Zeitschrift: Mitteilungen der aargauischen Naturforschenden Gesellschaft
Herausgeber: Aargauische Naturforschende Gesellschaft
Band: 8 (1898)

Artikel: Über barometrische Höhenmessungen
Autor: Bigler, Ulr.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-171138

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über barometrische Höhenmessungen.

Von **Ulr. Bigler.**

Das Produkt aus Volumen und der Dichtigkeit eines Körpers heißt dessen Masse. Die Dichtigkeit ist somit die Masse in der Volumeneinheit. Die Größe des Druckes, welchen ein Körper auf seine Unterlage ausübt, ist von zwei Faktoren abhängig; einerseits von dessen Masse und andererseits von der Größe der Anziehung durch die Erde. Wird dieser Druck mit G bezeichnet, so ist

$$G = m.\ g,$$

wenn m die Masse des Körpers und g dessen Beschleunigung durch die anziehende Kraft der Erde bedeuten. Ist ferner v das Volumen des Körpers und d dessen Dichtigkeit, so ist

$$m = v.\ d,$$

und daher auch $G = v\ d\ g.$

Bezeichnet ferner s das spezifische Gewicht des Körpers, so ist auch

$$G = v.\ s,$$

und daher ist s gleichbedeutend mit dem Produkte d. g

und es ist daher $d = \frac{s}{g}.$

Die Dichtigkeit ist daher auch gleich dem spezifischen Gewichte dividiert durch die Beschleunigung durch die Schwerkraft. Bezeichnet nun h den Niveauunterschied des Quecksilbers in beiden Schenkeln des Barometers

und d dessen Dichtigkeit, so läßt sich der Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit durch die Gleichung

$$G = mg = hdg,$$

darstellen. Nimmt man bei einer Temperatur von null Grad den Barometerstand $h = 0{,}760$ m an und setzt für das Produkt dg den Wert für das spezifische Gewicht des Quecksilbers, so hat man

$$G = 760.13,\ 5975 \text{ kg} = 10334{,}1 \text{ kg}$$

als Druck auf einen Quadratmeter der Erdoberfläche. Die Masse der Luftsäule, welche diesen Druck ausübt, läßt sich durch das Produkt hd wiedergeben. Nehmen wir für einen Augenblick an, das Barometer zeige auf der ganzen Erdoberfläche denselben Stand $h = 0{,}760$ m, so läßt sich der gesamte Druck der Atmosphäre auf die Erdoberfläche durch den Ausdruck

$$G = \frac{2.^4\ 10.^{17}\ hs}{\pi} \text{ kg},$$

und die Masse durch

$$M = \frac{2^4.\ 10^{17}\ hs}{\pi\, g} \text{ kg.},$$

darstellen. Bezeichnet ferner s_1 das spezifische Gewicht der Erde, so ist das Gewicht derselben

$$G_1 = \frac{2^4.\ 10^{17}.\ s_1\ r}{3\,\pi}$$

und ihre Masse

$$M_1 = \frac{2^4.\ 10^{17}.\ r_1\ s}{3\,\pi\, g}.$$

Setzt man für $s_1 = 5,\ 5$, so findet man aus obigen Ausdrücken in tiefster Näherung die Gleichung

$$M = 10^{-6} \cdot M_1$$

Die Masse der Atmosphäre wäre daher in diesem Falle ungefähr der millionste Teil der Erdmasse. Denken wir

uns ferner die Erde umgeben mit einer Atmosphäre von überall gleicher Dichtigkeit, so ließe sich das Gewicht der Luftsäule, welche der Quecksilbersäule von der Höhe h das Gleichgewicht hält, durch

$$G = H.\, d_1 g,$$

darstellen, wo H die Höhe der Luftsäule und d_1 deren Dichtigkeit bezeichnet. Zur Bestimmung der Höhe H würde dann die Gleichung

$$Hd_1 = hd,$$

dienen, woraus

$$H = h\,\frac{d}{d_1} = h\,\frac{s}{s_1}$$

sich ergeben würde. Setzt man nun hier für s_1 das spezifische Gewicht der Luft bei der Temperatur null und dem Barometerstande 0,760 m, so ist bekanntlich $\frac{s}{s_1} = 10462$ und daher

$$H = 0{,}760.\ 10462 = 7950 \text{ m}.$$

Daß unsere Atmosphäre weit über diese gefundene Grenze hinaus reichen kann, ist klar, da ja die Dichtigkeit nach oben aus naheliegenden Ursachen stetig abnehmen muß und somit die Masse hd nur durch eine Verlängerung der Luftsäule nach oben hergestellt werden kann. Auf die Änderung der Dichtigkeit der Luft nach oben wirken verschiedene Ursachen ein. Erstens ist es die Abnahme der Schwere für höher liegende Luftteilchen; zweitens die Änderung der Centrifugalkraft infolge der Rotation der Erde; drittens die Abnahme der Temperatur für höher liegende Luftschichten und viertens die Änderung des Wassergehaltes der Luft bei veränderter Temperatur. Der Druck, welchen ein Luftteilchen auf die tiefer liegenden Luftschichten ausübt, ist eine Folge der Atraction der Erde;

