Geometria : percezione e astrazione dello spazio

Autor(en): **Felder, Giovanni**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archi : rivista svizzera di architettura, ingegneria e urbanistica = Swiss review of architecture, engineering and urban planning**

Band (Jahr): **- (2006)**

Heft 1

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-133428

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Geometria: percezione e astrazione dello spazio

Giovanni Felder*

La geometria è un'astrazione di quello che percepiamo nello spazio che ci circonda. Diversi modi di osservare lo spazio conducono a geometrie diverse. Quella più direttamente legata alla percezione visiva dello spazio non è la geometria euclidea, bensì la geometria proiettiva. Queste e altre geometrie si ritrovano poi nella descrizione delle leggi della natura.

La geometria ha molti punti di contatto con la realtà fisica e la nostra percezione di essa. L'origine della geometria, che etimologicamente è la «misura della terra», è senza dubbio nella percezione dello spazio che ci circonda. Ma ne è un'idealizzazione, una versione perfetta e astratta dello spazio imperfetto in cui ci muoviamo. Questa perfezione, a cui aneliamo, ci spinge da una parte a modificare lo spazio con le nostre costruzioni dandogli le forme e le simmetrie della geometria e d'altra parte a cercare e talvolta a trovare nelle leggi della natura le stesse forme e simmetrie. Si creano così varie relazioni di interdipendenza tra il mondo astratto della geometria e il mondo della nostra esperienza della realtà fisica.
Platone, quando notò che esistono cinque solidi regolari, pensò che necessariamente questo fatto matematico dovesse riflettere una proprietà della natura. Così ipotizzò che i quattro elementi, fuoco, aria, acqua e terra, fossero composti da solidi regolari: il fuoco consiste di tetraedri, solidi regolari di quattro facce triangolari, l'aria di ottaedri (otto facce triangolari), l'acqua di icosaedri (20 facce triangolari) e la terra di cubi. Resta il dodecaedro (dodici facce pentagonali) che Platone associò all'universo intero e che gli alchimisti del medioevo interpreteranno come la «quintessenza» che permea ogni corpo. Oggi sappiamo che questa descrizione della realtà non è corretta, ma l'idea che le leggi della natura siano dettate dalla geometria ha continuato ad affascinare gli studiosi da Platone ai giorni nostri e ha portato a grandi scoperte della fisica. Ma che ruolo ha la geometria nel processo conoscitivo e come mai gli scienziati, da Platone in poi, hanno cercato nella geometria la chiave della descrizione della natura?

La geometria ha origine nella percezione dello spazio. I concetti geometrici di base sono le forme più semplici che l'uomo distingue nella natura che lo circonda. Così il punto, che in Euclide è un oggetto «senza estensione», la prima entità introdotta nei suoi *Elementi,* è il granello di sabbia, o la stella nel cielo. La linea retta è l'orizzonte o la corda tesa, il piano è uno specchio d'acqua, il cerchio è la forma della luna piena o del sole. È in questa fase di percezione dello spazio che appaiono gli oggetti di cui tratta la geometria e a questa fase percettiva appartengono anche le loro proprietà di base. Così per esempio il postulato euclideo che per due punti distinti passa una sola retta è ricavato dalla nostra percezione di questi oggetti nello spazio e che possiamo verificare con una corda tesa tra i due punti. A questa fase di percezione segue una fase di astrazione che costituisce la geometria vera e propria, la quale acquista così una sua realtà indipendente dall'esperienza da cui i concetti sono stati tratti. Quindi il punto euclideo è un granello di sabbia infinitamente piccolo, il segmento di retta è la corda tesa immaginata senza spessore alcuno, e le linee rette sono infinitamente estese. In questa realtà ideale degli oggetti geometrici si scoprono fenomeni inaspettati, come quello dell'esistenza dei cinque solidi platonici, gli unici solidi regolari convessi. Quindi possiamo immaginarci come Platone abbia potuto ragionare: gli oggetti geometrici sono frutto della percezione dello spazio, sono le forme più semplici e perfette che distinguiamo nella natura; questi oggetti formano una realtà astratta in cui valgono i teoremi geometrici, che hanno in questa realtà astratta una inevitabile e incontrovertibile validità. È naturale pensare che questi teoremi, come quello dell'esistenza di esattamente cinque solidi regolari convessi, siano in qualche modo riflessi nelle leggi della natura, alla quale abbiamo preso in prestito i concetti geometrici attraverso la nostra percezione dello spazio. Questo modo di ragionare riflette il desiderio dell'uomo di ridurre la complessità della natura che lo disorienta alle verità incontrovertibili

