Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 16 (1963)
Heft: 3

Artikel: Sur le théorème de Pythagore en géométrie affine
Autor: Rossier, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739365

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

1. STAACK, H. H. and SPAUN, J. Serological diagnosis of chronic typhoid carriers by Vi haemagglutination. *Acta pathol. microbiol. scand.*, 1953, *32*, 420-423.
2. WERBIN, B. Z. and KASHER, A. The rapid slide agglutination test in the diagnosis of typhoid fevers and typhus. *J. clin. pathol.*, 1961, *14*, 446-447.

Service fédéral de l'hygiène publique,
Berne
et
Institut sérothérapique et vaccinal suisse,
Berne

Paul ROSSIER. — Sur le théorème de Pythagore en géométrie affine.

Dans notre note « Théorie affine des aires [1] » nous avons démontré la généralisation affine suivante du théorème de Pythagore:

Si l'on circonscrit au triangle ABC une ellipse ayant un côté BC comme diamètre, l'aire de cette ellipse est égale à la somme des aires des deux ellipses homothétiques à la précédente et qui ont respectivement AB et AC comme diamètres.

La démonstration de cette proposition repose entre autre sur la notion de continuité.

Nous allons établir un théorème sur des aires de parallélogrammes, théorème qui, au fond, est identique au précédent, mais dont la démonstration ne fait appel qu'à la notion de congruence affine (par translation). Cette notion n'exige pas le recours à la continuité.

2. Par le sommet A d'un triangle ABC, menons une droite d et construisons les deux parallélogrammes $ABDE$ et $ACFG$ dont une diagonale est portée par d, dont un côté est un côté du triangle donné et dont un second côté a comme support un autre côté du triangle. Les côtés DE et FG de ces parallélogrammes sans point en un sommet du triangle donné se coupent en un point H.

L'aire du parallélogramme $BCJK$ dont un côté est le troisième côté du triangle donné et dont les côtés BK et CJ sont équipollents à AH est égale à la somme des aires des parallélogrammes $ABDE$ et $ACFG$.

Pour le démontrer, remarquons que les segments HK et HJ sont respectivement équipollents à AB et à AC, le parallélogramme $EHJL$ peut être obtenu à partir du parallélogramme $AGFC$ par la translation AE. L'aire du polygone concave $ALJHKB$

[1] *Archives des Sciences*, vol. 16, fasc. 1, p. 1.

est égale à la somme des aires des parallélogrammes considérés. Par la translation AH, transportons le triangle ABC en HKJ et, par la translation CB, le triangle CJL en BKD. Le polygone concave est transformé en le parallélogramme $BCJK$, il y a conservation des aires: le théorème est démontré.

3. Dans le cas particulier où l'angle A est droit, la démonstration ci-dessus est à peu de chose près celle du théorème de Pythagore proposée au neuvième siècle par les Indous.

4. Comme droite d, choisissons la diagonale du parallélogramme $ABHC$, construit sur le triangle ABC. Le point H de la figure précédente est la seconde extrémité de la diagonale issue de A de ce parallélogramme. La construction conduit à un parallélogramme $BCJK$ d'aire double à celle du parallélogramme $ABHC$.

Ce cas est l'analogue de celui du triangle rectangle isocèle.

5. En appliquant le théorème de l'égalité des aires des triangles ABH et ACH (équivalence dont la démonstration fait appel à un axiome de continuité), on constate que l'aire du parallélogramme $BCJK$ est le quadruple de celle du triangle ABC.

6. Faisons varier la droite d dans le faisceau de sommet A. A chacune de ces positions correspond une droite DE et une droite FG. Ces deux faisceaux sont projectifs. Le lieu du point H est donc une hyperbole dont les asymptotes sont les supports des côtés AB et AC du triangle donné. Cette hyperbole passe par le sommet opposé à A du parallélogramme construit sur les côtés AB et AC.

7. L'existence de ces généralisations affines du théorème de Pythagore montre bien le double caractère de celui-ci. Il est en premier lieu une relation entre des aires de parallélogrammes, d'ellipses ou de diamètres conjugués d'ellipses parallèles entre eux [1], relations qui sont valables, que le triangle considéré soit rectangle ou pas.

En second lieu le théorème de Pythagore est une relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, relation qui exige la possibilité de la mesure de ces côtés au moyen d'une même unité. De ce fait, elle appartient à la géométrie métrique et est dépendante de la notion de congruence générale.

Au contraire, la première forme du théorème ne fait appel qu'à la notion de congruence affine; celle-ci exclut la rotation.

Hilbert [2] qualifie de « non-pythagoricienne » une géométrie dans laquelle le théorème de Pythagore n'est pas valable sous sa seconde forme. Cela n'exclut pas sa validité comme relation entre les aires. En fait, dans les géométries non-pythagoriciennes construites par Hilbert, le théorème de Pythagore sur les aires est valable pour le triangle rectangle.

[1] *Loc. cit.*
[2] *Grundlagen der Geometrie*, Anhang II.