so lange aber ein solcher Druck vorhanden ist, nimmt das Luftteilchen an der Rotation der Erde teil und bewegt sich so, wie wenn es mit der Erde fest verbunden wäre. Nur diejenigen Luftteilchen können sich in absoluter Ruhe befinden, oder sich im Weltraume frei bewegen, die keinen Druck mehr nach unten ausüben. Wenn wir nun die Frage nach der Höhe der zur Erde gehörenden Atmosphäre zu beantworten suchen, so kann es sich nur darum handeln, diejenige Höhe zu bestimmen, bis zu welcher die Luftteilchen noch so mit der Erde rotieren, wie wenn sie mit der Erde fest verbunden wären. Die Rotation eines solchen Luftteilchens erfolgt nun in einer Ebene, welche auf der Rotationsaxe der Erde senkrecht steht und der Radius des Rotationskreises ist die vom Luftteilchen auf die Axe gefällte Senkrechte. Wie die Rotation des Luftteilchens eine Folge der Schwerkraft ist, so ist die Centrifugalkraft eine Folge der Rotation. Diese Centrifugalkraft wirkt aber nur bei denjenigen Luftteilchen direkt der Schwerkraft entgegen, welche in der Ebene des Äquators rotieren und unsere nächste Untersuchung bezieht sich der Einfachheit der Rechnung wegen auf ein in der Ebene des Äquators rotierendes Luftteilchen. Bezeichnet nun m die Masse des Luftteilchens und M diejenige der Erde; ist ferner r der Radius der Erde und z die senkrechte Erhebung des Luftteilchens über dem Äquator, so kann die Schwerkraft durch

$$K = \frac{mM}{(r+z)^2}$$

dargestellt werden und

$$G_1 = \frac{M}{(r+z)^2},$$

ist die Beschleunigung des Luftteilchens durch dieselbe. Bezeichnet nun g die Beschleunigung des Luftteilchens durch die Schwere an der Erdoberfläche, so ist

$$g = \frac{M}{r^2},$$

und daher hat man

$$K = m. \frac{r^2}{(r+z)^2} . g; \qquad g_1 = \frac{r^2}{(r+z)^2} . g.$$

Dieser Schwerkraft wirkt nun die Centrifugalkraft des Luftteilchens direkt entgegen Ist nun v dessen Geschwindigkeit in seiner Bahn und r der Radius des Rotationskreises, so ist die Normalbeschleunigung $\mathfrak{g}$ gleich

$$\mathfrak{g} = \frac{v^2}{r},$$

und daher die Centrifugalkraft C

$$C = m. \frac{v^2}{r}.$$

Dieselbe ist daher dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt und dem Radius des Rotationskreises umgekehrt proportional. Nun bewegen sich aber die Luftteilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten in ihren Bahnen, während doch alle dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzen. Es ist daher angezeigt, statt v die Winkelgeschwindigkeit α in die Rechnung einzuführen. Da nun

$$v = r\alpha,$$

ist, so hat man auch

$$\mathfrak{g} = r\alpha^2; \; C = m. \, r\alpha^2.$$

Die Centrifugalkraft ist daher dem Radius des Rotationskreises direkt proportional und nimmt mit der Entfernung des Luftteilchens vom Mittelpunkte der Erde an Größe immer mehr zu, während die Schwerkraft im Abnehmen begriffen ist. Wir suchen nun einen passenden Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit α zu erhalten. Unter einem

Sonnentage versteht man die Zeit von einer Kulmination der Sonne bis zur andern und unter einem Sterntage die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Kulminationen desselben Fixsternes. Die Sterntage sind alle gleich lang und entsprechen einer vollen Rotation der Erde. Da nun aber die Sonne in ihrer scheinbaren, jährlichen Bahn immer weiter nach Osten rückt, die Erde sich aber von Westen nach Osten dreht, so sind die Sonnentage länger als die Sterntage. Auch sind dieselben unter sich ungleichlang, da die Sonne ihre Bahn mit veränderlicher Geschwindigkeit durchläuft. Man spricht daher von einem mittlern Sonnentage von 24 Stunden. Unter einem Jahre versteht man die Zeit, welche die Sonne braucht, um in ihrer Bahn nach Osten zu demselben Punkte zurückzukehren, von dem sie ausgegangen ist. Als festen Punkt wählt man gewöhnlich einen Fixstern, der sich in der Sonnenbahn befindet. Diese Zeit hat $365^1/_4$ mittlere Sonnentage zu 24 Stunden und entspricht $366^1/_4$ Rotationen der Erde. Die Erde macht daher in 24 Std. mittlerer Sonnenzeit etwas mehr als 1. Rotation, nämlich

$$\frac{366^1/_4}{365^1/_4} = \frac{1465}{1461} = \left(1 + \frac{4}{1461}\right)$$

Rotationen und daher ist die Winkelgeschwindigkeit α gleich

$$\alpha = \frac{\pi}{12.60^2} \cdot \frac{1465}{1461} = \frac{\pi}{43200} \cdot \frac{1465}{1461}.$$

Für die Beschleunigung eines Luftteilchens durch die Centrifugalkraft in der Entfernung $\mathfrak{r}$ vom Mittelpunkte der Erde erhält man daher den Ausdruck

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \cdot \frac{\pi^2}{43200^2} \cdot \left(\frac{1465}{1461}\right)^2.$$