della matematica ed è per certi versi sorprendente che in effetti le leggi naturali siano formulabili in termini geometrici.
Giovanni Keplero (1571-1630) fu uno scienziato che incessantemente cercò di distinguere nella natura regolarità geometriche e fece anche scoperte importanti in geometria. Così, affascinato come Platone dai solidi regolari, postulò che la terra e i cinque altri pianeti allora conosciuti si muovessero su sfere concentriche in modo che ognuno dei cinque solidi platonici trovasse esattamente posto tra due sfere successive (fig. 1). Ancora una volta questo tentativo di vedere riflessa nella natura la perfezione della geometria non ha successo. In seguito però lo stesso Keplero formulò le sue leggi del moto planetario che verificò con gli scarni dati astronomici disponibili allora. Queste leggi sono geometriche. La prima in particolare afferma che le traiettorie dei pianeti sono ellissi di cui il sole è un fuoco. Newton mostrerà qualche decennio dopo che le leggi di Keplero sono conseguenze della sua teoria della gravitazione, che prevede che la traiettoria di un grave nel campo gravitazionale del sole è un'ellisse, una parabola o un'iperbole. E così queste curve, introdotte e studiate nella geometria greco-ellenistica riappaiono nella descrizione delle leggi della natura. Nelle *Coniche* (sec. II a. C.) di Apollonio, uno dei capolavori della geometria ellenistica, l'ellisse, la parabola e l'iperbole sono definite come *sezioni coniche*, ovvero come le curve ottenute tagliando un cono con un piano.

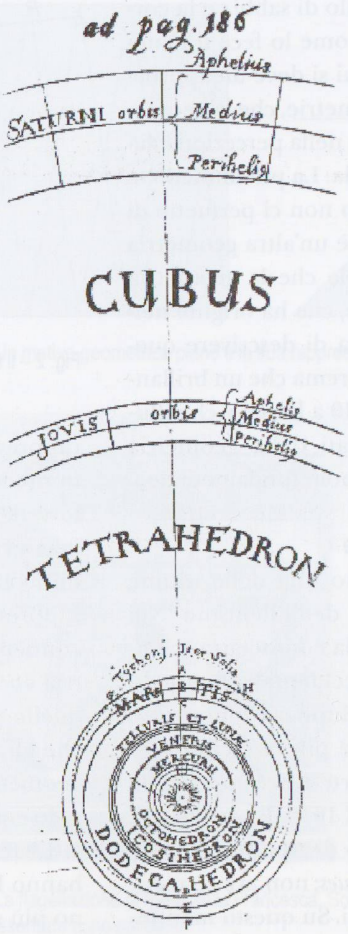

Fig. 1 – da J. Kepler, *Harmonices mundi*, 1617

Geometria e geometrie

A partire dai lavori di Keplero e Newton il fatto, già anticipato da Galileo, che la natura è descritta da leggi geometriche diventa un tema costante della ricerca e culminerà con la teoria della relatività generale di Einstein, che è una teoria puramente geometrica della gravitazione. Quello che c'è di nuovo rispetto alla geometria euclidea, è che non si parla più di una sola geometria, ma di geometrie diverse, con postulati diversi e diversi teoremi. Questo può sembrare strano se pensiamo la geometria come un'idealizzazione dello spazio che ci circonda e di questo ce n'è uno solo. E infatti alcune di queste geometrie, come quella a n dimensioni, sono generalizzazioni puramente astratte della geometria euclidea. Ma ci sono altre geometrie che hanno origine, come la geometria euclidea, nella percezione dello spazio ma corrispondono a esperienze diverse della realtà. Ci vogliamo soffermare soprattutto sulla geometria proiettiva, che ha, come vedremo, addirittura una più diretta relazione con la nostra percezione soggettiva dello spazio che la geometria euclidea.

Per capire meglio la relazione tra percezione dello spazio e geometria dobbiamo riesaminare come arriviamo ai concetti della geometria euclidea a partire dall'esperienza di ciò che ci circonda. Abbiamo visto che questi concetti sono versioni astratte di oggetti della nostra percezione: il granello di sabbia, la stella, la corda tesa, l'orizzonte del mare. Si potrebbe supporre che la stella e l'orizzonte siano modelli per i concetti di punto e di retta migliori dell'imperfetto granello di sabbia e della ruvida corda. In realtà nella geometria euclidea ha un ruolo importante il confronto tra gli oggetti: per esempio, un triangolo isoscele è un triangolo che ha due lati che Euclide chiama uguali e che noi, più precisamente o più pedantemente, chiamiamo congruenti. Ciò significa che si può muovere un lato e farlo combaciare coll'altro o che i due lati hanno la stessa lunghezza, il che implica una misura. Questo concetto di congruenza corrisponde nel mondo della nostra esperienza percettiva a un muovere di oggetti, per confrontare e misurare che richiede modelli alla

