Aires en géométrie pascalienne

Autor(en): Rossier, P.

Objekttyp: Article

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Band (Jahr): 18 (1965)

Heft 3

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-739242

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek* ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

BIBLIOGRAPHIE

- 1. Commission internationale pour la Protection des eaux du lac Léman et du Rhône contre la pollution.
- 2. MORTIMER, C. H. 1941-42. The exchange of dissolved substances between mud and water in lakes. *Journal of Ecology*, vol. 29, pp. 280-329 et vol. 30, pp. 147-201.
- 3. SAUVAGE, J. et C. SERRUYA. 1964. Au sujet de la présence d'un Dryas dans les sédiments du lac Léman au large de Thonon-les-Bains. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 259, pp. 3310-3313.
- 4. Boswell, P. G. H. 1961. Muddy sediments. W. Heffer & Sons Ltd., Cambridge.

Manuscrit reçu le 2 septembre 1965.

P. ROSSIER. — Aires en géométrie pascalienne.

1. Introduction

La géométrie pascalienne repose sur les axiomes d'appartenance, d'ordre et sur deux axiomes de parallélisme; le premier est celui de l'existence et de l'unicité de la parallèle à une droite, issue d'un point donné; le second est la proposition suivante: soit un hexagone ABCDEF inscrit à une paire de droites; si les côtés opposés AB et DE, BC et EF sont respectivement parallèles, il en est de même de ceux de la troisième paire CD et FA.

Ces axiomes permettent d'introduire la congruence des figures par translation et symétrie centrale ainsi qu'un calcul segmentaire qui a les propriétés habituelles du calcul arithmétique. La géométrie pascalienne a une forme analytique; les calculs dont elle fait usage représentent des constructions effectuées sur des segments ¹.

Avec Hilbert ² nous dirons que deux polygones sont équidécomposables s'il est possible de les découper en un nombre fini de triangles congruents deux à deux; ils sont équicomplémentaires si, par adjonction de polygones équidécomposables, ils donnent des polygones équidécomposables.

On démontre la transitivité de l'équicomplémentarité.

2. AIRE DES POLYGONES

Deux parallélogrammes ayant un côté commun et dont les côtés opposés à celui-là ont même support sont équicomplémentaires; ils sont équidécomposables si les côtés précédents ont au moins un point commun.

- ¹ V. P. Rossier, Géométrie affine et géométrie pascalienne. *Archives des Sciences*, 13, fasc. 3, p. 355, 1960.
- ² Grundlagen der Geometrie, ch. IV. P. ROSSIER, Les fondements de la géométrie et David Hilbert, 2^e partie, ch. IV (ouvrage à paraître).

Dans le plan, considérons deux directions distinctes x et y. Soit un parallélogramme ABCD. Faisons glisser le côté BC sur son support de telle sorte que le côté AB' du parallélogramme obtenu soit parallèle à x. Les parallélogrammes ABCD et AB' C' D' sont équicomplémentaires.

Faisons glisser C' D' sur son support de telle sorte que le côté AD'' du parallélogramme AB' C'' D'' ainsi construit soit parallèle à la direction y. Les parallélogrammes ABCD et AB' C'' D'' sont équicomplémentaires. Nous dirons que le parallélogramme ABCD a été réduit par B et D aux axes x et y.

Permutons les rôles des côtés AB et AD. Faisons glisser CD en C_1 D_1 de façon que le côté AD_1 du parallélogramme ABC_1 D_1 soit parallèle à y, puis faisons glisser le côté BC_1 en B_2C_2 pour obtenir le parallélogramme AB_2 C_2 D_1 de côtés parallèles à x et y. Le parallélogramme donné a été réduit par D et B aux axes x et y.

Les parallélogrammes AB'C''D'' et $AB_2C_2D_1$ sont équicomplémentaires à ABCD, donc équicomplémentaires entre eux.

Introduisons un système de coordonnées parallèles à x et y et d'origine A. Soient y = mx et y = nx les équations des droites AB et AD, b et d les abscisses x de B et D. Le calcul donne

$$AB' = b\left(1 - \frac{m}{n}\right), \quad AD'' = nd,$$
 $AB_2 = b, \quad AD_1 = d(n - m).$

Ces expressions montrent l'égalité des produits AB'. AD'' et AB_2 . AD_1 . Le produit précédent conduit à un segment que nous appellerons l'aire S du parallélogramme ABCD, relative au système de coordonnées choisi.

L'expression précédente de l'aire du parallélogramme ABCD peut être mise sous la forme du déterminant

$$S = \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_D & y_D \end{vmatrix}.$$

L'aire du parallélogramme dont trois sommets A, B et D ont les coordonnées x_A , y_A , ..., y_D est le déterminant

$$S = \begin{vmatrix} 1 x_A & y_A \\ 1 x_B & y_B \\ 1 x_D & y_D \end{vmatrix}.$$

Nous avons obtenu ainsi l'essentiel de la théorie des aires des parallélogrammes; on passe à celle des triangles par découpage du parallélogramme par une diagonale; la translation d'un sommet, parallèlement au côté opposé conserve l'aire. La théorie

des aires des polygones est obtenue par décomposition en triangles. On obtient enfin le théorème suivant: Si deux polygones sont équicomplémentaires, ils ont même aire.

Hilbert a montré que la démonstration de la réciproque exige un axiome de continuité 1.

3. Conclusion

En géométrie élémentaire, l'aire d'un carré de côté unité est choisie comme unité; ce carré peut être déplacé arbitrairement. Ce choix conduit à la rectangularité du système de coordonnées; les aires sont indépendantes lors d'une rotation ou d'une translation de ce système.

En géométrie pascalienne, seule la translation des axes a un sens. Cependant, la forme analytique de la théorie est la même qu'en géométrie élémentaire; ainsi, cette forme est indépendante des axiomes de congruence.

Le second axiome de parallélisme (le théorème de Pascal selon Hilbert) suffit donc pour l'élaboration de la théorie des aires des polygones; en cette matière, il permet d'éliminer tout axiome de continuité.

L'extension aux volumes des polyèdres et aux hypervolumes des polytopes ne présente pas de difficultés. On peut la construire au moyen de la théorie des déterminants.

Manuscrit reçu le 21 octobre 1965.

P. ROSSIER. — Points cylindriques et paraboliques d'une surface.

Un point d'une surface où le paraboloïde osculateur d'axe normal à celle-ci est un cylindre est indifféremment dit cylindrique ou parabolique.

Nous réservons le nom de points paraboliques aux précédents et distinguons comme suit les points cylindriques.

Soit A un point d'une surface σ . Supposons l'existence du plan tangent en A. En général, au moins dans un voisinage approprié, ce plan n'est tangent à la surface qu'en A. S'il existe un arc de courbe de la surface tel que le plan tangent en A est tangent à celle-ci en tous les points de cet arc, nous dirons que les points de cet arc sont des *points cylindriques* de la surface. Les points d'une génératrice d'une surface développable, ceux des parallèles limites des tores sont cylindriques.

Il existe des points cylindriques non paraboliques. En voici un exemple. Soit la courbe d'équation

$$y = x^2 \left(a + \int_0^x f(x) \ dx \right),$$

¹ Voir note ².