Nun soll dieser Betrag für ein Luftteilchen unter dem Aquator berechnet werden. Setzt man daher $r = r$ und beachtet daß, $r = \frac{2.\ 10^7}{\pi}$ ist, so folgt

$$g_1 = \frac{2.\ 10^7}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{43200} \cdot \frac{1465}{1461}\right)^2,$$

also

$$g_1 = \frac{1000.\pi}{93312} \cdot \left(1 + \frac{4}{1461}\right)^2 = \frac{1000\,\pi}{93312} \cdot \left(1 + \frac{1}{182{,}6} + \cdots\right),$$

und daher ist in tiefster Näherung

$$\frac{g}{g_1} = \frac{9,\ 809.\ 93{,}312}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{182{,}6} \cdot \cdots\right) = 289{,}7,$$

wenn man hier von einer Änderung der Beschleunigung durch die Schwerkraft in Paris und am Äquator absieht und daher für g den Betrag in Paris, nämlich 9,809 setzt. Die Beschleunigung eines Luftteilchens am Äquator durch die Schwere ist daher ungefähr 289,7 mal größer als die Beschleunigung durch die Centrifugalkraft. Poisson gibt dafür die Zahl 289 an. Der Einfachheit der Rechnung wegen werde ich im Folgenden auch diese Zahl gebrauchen. Da nun einerseits

$$g_1 = r\alpha^2,$$

ist und anderseits $g_1 = \frac{g}{289}$,

gefunden wurde, so hat man schließlich

$$\alpha^2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{g}{289}$$

als Betrag für die Winkelgeschwindigkeit eines Luftteilchens in der Äquatorialebene. Für ein beliebiges Luftteilchen in der Höhe z über dem Äquator erhalten wir daher für g den Ausdruck

$$g = (r + z)\ \alpha^2 = \frac{r + z}{r} \cdot \frac{g}{289}.$$

Dieser Beschleunigung durch die Centrifugalkraft wirkt nun die Beschleunigung durch die Schwere im Betrage von

$$g_1 = g \cdot \frac{r^2}{(r + z)^2},$$

direkt entgegen. Damit nun die Rotation des Luftteilchens mit der Erde so erfolge, als ob es sich frei bewegte, muß jene verlorne Kraft gleich der Schwere werden; es muß daher für solche Luftteilchen die Gleichung

$$g \cdot \frac{r^2}{(r + z)^2} = \frac{r + z}{r} \cdot \frac{g}{289},$$

bestehen. Aus derselben folgt nun, daß

$$\left(1 + \frac{z}{r}\right)^3 = 289,$$

ist, was für z ungefähr den Wert

$$z = 5{,}6115 \times r,$$

ergibt.

Wenn eine Luftmasse in Bezug auf die Erde als ruhend angenommen wird, so bildet diese einen ungeheuren, starken Luftstrom. Die Bewegung zur Erde nennt man absolute Geschwindigkeit; die Geschwindigkeit der Luft, bezogen auf die Luftmasse, die mit der Erde rotiert, gibt die relative Geschwindigkeit. Unsere starken Winde haben nur eine geringe Geschwindigkeit, verglichen mit der Rotationsgeschwindigkeit der Erde, als mit der absoluten Geschwindigkeit. Der Teil der Atmosphäre, der nur durch relativ geringe Geschwindigkeitsunterschiede, wie sie bei den stärksten Winden vorkommen, von der Rotationsgemeinschaft mit dem festen Erdkörper sich unterscheidet, kann also unter dem Äquator nicht weiter als auf einen Abstand von 6,6 Erdhalbmesser vom Mittelpunkte sich erheben. Die Teilchen, die höher liegen, können sich in

absoluter Ruhe befinden aber sich im Weltraume zerstreuen. Man ist nicht berechtigt, auf eine Abgrenzung der Atmosphäre durch eine Kugelfläche von geringerem Radius zu schließen; man kann vielmehr annehmen, daß unter dem Äquator mit wachsender Höhe ein immer währender Ostwind an Stärke zunimmt, bis endlich in einer Höhe, welche die 6,6 Erdhalbmesser beträchtlich übersteigen kann, die Rotationsgemeinschaft ganz aufhört. In der Atmosphäre von unsagbar geringer Dichtigkeit, die der Raum des Sonnensystems erfüllt, müßte man sich eine den Umläufen der Planeten entsprechende kreisförmige Strömung um die Sonne denken, deren Winkelgeschwindigkeit mit wachsender Entfernung von der Sonne abnehme, sowie die umgekehrten Werte der Umlaufszeiten der Planeten abnehmen. In dem zur Erde gehörenden Luftstrom, der ungefähr die jährliche Geschwindigkeit der Erde hätte, brächte diese durch ihre Rotation einen fortschreitenden Wirbel hervor, vermöge dessen an beiden Polen in beträchtlicher Höhe Luft zur Erde einströmte und in der Gegend des Äquators ringsum abflösse. Daraus ließe sich erklären, warum man noch keine Abnahme des Sauerstoffgehaltes der Atmosphäre hat nachweisen können. Wenn Poisson meint, durch die nach oben stark abnehmende Temperatur und den dadurch erzeugten tropfbar flüssigen Zustand werde der Atmosphäre lange vor Erreichung jenes Abstandes von 6,6 Erdhalbmessern eine Grenze gesetzt, so ist dagegen einzuwenden: 1) Daß unter nullem Drucke der tropfbare Zustand kaum wird entstehen können. 2) Daß die Teile der tropfbaren Flüssigkeit wegen ihres großen, spezifischen Gewichtes immerfort hinabsinken und in den tiefern und wärmern Schichten wieder gasförmig werden würden und daß somit aus diesen