nostra portata come il granello di sabbia e la corda. All'estremo si può dire, come lo fece il matematico tedesco Felix Klein cui si deve un approccio sistematico alle varie geometrie, che la geometria euclidea ha la sua origine nella percezione *tattile* dello spazio che ci circonda. La più immediata percezione *visiva* dello spazio non ci permette di confrontare lunghezze, ma c'è un'altra geometria altrettanto interessante e utile che la geometria euclidea, la *geometria proiettiva*, che ha origine nella visione dello spazio. Prima di descrivere quest'origine, è utile citare un teorema che un brillante sedicenne pubblicò nel 1640 a Parigi e che illustra bene il tipo di enunciati della geometria proiettiva e che vi gioca un ruolo fondamentale.

Blaise Pascal e le sezioni coniche

Le *Coniche* di Apollonio sono una delle ultime grandi opere di matematica dell'Ellenismo. Nei secoli successivi il centro della conoscenza scientifica si sposta dall'Europa occidentale al mondo arabo che in matematica svilupperà soprattutto l'algebra. Bisognerà aspettare più di diciotto secoli per vedere nuove scoperte nel campo delle sezioni coniche. All'inizio del 1640, Blaise Pascal, dopo aver studiato il trattato di Apollonio, pubblicò il suo *Essai pour les coniques*; non aveva ancora compiuto i diciassette anni. Su questo manifesto di 35×43 cm, destinato a essere appeso e discusso in pubblico, troviamo tra l'altro quello che oggi chiamiamo teorema di Pascal: i tre punti di incontro delle tre coppie di lati opposti, prolungati in rette, di un esagono iscritto in una sezione conica si trovano sulla stessa retta. Nella fig. 2 i tre punti in questione sono *P, Q, R* e la sezione conica è un'ellisse.

Al di là del contenuto specifico del teorema, questo risultato è importante perché porta a un nuovo punto di vista sulla geometria e illustra i temi principali di una nuova branca della matematica che sarà sviluppata pienamente nell'ottocento ed è alla base di molte parti della matematica contemporanea: la geometria proiettiva. Per apprezzare questo nuovo punto di vista, dobbiamo tornare indietro nel tempo e cercare la sua origine in un'istanza di geometria come percezione dello spazio.

Brunelleschi e la geometria proiettiva

Non a caso è tra gli artisti e architetti del Rinascimento che appaiono nel loro studio della prospettiva le prime idee che porteranno alla geometria proiettiva. La prospettiva è una delle teorie matematiche sviluppate nell'Ellenismo che nel Rinascimento sono riscoperte e rielaborate. Il problema affrontato dalla prospettiva è come

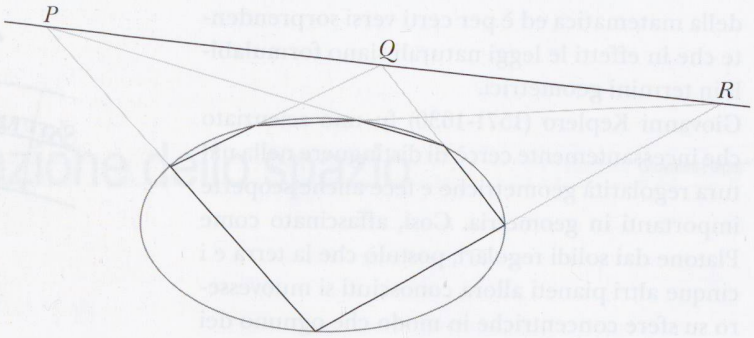

Fig. 2 – Il teorema di Pascal. I punti P, Q, R sono allineati su una retta

rappresentare su una tela un oggetto dello spazio in modo che l'osservatore lo veda sulla tela come lo vede nello spazio. Per noi, bombardati da immagini d'ogni tipo, questo concetto non ci causa difficoltà alcuna, ma bisogna rendersi conto che la rappresentazione di un oggetto in prospettiva contiene un'importante deviazione dalla geometria euclidea. In Euclide un concetto essenziale è quello di congruenza; semplificando si può dire che gli angoli e le lunghezze sono alla base della geometria euclidea. Quindi per esempio un triangolo equilatero è caratterizzato dal fatto che i suoi lati hanno la stessa lunghezza o che i suoi angoli hanno la stessa misura. Questi concetti non hanno più significato quando gli oggetti sono dipinti in prospettiva: il pittore che vuole rappresentare un triangolo equilatero che non è parallelo al piano della tela dipingerà un triangolo i cui lati e i cui angoli non hanno uguale misura. Un cubo rappresentato in prospettiva non ha gli spigoli di lunghezza uguale. La prospettiva suggerisce quindi modi diversi di pensare la geometria che hanno la loro origine nella percezione dello spazio, nel senso più stretto: l'immagine di un oggetto spaziale proiettata sulla retina dell'occhio dell'osservatore. La tecnica della prospettiva comporta prima di tutto lo sviluppo di una serie di metodi della geometria dello spazio. Questi metodi sono sviluppati nel Rinascimento da artisti come Filippo Brunelleschi, Piero della Francesca, che scrisse vari trattati di matematica di cui uno sulla prospettiva, Paolo Uccello e Leonardo da Vinci. È a Brunelleschi che dobbiamo l'osservazione fondamentale che sta alla base della geometria proiettiva: rette parallele nello spazio rappresentate in prospettiva si incontrano in un punto sulla tela. Per esempio l'illustrazione a sinistra della fig. 3 è un semplice motivo geometrico, costituito da due gruppi di linee parallele. A destra lo stesso motivo è rappresentato in prospettiva: le linee di ognuno dei due gruppi si incontrano nello stesso punto all'orizzonte. Se aggiungessimo al disegno di sinistra

