Convergence de droites dans le triangle en géométrie affine

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **16 (1963)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-739366

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Paul ROSSIER. — Convergence de droites dans le triangle en géométrie affine.

1. Soient un triangle ABC et deux coniques a et b homothétiques entre elles et ayant respectivement BC et AC comme diamètres. Appelons C' leur intersection propre distincte de C. Les droites $C'A$ et $C'C$ sont des cordes supplémentaires de la conique b alors que $C'B$ et $C'C$ le sont relativement à a. Puisque ces deux coniques sont homothétiques, $C'A$ et $C'B$ sont parallèles donc confondues. Les deux coniques a et b se coupent en un point C' de AB.

2. Construisons la conique c de diamètre AB et homothétique à a (et à b). Les coniques a et c se coupent en un point B' du côté AC et les coniques b et c en un point A' de BC.

La conique A et la droite AA' constituent une cubique α et de même, les coniques b et c avec les droites BB' et CC' appartiennent à deux cubiques β et γ.

Ces trois cubiques passent chacune par les huit points suivants:

les trois sommets du triangle ABC,
les trois points A', B' et C',
les deux points impropres communs aux trois coniques homothétiques a, b et c.

D'après le théorème du neuvième point, ces trois cubiques ont encore un point commun. Ce point ne peut appartenir à deux des coniques a, b, ou c, car toutes leurs intersections figurent dans la liste ci-dessus. Le neuvième point appartient à deux (au moins) des droites AA', BB' ou CC'. Par raison de symétrie, il appartient aux trois.

Cette convergence peut encore être démontrée comme suit: supposons non concourantes les trois droites AA', BB', et CC'. Appelons M l'intersection de AA' et AA'. Par ce point doit passer la cubique γ, donc la conique c. Les droites MA et MB sont des cordes supplémentaires de c; leurs directions sont conjuguées par rapport aux trois coniques a, b et c. De même, si N est l'intersection de AA' et CC', les droites NA et NC sont conjuguées; les droites MA et NA sont la droite AA'; cette droite possède une unique direction conjuguée par rapport au système de coniques. Les droites MB et NC, donc BB' et CC' sont parallèles, ce qui est exclu. Le neuvième point n'est donc pas commun à deux des droites AA', BB' ou CC' et à une des coniques a, b ou c, mais bien à ces trois droites.

Nous avons donc le théorème suivant:

Si trois coniques homothétiques ont les trois côtés d'un triangle comme diamètres, elles se coupent deux à deux sur les supports de ces côtés et les trois droites joignant ces points d'intersection au sommet opposé du triangle sont concourantes.

3. La démonstration donnée ci-dessus de la seconde partie du théorème repose sur la théorie des cubiques. Pour démontrer une relation entre les droites et des coniques, il est plus élégant de ne faire appel qu'aux propriétés des coniques. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant: soient A et B deux intersections de deux coniques c et d et H celle de leurs tangentes communes; il existe une homologie de centre H et d'axe AB qui transforme une de ces coniques en l'autre.

Pour le montrer, appelons C et D les points de contact d'une des tangentes communes à c et à d, issues de H. Il existe une homologie déterminée par le centre H, l'axe AB et les deux points correspondants C et D. Dans cette transformation, la conique c est transformée en une conique c' qui passe par A, B et D, est tangente en D à la droite HD et est tangente à la seconde tangente commune s issue de H. Cette conique c' est une des deux coniques tangentes à s appartenant au faisceau déterminé par A, B, D et la tangente HD. A ce faisceau appartient la conique d. Sur la droite s, ce faisceau engendre une involution dont l'un des points unis est le point de contact S' de s avec d. Le centre d'homologie H est l'intersection de l'axe AB avec s sont deux points correspondants de l'involution; ils séparent S' du second point uni. Cette relation d'ordre oblige c' à passer par S; la transformée de c est bien d.

4. Revenons au triangle ABC et aux coniques a, b et c. Celles-ci sont homologiques deux à deux dans des homologies dont les axes sont les droites AA', BB' et CC'; chacune de ces homologies peut être considérée comme résultant des deux autres; dans la combinaison de deux d'entre elles d'axes AA' et BB' par exemple, l'intersection de ces axes est invariable; cette intersection appartient donc à l'axe CC'. Le théorème est démontré.

5. Appelons A'', B'' et C'' les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle. Les coniques de diamètre AB constituent un réseau bidimensionnel. Ce réseau contient une conique c qui passe par A'' et dont la tangente en A est parallèle à CC''. La droite CC'' est axe de symétrie de la conique et du triangle ABC; la direction de cette symétrie est AB. Donc la conique c passe par le milieu B'' du côté AC.

La conique a, homothétique à c et de diamètre BC a en B et en C des tangentes de direction conjuguée à celle de BC donc parallèle à AA''. En application du théorème précédent, cette conique passe par le milieu C'' de AB.

Donc, si une des trois coniques homothétiques entre elles ayant les côtés d'un triangle comme diamètres passe par le milieu d'un côté, toutes les intersections de ces coniques avec les côtés du triangle sont les milieux de ceux-ci. Les trois droites AA', BB' et CC' sont alors les médianes du triangle ABC et le théorème général contient comme cas particulier celui de la convergence des médianes du triangle.

6. Cette dernière propriété peut encore être obtenue autrement comme corollaire du théorème général. Par le milieu C'' de AB, menons les parallèles a' et b' aux côtés AC et AC', elles les coupent en leurs milieux. Les paires de droites a' b', a' et AC, b' et BC sont trois coniques homothétiques dégénérées; chacune a au moins

un côté du triangle ABC comme diamètre; le théorème général conduit de nouveau à celui de la convergence des médianes.

7. Si l'une des coniques a, b ou c est un cercle, il en est de même pour les trois et le théorème est celui de la convergence des hauteurs du triangle. A condition de ne considérer que des ellipses, le théorème général peut être déduit par affinité de celui de l'orthocentre.

Il est assez curieux de constater le lien établi par ce qui précède entre la convergence des médianes d'un triangle, propriété appartenant à la géométrie affine et celle des hauteurs, de caractère métrique.