Gründen eine aus tropfbarer Flüssigkeit bestehende Grenzschicht der Atmosphäre undenkbar sei. Nach Poisson kann die Art der Abnahme der Lufttemperatur nach oben nicht aus Thermometerbeobachtungen, die auf Bergen gemacht sind, erkannt werden, weil hier die Bestrahlung des Bodens von großem Einflusse ist, sondern nur aus Beobachtungen, die von Luftschiffern gemacht sind. Gay-Lussac fand in einer Luftfahrt, wo er sich bis zu einer Höhe von 6980 m erhob, in dieser Höhe eine Lufttemperatur von — 9,50 ° C., während sie am Boden 30,75 ° betrug. Einer Temperaturabnahme von einem Grade entsprach also im Durchschnitte eine Erhebung von 175 m. Um die Ausdehnung der Luft durch Erwärmung bei konstantem Drucke zu bestimmen, wandte Gay-Lussac einen großen, mit Luft gefüllten Glasballon an, der in eine enge, genau kalibrierte Röhre endigte, worin die Luft mit einem Quecksilbertropfen abgesperrt war. Die Luft war vorhin durch Chlorcalcium vollständig von Wasserdampf befreit worden. Der Glasballon war in ein Gefäß mit Wasser, dem man eine beliebige Temperatur geben konnte, versenkt und die Röhre ragte durch eine Öffnung in der Seitenwand des Gefäßes hervor, so daß man die Verschiebung des Hg-Tropfens beobachten konnte. Er fand, daß das Volumen 1 beim Gefrierpunkte zu 1,375 bei Siedepunkt wurde. Durch ähnliche Versuche fand Dalton dasselbe. Später haben Rudberg, Magnus, Regnault den Wert 1,3665 gefunden. Sie sind durch verschiedene Methoden zu fast übereinstimmenden Resultaten gelangt. Alle übrigen von Rudberg, Magnus und Regnault untersuchten Gase haben einen etwas größeren Ausdehnungscoefficienten, namentlich die zusammengesetzten, Kohlensäure und schwefelige Säure. Diese unterscheiden sich noch dadurch, daß

ihre Ausdehnungscoefficienten bei stärkerem Drucke zunehmen. Das Annuaire du Bureau des Longitudes für 1881 hat für atmosphärische Luft und Stickstoff 1,3670; für Wasserstoff 1,3661, für Kohlensäure 1,3710. Im Folgenden bezeichnet nun α den Ausdehnungscoefficienten des Gases. Sind V, D und $\overline{p}$ Volumen, Dichtigkeit und Spannung einer Gasmasse bei der Temperatur null; V_1, D_1 Volumen und Dichtigkeit derselben bei der Temperatur θ, wenn die Spannung sich nicht ändert; dann ist

$$V_1 = (1 + \alpha\theta)\ V.$$

Wird die eingeschlossene Gasmasse mit m bezeichnet, so hat man

$$m = VD = V_1 D_1,$$

und es gibt daher die Proportion

$$V_1 : V = D : D_1$$

Bei konstanter Spannung, aber verschiedener Temperatur verhalten sich daher die Volumen wie umgekehrt die Dichtigkeiten. Setzt man für V_1 den oben gefundenen Wert ein, so folgt

$$D_1 = \frac{D}{1 + \alpha\theta}.$$

Wenn nun die Temperatur θ dieselbe bleibt, aber die Spannung sich ändert, so sollen $\overline{p}$, D_1 in p und ϱ übergehen und V_1 in V_{11}. Dann gelten die Gleichungen

$$1)\quad V_1 : V_{11} = \varrho : D_1$$
$$2)\quad V_1 : V_{11} = p : \overline{p},$$

und daher hat man

$$p = \frac{\overline{p} \cdot \varrho}{D_1} = \frac{\overline{p}\ \varrho}{D}\left(1 + \alpha\theta\right).$$

Setzt man abkürzend $k = \frac{\overline{p}}{D}$, so hat man

$$p = k\varrho \cdot (1 + \alpha\theta),$$

als Ausdruck für die Spannung eines Gases von der Temperatur θ und der Dichtigkeit ϱ. Wenn nun bei der Temperatur null der Nieveauunterschied des Quecksilbers in beiden Schenkeln des Barometers 0,760 m beträgt, so ist für atmosphärische Luft

$$\bar{p} = 0{,}760 \,.\, \delta \,.\, g,$$

wenn δ die Dichtigkeit des Quecksilbers bei derselben Temperatur bezeichnet. Daher ist auch

$$k = 0{,}760 \cdot \frac{\delta}{D} \cdot g = 0{,}760 \cdot \frac{s}{s_1} \cdot g.$$

Nun wird gewöhnlich der Wert des Verhältnisses vom spezifischen Gewicht des Quecksilbers zum spezifischen Gewicht der Luft bei der Temperatur null, wenn dieselbe vollkommen trocken ist, durch die Zahl 10462 angegeben. Setzt man noch für g den Wert in Paris, also 9,809, wobei also von einer Änderung der Schwere in Paris und am Äquator abgeseheu wird, so hat man schließlich in tiefster Näherung

$$k = 7951.\ 9{,}809 = 78000.$$

Bei der Temperatur null ist das Verhältnis der Dichtigkeit der Luft mit größtem Wassergehalte zur Dichtigkeit der vollkommen trockenen Luft gleich 0,9975. Für Luft, deren Wassergehalt das Maximum bei 0° erreicht hat, ist daher

$$k = 7971{,}1.\ g.$$

Um dem gewöhnlichen Zustande zu entsprechen, nimmt man aus beiden Zahlen das Mittel und setzt

$$k = 7961.\ g.$$

Der Radius der Erde sei r bis zum fingierten Meeresspiegel und verlängere sich um z bis zu dem Orte, wo Spannung und Dichtigkeit der Luft p und ϱ und die Schwere g_1 betragen. Die Luftschicht von der Höhe dz

belastet die Flächeneinheit der untern Luft mit $g^1 \varrho\, dz$. Um diesen Betrag nimmt daher die Spannung der Luft bei einer Zunahme der Höhe von dz nach oben ab und daher ist

$$dp = - g^1 \varrho\, dz.$$

Sieht man von einer Änderung der Schwere durch die Centrifugalkraft nach oben ab, so kann man

$g^1 = g \cdot \frac{r^2}{(r + z)^2}$ setzen. Zugleich ist

$$p = k\varrho\, (1 + \alpha\theta)$$

und somit $\frac{dp}{p} = - \frac{gr^2}{k(1 + \alpha\theta)} \cdot \frac{dz}{(r + z)^2}$.