un terzo gruppo di linee tra loro parallele, queste si incontrerebbero nel disegno di destra in un terzo punto all'orizzonte. Quindi l'orizzonte, che nel disegno di destra è la retta orizzontale sopra l'immagine in prospettiva del quadrato, è costituito dai punti d'incontro delle famiglie di rette parallele del piano, rappresentate in prospettiva.

Il passo dalla prospettiva alla geometria proiettiva è un processo di astrazione, simile al passo che abbiamo fatto per passare dalla linea retta della nostra esperienza percettiva alla linea retta infinitamente estesa della geometria euclidea. L'idea di base, di Keplero, è quella di aggiungere al piano euclideo i punti infinitamente lontani di incontro delle rette parallele, che costituiscono l'orizzonte nell'immagine in prospettiva di un piano. L'oggetto fondamentale della geometria (piana) proiettiva è quindi il *piano proiettivo,* ottenuto dal piano della geometria euclidea aggiungendo una retta «all'infinito». Questa retta è costituita dai punti all'infinito delle rette del piano euclideo. Ogni retta euclidea ha un punto all'infinito e rette parallele hanno lo stesso punto all'infinito. Questa costruzione, per la quale è necessario immaginarsi punti infinitamente lontani, può sembrare molto astratta e poco intuitiva, ma la sua radice è direttamente legata alla percezione e corrisponde a una realtà molto concreta: il punto all'infinito nel quale si incontrano rette parallele è un punto reale sulla tela del pittore che le rappresenta. Per esempio nella celebre *Flagellazione* di Piero della Francesca le rette parallele perpendicolari alla tela si incontrano in un punto in fondo alla sala (fig. 4). E qui dobbiamo fare una precisazione che ci aiuta a capire uno sviluppo fondamentale della geometria che sarà compreso pienamente solo molto più tardi. La precisazione riguarda l'osservazione di Brunelleschi sui punti d'incontro di rette parallele. È vero che rette parallele rappresentate in prospettiva si incontrano in un punto, ma con un'eccezione: le rette parallele alla tela, come i lati orizzontali della fig. 3 o le linee orizzontali sul pavimento e sul soffitto della fig. 4, rimangono parallele anche in prospettiva e quindi non si incontrano. Dov'è quindi il loro punto d'incontro all'infinito? La risposta è semplicemente che come la realtà non può essere rappresentata completamente da un solo quadro, così anche il piano proiettivo non può essere interamente rappresentato sul piano di una tela. Se però ci fosse un secondo pittore che dipingesse in prospettiva la stessa scena su una tela angolata in modo diverso, allora su questa seconda tela si vedrebbe il punto di incontro all'infinito delle rette che non si incontrano sulla prima tela.

