires de surfaces. A des infiniment petits d'ordre supérieur près, les faces de l'hexaèdre infinitésimal obtenu peuvent être considérées comme des surfaces développables dont les génératrices sont normales à des surfaces du système. Dupin a montré que cette développabilité est le fait de tous les systèmes triples orthogonaux.

Pour le voir, considérons un hexaèdre rectangle tel que le précédent (un parallélipipède rectangle par exemple). Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux faces opposées et AA', BB', CC', DD' quatre arêtes. Essayons de le déformer en conservant les angles droits, par exemple en laissant fixe la face $A'B'C'D'$, donc aussi l'arête AA'. Faisons tourner la face $ABCD$ autour de A de façon à faire pénétrer B à l'intérieur de la position primitive de la face $ABCD$. Le sommet D opposé à B en sort. La conservation de l'angle droit $B'BC$ oblige C à pénétrer dans le segment CC' et celle de l'angle droit $D'DC$ le force à en sortir. Ainsi, la déformation qui fait disparaître la développabilité des faces détruit le corps ou la rectangularité des arêtes deux à deux. Il n'existe donc pas d'hexaèdre rectangle à faces non développables.

S'il existait un système triple orthogonal dont les courbes d'intersection ne seraient pas des lignes de courbure, on pourrait construire un hexaèdre rectangle à faces non développables. Ainsi est justifié le théorème affirmant que les courbes d'intersection de deux surfaces appartenant à un système triple orthogonal sont des lignes de courbure sur chacune d'elles.