θ ist eine Funktion von z, die man aber nicht genau kennt. Man nimmt für θ das Mittel zwischen der untern und obern Lufttemperatur und behandelt es als eine Konstante. Wird nun die obige Differentialgleichung von $z = o$ bis zu einem beliebigen Werte von z, also auch von $p = \bar{\omega}$ bis zu p integriert, so erhält man die Gleichung

$$\log \frac{p}{\bar{\omega}} = - \frac{g\, r\, z}{k\, (1 + \alpha\theta)\, (r + z)},$$

wo also $\bar{\omega}$ die Spannung in $z = o$ bedeutet. Unten sei h die beobachtete Barometerhöhe, T die Temperatur des Quecksilbers, t diejenige der Luft; oben seien h_1, T_1, t_1, dieselben Dinge. Man führe nun zuerst h_1 auf die untere Quecksilbertemperatur zurück. Für 1 ° C dehnt sich das Quecksilber um $^1/_{5550}$ seines Volumens aus; daher ist

$$h^1 = (1 + \frac{T - T_1)}{5550}\, h_1$$

die auf die untere Temperatur T zurückgebrachte Barometerhöhe des oberen Standes. Es ist dann

$$\bar{\omega} = h\delta g;\; p = h^1 \delta g_1 = h^1 \delta g \cdot \frac{r_2}{(r + z)^2},$$

und somit

$$\frac{\varpi}{p} = \frac{(r + z)^2}{r^2} \cdot \frac{h}{h^1}$$

Da gewöhnlich mit steigender Temperatur auch der Wassergehalt der Luft steigt, die Dichtigkeit also in stärkerem Verhältnis abnimmt, als wenn der Wassergehalt derselbe bliebe, so erhöhe man die Zahl $\alpha = 0{,}00375$ der Bequemlichkeit der Rechnung wegen auf 0,004 und setze

$$1 + \alpha\theta = 1 + \frac{2\,(t + t_1)}{1000}.$$

Man hat dann

$$\log \frac{h}{h^1} + 2 \log \left(1 + \frac{z}{r}\right) = \frac{g\ r\ z}{k\left(1 + \frac{2}{1000} \cdot (t + t_1)\right)(r + z)}$$

und aus dieser Formel folgt nun

$$z = \frac{k}{g}\left[1 + \frac{2}{1000}(t + t_1)\right]\left[\log \frac{h}{h^1} + 2 \log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right] \cdot \left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

Man hat vorhin $k = 7961\ G$ angenommen, wo G die in Paris beobachtete Schwere bedeutet. Aus Beobachtungen der Länge des Sekundenpendels an verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche hat man auf folgende empirische Formel für die Schwere g unter der geographischen Breite ψ am Meeresspiegel geschlossen

$$g = \text{Const.} \times (1 - 0{,}002588 \cos 2\ \psi).$$

Wenn man daher den Unterschied der Schwere in Paris und am Meeresspiegel vernachlässigt, so hat man auch

$$G = \text{Const.} \times (1 - 0{,}002588 \cos (97^0\ 40^1\ 28^{11}))$$

da die Breite von Paris $48^0\ 50^1\ 14^{11}$ ist. Weil aber die Schwere in Paris $G = 9{,}80896$ m ist, so hat man im Meeresspiegel irgend eines Ortes der Erdoberfläche

$$\frac{g}{G} = \frac{1 - 0{,}002588 \cos 2\ \psi}{1 - 0{,}002588 \cos (97^0\ 40'\ 28'')},$$

daher ist auch

$$\frac{k}{g} = 7961{,}1 \cdot \frac{G}{g} = 7961{,}1 \cdot \frac{(1 - 0{,}002588 \cos (97^0 40' 28''))}{1 - 0{,}002588 \cos 2\,\psi}.$$

Um die Tafeln gebrauchen zu können, muß man die natürlichen Log. in Briggische verwandeln. Werden diese mit Log u bezeichnet, so ist bekanntlich

$$\log u = \log 10.\ \mathrm{Log}\ u.$$

Man hat dann

$$\frac{k \log 10}{g} = \frac{7961{,}10 \times 2{,}3025851 \times 1{,}0003456}{1 - 0{,}002588 \cos 2\,\psi},$$

$$= \frac{18337{,}46}{1 - 0{,}002588 \cos 2\,\psi},$$

und daher ist schließlich

$$z = \frac{18337{,}46}{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi} \left[1 + \frac{2}{1000}(t + t_1)\right]\left[\mathrm{Log}\,\frac{h}{h^1} + 2\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