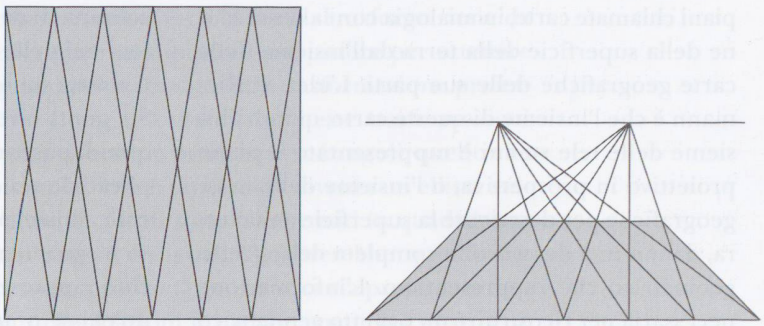

Fig. 3 – Un motivo geometrico piano e la sua rappresentazione in prospettiva

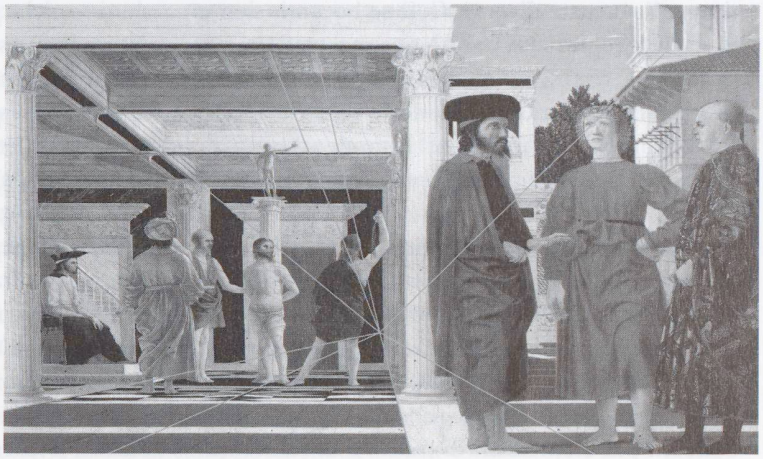

Fig. 4 – La flagellazione di Piero della Francesca. Sono evidenziate alcune linee che nella scena rappresentata sono parallele

Bernhard Riemann e le varietà

Questo fatto porterà Bernhard Riemann all'introduzione del concetto di *varietà* (Mannigfaltigkeit) nel suo colloquio di abilitazione, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* all'università di Gottinga nel 1854. Questo concetto, fondamentale nella geometria contemporanea, illustra bene i temi di percezione, rappresentazione e astrazione: una varietà, nel senso di Riemann, è un oggetto geometrico astratto come il piano proiettivo, che come abbiamo visto è definito come il piano euclideo a cui punti infinitamente lontani sono stati aggiunti. Questo oggetto astratto acquista una realtà dalla sua descrizione sui piani in cui è rappresentato. Nel nostro esempio del piano proiettivo questi piani sono i piani delle tele in cui immaginiamo rappresentato il piano proiettivo in prospettiva. Se rappresentiamo il piano su un numero sufficiente di tele disposte in modo opportuno, ogni punto del piano proiettivo, che sia all'infinito o no, sarà rappresentato da un punto su almeno una tela. Lo stesso tipo di descrizione è possibile per tutte le varietà: per esempio le varietà bidimensionali sono descritte dalla loro immagine su una collezione di

piani chiamate carte, in analogia con la descrizione della superficie della terra dall'insieme delle carte geografiche delle sue parti. L'idea di Riemann è che l'insieme di queste carte, quindi l'insieme delle tele su cui è rappresentato il piano proiettivo in prospettiva, o l'insieme delle carte geografiche per descrivere la superficie della terra, danno una descrizione completa dell'oggetto geometrico che rappresentano. L'informazione necessaria per ricostruire un oggetto geometrico dalla sua rappresentazione su un insieme di carte è l'indicazione di come far corrispondere punti uguali su carte diverse. Così se ho un insieme di carte geografiche che ricoprono tutta la superficie terrestre, posso ricostruire un modello in scala della terra incollando le carte in modo da far combaciare punti corrispondenti su carte diverse.

Dualità punto-retta

Ma torniamo al piano proiettivo. Che tipo di geometria si può fare su un piano proiettivo? Come abbiamo visto, la distanza tra punti non ha senso in geometria proiettiva, visto che in prospettive diverse le distanze sono diverse. Ma i concetti più elementari di punto e di retta hanno un senso: un punto rappresentato in prospettiva è ancora un punto e una retta in prospettiva rimane una retta. La relazione di incidenza è un altro concetto importante che ha un senso in geometria proiettiva: diciamo che un punto e una retta sono incidenti se la retta passa per il punto. E qui troviamo uno dei principi fondamentali della geometria proiettiva: la dualità tra punto e retta. Questo principio dice che rette e punti sono intercambiabili in geometria proiettiva: a ogni enunciato valido concernente punti e rette in geometria proiettiva corrisponde un enunciato valido nella quale punti e rette sono scambiati. L'esempio più semplice è dato dai due enunciati seguenti, entrambi validi nel piano proiettivo.

Per due punti diversi passa una e una sola retta.
Due rette diverse si incontrano in uno e un solo punto.

Il primo enunciato dice che c'è una sola retta incidente a due punti, il secondo che c'è un solo punto incidente a due rette. Si noti che in geometria euclidea il secondo enunciato è falso: rette parallele distinte non si incontrano. Poncelet, a cui si deve il primo approccio sistematico alla geometria proiettiva, mise il principio di dualità in evidenza scrivendo il suo *Traité des propriétés projectives des figures* del 1822 su due colonne. La colonna di destra contiene tutte le definizioni e i teoremi della colonna di sinistra, dove però punti e rette sono sistematicamente scambiati.