Poisson rät die Zahl 18337,46 durch 18336 zu ersetzen, weil diese Zahl aus dem Durchschnitte einer großen Menge von Höhen, die trigonometrisch gemessen wurden, bestimmt worden ist. Bei einer ersten Berechnung vernachlässigt man $\frac{z}{r}$ und bekommt so einen angenäherten Wert von z, den man bei der zweiten Rechnung rechts einsetzt. Für r setzt man r = 6,366198 m. Für ψ nimmt man das Mittel der geographischen Breiten beider Standpunkte. Um z zu berechnen, muß man t, t_1, h, h^1 und ψ kennen. Die Kenntnis von h^1 verlangt wiederum T, T_1 und h_1. Wir hatten bei der Aufgabe angenommen, der untere und obere Standpunkt seien in gerader Linie und t, h, T und ψ beziehen sich also auf diesen unteren, fingierten Punkt des Meeresniveau. Dieser Punkt ist nur

fingiert; wir nehmen für ihn den unteren Standpunkt. Auch haben wir bei der Lösung der Aufgabe die Anziehung des Berges unberücksichtigt gelassen, weil zwischen $z = o$ und z keine Materie angenommen wurde nach der Formel

$$g^1 = g \cdot \left(\frac{r}{r + z}\right)^2.$$

Wenn der obere Standpunkt über einer ausgedehnten Hochebene liegt, der untere am nächsten Meeresufer, so muß noch die Anziehung der ganzen über dem Meeresspiegel liegenden Schicht berücksichtigt werden. Einem Punkte O liege eine unbegrenzte, ebene Schicht in der Entfernung z und der Dicke dz gegenüber; ihre Dichtigkeit sei konstant und gleich d und f sei der Faktor der Gravitation. A sei Fußpunkt der aus O auf die Schichtebene gefällten Senkrechten, P irgend ein Punkt dieser Ebene.

$$\overline{AP} = x;\ \overline{OP} = r;\ x^2 = r^2 - z^2.$$

Beschreibt man um A zwei Kreise mit den Radien x und $x + dx$, so liegt zwischen beiden ein Stück der Schicht, deren Masse durch $2\pi . d . x . dx dz$ dargestellt werden kann. Weil nun für diese Schicht z konstant ist, so ist auch $x dx = r dr$ und daher die Masse

$$m = 2\pi . d . r . dr dz.$$

Auf O wird in der Richtung von r die Kraft $f \cdot \frac{m}{r^2}$ ausgeübt. Wir suchen die Componente in der Richtung OA, und erhalten dafür den Wert $f. \frac{m z}{r^3}$. Setzt man hier noch für m obigen Ausdruck ein, so folgt

$$k = 2\pi . d . f . z . dz \cdot \frac{dr}{r^2}$$

Um nun die Größe der Anziehung der ganzen Schicht zu erhalten, muß dieser Wert von $r = z$ bis $r = \alpha$ integriert werden. Man erhält so

$$K = 2\pi\, d\, f\, d\, z.$$

Integrieren wir diesen Ausdruck noch von $z = o$ bis zu einem beliebigen Werte von z, so erhält man

$$K = 2\pi\, d.\, f.\, z,$$

als Größe der Anziehung, welche die Schicht von der Dicke z auf den in ihrer obern Grenzfläche befindlichen Punkt O ausübt. Bedeutet ferner δ die mittlere Dichtigkeit der Erde, so ist die Anziehung in einem Punkte ihrer Oberfläche roh geschätzt

$$g = \frac{4\, r^3\, \pi\, d.\, f}{3\, r^2} = \frac{4}{3}\, \pi\, \delta\, f.\, r,$$

und daher ist, wenn man das Verhältnis der Dichtigkeit der Schicht zur Dichtigkeit der Erde durch die Zahl $\frac{1}{2}$ ersetzt

$$K = \frac{3}{4} \cdot \frac{g\, z}{r}$$

Die Beschleunigung, welche die Erdmasse allein an einem Massenteilchen in der Entfernung z von der Oberfläche hervorbringt, kann durch $\frac{r^2}{(r+z)^2}\, g$ dargestellt werden. Dazu kommt nun noch die Beschleunigung durch eine Schicht von der Dicke z im Betrage von $\frac{3}{4} \cdot \frac{z}{r}\, g$ und daher kann die gesamte Beschleunigung durch

$$\mathfrak{g} = g \left(\frac{r^2}{(r+z)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{r} \right),$$

dargestellt werden. In diesem Falle hat man die Differentialgleichung

$$\frac{d\, p}{p} = - \frac{g}{k\,(1 + \alpha\, \theta)} \cdot \left(\frac{r^2}{(r+z)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{r} \right) dz.$$

Entwickelt man nun den Ausdruck $\frac{r^2}{(r+z)^2}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{z}{r}$, setzt also

$$\frac{r^2}{(r+z)^2} = \left(1 + \frac{z}{r}\right)^{-2} = 1 - 2\,\frac{z}{r} + 3 \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^2 + \cdots\cdots$$

und berücksichtigt von dieser Reihe nur die zwei ersten Terme mit Vernachlässigung der zweiten und aller höhern Potenzen von $\frac{z}{r}$, so kann der obige Klammerausdruck durch $\left(1 - \frac{5}{4}\,\frac{z}{r}\right)$ ersetzt werden und man hat dann

$$\frac{d\,p}{p} = -\,\frac{g}{k\,(1 + \alpha\,\theta)} \cdot \left(1 - \frac{5}{4}\,\frac{z}{r}\right) d\,z$$

Wird nun diese Gleichung von $z = o$ bis zu einem beliebigen Werte von z integriert und die Spannung im Meeresniveau wie früher mit $\overline{\omega}$ bezeichnet, so erhält man

$$\text{a)} \quad \log \frac{\overline{\omega}}{p} = \frac{g}{k\,(1 + \alpha\,\theta)} \cdot z \left(1 - \frac{5}{8}\,\frac{z}{r}\right).$$

Nun ist auch hier $\overline{\omega} = h\,\delta\,g$ und für die Spannung p erhält man zunächst

$$p = h^1\,\delta\,g = h^1\,\delta\,g \left(\frac{r^2}{(r+z)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{r}\right).$$

Wird auch der Klammerausdruck nach steigenden Potenzen von $\frac{z}{r}$ entwickelt, so erhält man mit Vernachlässigung der zweiten und aller höhern Potenzen von $\frac{z}{r}$ für p den angenäherten Wert

$$p = h^1\,\delta\,g \left(1 - \frac{5}{4}\,\frac{z}{r}\right).$$

Beachtet man ferner, daß $\frac{1}{1 - \frac{5}{4}\,\frac{z}{r}}$ in tiefster Näherung durch $\left(1 + \frac{5}{4}\,\frac{z}{r}\right)$ also auch durch $\left(1 + \frac{5}{8}\,\frac{z}{r}\right)^2$ dargestellt werden kann, so erhält man für den Quotienten $\frac{\overline{\omega}}{r}$ den Wert

$$\frac{\overline{\omega}}{p} = \frac{h}{h^1} \cdot \left(1 + \frac{5}{8}\,\frac{z}{r}\right)^2,$$

und daher ist auch

$$\text{b)} \quad \log \frac{\overline{\omega}}{p} = \log \frac{h}{h^1} + 2 \log \left(1 + \frac{5}{8}\,\frac{z}{r}\right).$$

Aus den Gleichungen a und b folgt nun

$$z = \frac{k(1 + \alpha\,\theta)}{g} \cdot \left(1 + \frac{5}{8}\,\frac{z}{r}\right)\left(\log \frac{h}{h^1} + 2 \log\left(1 + \frac{5}{8}\,\frac{z}{r}\right)\right),$$

und endlich findet man

$$z = \frac{18336.\left(1 + \frac{2}{1000} \cdot (t + t_1)\right)}{1 - 0{,}002588 \cos 2\,\psi}$$

$$\left[\mathrm{Log}\,\frac{h}{h^1} + 2\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{5}{8} \cdot \frac{z}{r}\right)\right] \cdot \left(1 + \frac{5}{8}\,\frac{z}{r}\right).$$

Das Annuaire von 1881 hat eine mit der vorigen im wesentlichen übereinstimmende Formel, wahrscheinlich weil die Schätzung der über dem Meeresspiegel liegenden Erdschicht zu unsicher ist, da ohnehin die Dichtigkeit der Erdkruste von Ort zu Ort variert. Diese Formel setzt aber nicht voraus, daß der untere Standort im Meeresspiegel liege. Wie früher sei $r = 6366198$ m der Radius der Erde, $(r + s)$ der Abstand des untern Standpunktes

vom Mittelpunkte der Erde, $(r + s + z)$ derjenige des Obern. Unten seien T und t die Temperaturen des Quecksilbers und der Luft, h die Barometerhöhe; oben seien T_1, t_1 die zwei Temperaturen, h_1 die beobachtete, h^1 die auf die Temperatur T zurückgeführte Barometerhöhe. Weil die Barometer gewöhnlich eine messingene Skala tragen, so kann nicht die absolute Ausdehnung des Hg beobachtet werden, sondern nur seine relative Ausdehnung zu Messing. Diese ist nur $\frac{1}{6200}$; daher ist

$$h^1 = h_1\left(1 + \frac{T - T_1}{6200}\right).$$

Die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\,p}{p} = -\frac{g\,r^2}{k\,(1 + \alpha\,\theta)} \cdot \frac{d\,z}{(r + s + z)^2},$$

von $z = o$ bis zu einem beliebigen Werte von z ergibt nun

$$\log\frac{p^1}{p} = \frac{g\,r^2}{k\,(1 + \alpha\theta)} \cdot \left(\frac{1}{r + s} - \frac{1}{r + s + z}\right. =$$

$$\frac{g\,z}{k\,(1 + \alpha\,\theta)} \cdot \frac{r^2}{(r + s)\,(r + s + z)}$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich für z der Wert

$$\text{c)} \quad z = \frac{k\,(1 + \alpha\,\theta)}{g} \cdot \left(1 + \frac{s}{r}\right)\left(1 + \frac{s + z}{r}\right)\log\frac{p^1}{p}.$$

Nun ist wieder

$$p = h^1\,\delta\,g\,\frac{r^2}{(r + s + z)^2};\quad p^1 = h\,\delta\,g \cdot \frac{r^2}{(r + s)^2};$$

und daher

$$\frac{p^1}{p} = \frac{h}{h^1}\left(1 + \frac{z}{r + s}\right)^2.$$

Weil $\frac{z}{r}$ schon sehr klein ist, so darf man in tiefster Näherung $\left(1 + \frac{z}{r+s}\right)^2$ durch $\left(1 + 2 \cdot \frac{z}{r}\right)$ darstellen; dann ist auch

$$\text{d)} \quad \log \frac{p^1}{p} = \log \frac{h}{h^1} + 2 \frac{z}{r},$$

wenn $\log \left(1 + 2 \cdot \frac{z}{r}\right)$ durch $2 \frac{z}{r}$ ersetzt wird. Nach der Gleichung c) ist aber z in erster Annäherung gleich

$$z = \frac{k}{g} \log \frac{p_1}{p},$$

und weil nach Gleichung d) $\log \frac{p_1}{p}$ annähernd durch $\log \frac{h}{h_1}$ dargestellt werden kann, so ist

$$2 \frac{z}{r} = \frac{2\,k}{g} \log \frac{h}{h^1}$$

eine annähernd richtige Gleichung. Setzen wir nun diesen Wert für $2 \frac{z}{r}$ in die Gleichung d) ein, so folgt

$$\log \frac{p^1}{p} = \left(1 + \frac{2\,k}{g} \cdot \frac{1}{r}\right) \log \frac{h}{h^1}.$$