Su punti e rette non si può dire molto di più, quindi passiamo a degli oggetti un po' più complicati: le sezioni coniche. La distinzione tra cerchio, ellisse, parabola e iperbole non ha più senso in geometria proiettiva: per esempio un cerchio rappresentato in prospettiva può diventare un'ellisse o un'altra sezione conica. E qui vediamo come il teorema di Pascal è un teorema della geometria prospettiva: è valido per tutte le sezioni coniche: un esagono iscritto in una sezione conica è un esagono i cui vertici sono sulla sezione conica e rimane un esagono iscritto in una sezione conica su tutte le tele in cui è rappresentato in prospettiva. Inoltre l'interpretazione del teorema di Pascal come teorema della geometria proiettiva ci permette di risolvere un problema nella sua formulazione su cui abbiamo sorvolato in precedenza: dove sono i punti di incontro *P,Q,R* se ci sono lati opposti paralleli? Prendiamo l'esempio più semplice dell'esagono regolare, che ha i lati opposti a due a due paralleli. Allora i tre punti di incontro dei lati opposti sono all'infinito e il teorema di Pascal vale ancora, visto che i punti all'infinito del piano proiettivo formano una retta.

Anche il teorema di Pascal ha una sua formulazione duale, chiamata teorema di Brianchon (fig. 5), in cui rette e punti sono scambiati. A un punto su una sezione conica corrisponde, nella formulazione duale, una retta tangente a una sezione conica. Così il teorema di Brianchon, dimostrato 150 anni dopo il teorema di Pascal, asserisce che le rette congiungenti vertici opposti di un esagono circoscritto a una sezione conica si incontrano in un punto. Queste tre rette *p, q, r* che si incontrano in un punto corrispondono ai tre punti *P, Q, R* che si trovano sulla stessa retta nel teorema di Pascal.

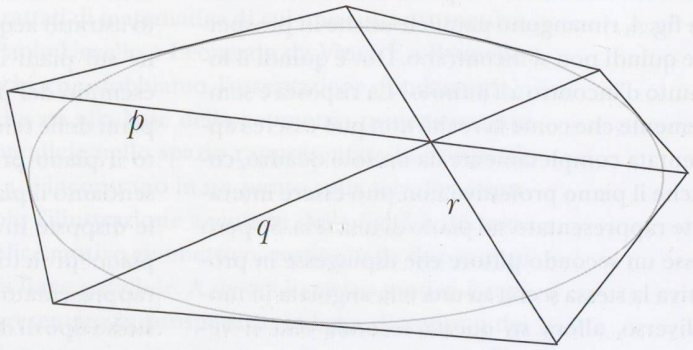

Fig. 5 – Il teorema di Brianchon

Le trasformazioni proiettive

Un concetto che nei secoli è diventato sempre più centrale in geometria è quello di invarianza per un gruppo di trasformazioni. Implicito nella congruenza di Euclide e reso più esplicito da Cartesio, questo concetto è alla base della geometria da quando Felix Klein nella sua celebre prolusione all'università di Erlangen nel 1872 mostrò come essenziale nel ragionamento geometrico sia il riconoscere gli invarianti, ovvero le quantità e le proprietà che sono immutate sotto certe trasformazioni. Quali siano le trasformazioni da considerare dipende dalla geometria che si considera. Così in geometria euclidea le trasformazioni sono le isometrie, le trasformazioni che preservano le distanze tra i punti. Un tipico esempio di isometria è la rotazione attorno a un punto: se ruotiamo un oggetto geometrico, diciamo un triangolo, attorno a un punto, le distanze tra i vertici, ovvero le lunghezze dei lati, non cambiano. Questo è un fatto della nostra esperienza percettiva dalla quale abbiamo astratto la geometria euclidea, che ci sembra talmente ovvio che non ci viene neanche in mente di pensarci: se disegnamo un triangolo su un foglio e misuriamo i suoi lati e poi ruotiamo il foglio e rimisuriamo i lati otterremo le stesse lunghezze. In realtà questo fatto di percezione della realtà diventa nel mondo astratto della geometria una proprietà fondamentale, che riflette una simmetria fondamentale delle leggi della fisica. Quantità invarianti della geometria euclidea sono appunto le distanze tra i punti e anche gli angoli tra rette incidenti. Quindi per esempio la proprietà di essere isoscele è una proprietà invariante di un triangolo: se ruotiamo un triangolo isoscele, cioè un triangolo che ha due lati di lunghezza uguale, otteniamo un triangolo che è ancora isoscele. E qui abbiamo uno dei primi teoremi degli Elementi di Euclide che è un tipico teorema di geometria euclidea, perché lega proprietà invarianti: un triangolo isoscele ha due angoli uguali.