Ersetzt man noch das Produkt der drei Faktoren $\left(1 + \frac{s}{r}\right) \left(1 + \frac{s+z}{r}\right) \left(1 + \frac{2\,k}{g} \cdot \frac{1}{r}\right)$ durch den angenähert richtigen Wert $\left(1 + \frac{1}{r}\left(2\,s + z + \frac{2\,k}{g}\right)\right)$, so erhält man schließlich für z den Ausdruck

$$z = \frac{k\,(1 + \alpha\,\theta)}{g} \cdot \left[1 + \frac{1}{r}\left(2\,s + z + \frac{2\,k}{g}\right)\right] \log \frac{h}{h^1}.$$

Innerhalb der Klammer nimmt das Annuaire $\frac{k}{g} = \frac{k}{G} = 7961$ (bei Poisson) an; außerhalb braucht es im Ausdrucke für g den Coefficienten 0,00265 statt 0,002588 bei Poisson, hat demnach

$$\frac{k \log 10}{g} = \frac{18336}{1 - 0{,}00265 . \cos 2\psi},$$

und schreibt dafür, da man das Quadrat von $\frac{\cos 2\psi}{400}$ und die höheren Potenzen davon vernachlässigen kann

$$\frac{k \log 10}{g} = 18336 . (1 + 0{,}00265 \cos 2\psi).$$

Es hat daher für den Niveauunterschied z zwischen beiden Stationen den Ausdruck

$$z = 18336 (1 + 0{,}00265 \cos 2\psi) \left(1 + \frac{2 (t + t_1)}{1000}\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{z + 15926}{6366198} + \frac{s}{3183099} \times \mathrm{Log} \frac{h}{h^1}\right.$$

Der Verfasser Mathieu des Artikels sagt, daß bis auf den Term $\frac{s}{3183099}$ diese Formel sich in der Mecanique céleste finde. Da

$$h^1 = h_1 \left(1 + \frac{T - T_1}{6200}\right),$$

so ist

$$\mathrm{Log}\, h^1 = \mathrm{Log}\, h_1 + \frac{T - T_1}{6200 \log 10},$$

und weil

$$\frac{18336}{6200 \log 10} = 1,\ 2843,$$

also

$$18336 \operatorname{Log} \frac{h}{h^1} = 18336 \operatorname{Log} \frac{h}{h_1} - 1{,}2843\,(T - T_1)$$

ist, so hat man auch

$$z = \left[18336 \operatorname{Log} \frac{h}{h^1} - 1{,}2843\,(T - T_1)\right]\left[1 + \frac{2\,(t + t_1)}{1000}\right]$$

$$\times\left(1 + 0{,}00265 \cos 2\psi + \frac{z + 15926}{6366198}\right)\left(1 + \frac{s}{3183099}\right).$$

Für die Höhe s der unteren Station über Meer darf man mit hinreichender Näherung

$$s = 18336 \log \frac{760}{h},$$

setzen. Mathieu gibt folgenden Gang der Rechnung an:

$$a = 18336 \operatorname{Log} \frac{h}{h_1} - 1{,}2483\,(T - T_1),$$

$$A = a\left(1 + \frac{(t + t_1)}{1000}\right).$$

$$z = A.\left[1 + 0{,}00265 \cos 2\psi = \frac{A + 15926}{6366198}\right]\left(1 + \frac{s}{3183099}\right),$$

und gibt zur Unterstützung der Rechnung folgende vier Tafeln:

1) Die Tafel I gibt in Metern die Werte von

$$18336.\ \operatorname{Log} h - 44428{,}128.$$

(Die abgezogene Zahl entspricht dem Werte Log h = 2,423, h = 0,26485 m.)

2) Die Tafel II gibt die Werte von $1{,}2483\,(T - T_1)$.

3) Die Tafel III mit doppeltem Eingange, wo die Werte von A von 1 × bis 30 × 100, 3500,

von $4 \times$ bis 7×1000 betragen und ψ von $0 \times$ bis 21×3^0 läuft, gibt die Werte von

$$A \left[0{,}00265 \cos 2\psi + \frac{A + 15926}{6366198}\right].$$

4) Die Tafel IV mit doppeltem Eingange gibt die Werte von

$$A \cdot \frac{s}{3183099} = A \cdot \frac{18336}{3183099} \log \frac{760}{h} = A . 0{,}00576 . \log \frac{760}{h};$$

A geht von $1 \times$ bis 10×100, dann von $6 \times$ bis 15×200, endlich von $4 \times$ bis 8×1000; und h geht in Differenzen von je 0,030 von 0,460 bis 0,730. Als Beispiel führt Mathieu eine Messung der Höhe des Montblanc durch Bravais und Martins vom 29. August 1844 an.

Untere Station: Sternwarte zu Genf

$h = 0{,}72965$; $T = 18^0, 6$; $t = 19^0, 3$.

Obere Station: 1 m unterhalb des Gipfels.

$h_1 = 0{,}42405$, $T_1 = -4^0, 2$; $t_1 = -7^0, 6$.

$$18336 . \operatorname{Log} \frac{h}{h_1} = 4321{,}8; \quad 1{,}2843 . (22^0{,}8) = 29{,}3,$$

$$a = 4292{,}5; \quad a \cdot \frac{2 . (11^0{,}7)}{1000} = 100{,}4;$$

$$A = 4392{,}5.$$

Breite $\psi = 46^0$. Die Tafel III gibt 13,6 und die Tafel IV gibt 0,4; also ist

$$z = 4406{,}9; \quad s = 408.$$

Der Gipfel des Montblanc ist also 4815,9 m über Meer. Für ψ nimt man die mittlere Breite. In der Tafel sind für A nur bestimmte Werte angegeben. Die andern müssen durch Interpolation gefunden werden.