Ma torniamo alla geometria proiettiva. Il ruolo delle isometrie, che caratterizzano la geometria euclidea, è giocato in geometria proiettiva dalle trasformazioni proiettive. Queste trasformazioni sono meno intuitivamente comprensibili ma paradossalmente più vicine alla percezione soggettiva della realtà: sono le trasformazioni che legano immagini di uno stesso oggetto visto da punti di vista diversi. Più concretamente, immaginiamo che un pavimento con dei motivi geometrici, come quello della fig. 3 sia dipinto in prospettiva da due pittori che lo vedono da due punti di osservazione diversi. Allora la trasformazione da effettuare sul dipinto di un pittore per ottenere quello del secondo è una trasformazione proiettiva. Come già osservato queste trasformazioni non preservano né distanze né angoli; quello che su un dipinto è un cerchio diventa un'ellisse sull'altro, quadrati sono trasformati in quadrilateri con angoli disuguali. Sembrerebbe quindi che nessuna proprietà geometrica sia preservata dalle trasformazioni proiettive, ma non è così: rette sono trasformate in rette e sezioni coniche in sezioni coniche. Inoltre se una retta passa per un punto o se è tangente a una curva sul quadro di un pittore, allora avranno queste proprietà di incidenza o di tangenza anche sul dipinto dell'altro pittore. Vediamo quindi come i teoremi di Pascal e Brianchon, che non parlano di angoli o di lunghezze ma di incidenze e tangenze, sono teoremi di geometria proiettiva, poiché concernono proprietà invarianti per trasformazioni proiettive.

La sfera celeste e le trasformazioni di Lorentz

La geometria proiettiva ha raggiunto la sua maturità nell'ottocento, con i lavori di Poncelet e von Staudt, ed è alla base di molti sviluppi successivi in molti campi della matematica e anche della fisica teorica. In particolare la geometria algebrica studia le varietà algebriche proiettive, di cui le rette e le sezioni coniche nel piano proiettivo sono gli esempi più semplici, essendo di dimensione uno e di grado uno e due, rispettivamente. Varietà algebriche di dimensione e grado più alti appaiono nelle moderne teorie delle particelle elementari. Si specula in queste teorie che lo spazio-tempo sia in realtà di dimensione dieci, ma che noi vediamo solo tre dimensioni spaziali e una temporale perché le rimanenti dimensioni formano una varietà proiettiva che vediamo solo indirettamente, attraverso le proprietà delle particelle, che si distinguono dal modo in cui si muovono all'interno di queste varietà. Ma al di là di queste teorie che sono ancora molto speculative e la cui verifica sperimentale appare ancora lontana, le trasformazioni proiettive hanno un ruolo importante in una teoria fisica molto ben verificata sperimentalmente: la relatività ristretta di Einstein. Per capire questo ruolo è necessario fare un passo di astrazione in più di quello che abbiamo fatto per arrivare alla geometria proiettiva. Questo passo ci porta in una direzione che non ha a priori un riscontro nella percezione dello spazio. L'oggetto geometrico da considerare è la *retta proiettiva complessa* o sfera di Riemann. L'origine di questo concetto non si trova nella geometria o nella percezione dello

spazio, bensì nell'algebra. È in questo campo della matematica che si riconosce per la prima volta la necessità di introdurre numeri più generali che i numeri reali: i numeri complessi sono introdotti nel cinquecento con i lavori di Cardano e Bombelli sulla teoria della risoluzione delle equazioni algebriche. Ma è solo molto più tardi che il significato geometrico dei numeri complessi sarà apprezzato completamente. Il significato geometrico dei numeri reali come punti su una retta risale già a Euclide. La retta complessa è un piano nel quale la retta euclidea dei numeri reali è contenuta. Quindi su una retta complessa ci si può muovere non solo in direzione reale cioè lungo la retta euclidea, ma anche in una seconda dimensione, in una direzione detta immaginaria. La terminologia utilizzata in questo campo, che risale all'epoca in cui i concetti sono stati scoperti e sviluppati, illustra bene la difficoltà di chi per primo si avventurava in un territorio della realtà matematica non direttamente ispirato alla percezione dello spazio e dei fenomeni naturali. Così i numeri complessi si ottengono aggiungendo numeri *immaginari* ai numeri reali e la retta complessa è un piano nel quale è contenuta la retta euclidea i cui punti sono detti *reali*. Il lettore non si lasci però impressionare da questi termini storici e pensi che la retta complessa è semplicemente un piano, che per ragioni che diventeranno più chiare, i matematici si ostinano a chiamare retta. La retta proiettiva complessa è ottenuta dalla retta complessa aggiungendo un punto all'infinito, esattamente come nel caso della geometria proiettiva considerata più sopra. Questo oggetto geometrico, consistente di un piano con un punto all'infinito, può essere visualizzato come una sfera, e per questo è chiamato sfera di Riemann. Ed è proprio il punto di vista di Riemann che ci permette di capire come una sfera possa essere rappresentata da un piano con un punto all'infinito: se pensiamo la sfera come la superficie della terra, possiamo pensare il piano (la retta complessa) come una carta geografica della terra ottenuta con una proiezione stereografica (fig. 6). In questa proiezione si immagina un piano tangente alla terra al polo sud e si fa corrispondere a un punto sulla superficie terrestre il punto dove la retta passante per il punto dato e il polo nord incontra il piano, come si vede sull'illustrazione. Questa carta geografica valorizza i piccoli Paesi dell'emisfero settentrionale, ma quello che è più importante per noi è che a ogni punto *P* della sfera corrisponde esattamente un punto *P'* sul piano della carta geografica, ad eccezione del polo nord.

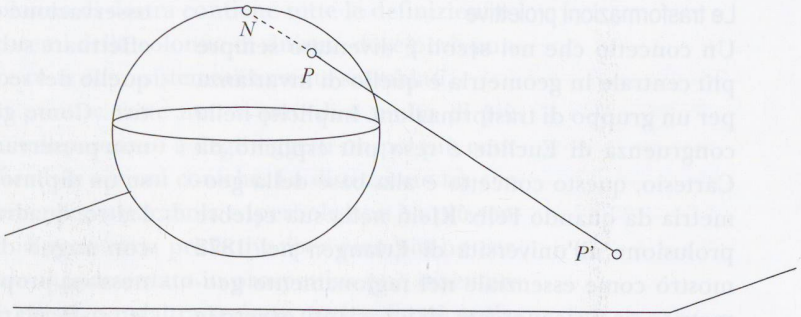

Fig. 6 – La proiezione stereografica: ogni punto P della sfera ad eccezione del polo nord N ha un'immagine P' proiettata sul piano orizzontale lungo la rette passante per N.

Quindi la sfera, rappresentata in proiezione stereografica, può essere pensata come un piano (la carta geografica) con un punto all'infinito, il polo nord.

Uno dei principi fondamentali della relatività ristretta di Einstein è che le trasformazioni proiettive della sfera di Riemann sono simmetrie delle leggi della fisica. Quindi abbiamo un altro esempio in cui una realtà geometrica costruita a partire dalla percezione dello spazio acquista una propria autonomia astratta e si sviluppa indipendentemente dalla realtà fisica da cui è partita, ma alla fine si ritrova inaspettatamente al centro della descrizione della natura. Come nel caso della geometria euclidea, in cui possiamo verificare sperimentalmente, con foglio, matita e righello, che le distanze tra punti non cambiano se ruotiamo il piano euclideo, così si possono ricondurre le trasformazioni proiettive della sfera di Riemann a un'istanza di percezione dello spazio. A differenza del caso euclideo in cui l'esperimento proposto può essere realizzato facilmente, l'esperimento che stiamo per descrivere, immaginato da Penrose, appartiene alla classe che Einstein chiamò *Gedankenexperimente*, esperimenti del pensiero, essenziali alla comprensione dei concetti fisici, ma irrealizzabili tecnicamente. La percezione dello spazio è in questo caso la percezione della volta celeste. La volta celeste è l'immagine che abbiamo del cielo e le stelle fisse sono punti su questa sfera. Se il punto di osservazione ruota attorno a un asse, e questo è quello che succede a noi che guardiamo il cielo sulla terra che gira, allora la nostra immagine della volta celeste cambia e vediamo le stelle sorgere e tramontare. La trasformazione a cui la volta celeste è sottoposta se la confrontiamo in due istanti diversi è una rotazione ed è quindi una trasformazione della geometria euclidea. Quello che la teoria della relatività ci dice di

nuovo è che osservatori in movimento a velocità diverse percepiscono la realtà in modo diverso: immaginiamoci due osservatori che contemplino il cielo nello stesso luogo e istante, il primo fermo sulla terra e il secondo in movimento a una velocità vicina a quella della luce. Allora l'immagine della volta celeste vista dal secondo osservatore appare distorta rispetto a quella vista dal primo e la trasformazione da effettuare sulla sfera per far combaciare le due immagini è appunto una trasformazione proiettiva della sfera di Riemann. Il significato più profondo di questa osservazione è che le trasformazioni di Lorentz, che costituiscono le simmetrie della relatività di Einstein possono essere considerate come trasformazioni proiettive della retta complessa.

Geometria e fisica del XXI secolo

L'idea che la geometria sia alla base della descrizione delle leggi della natura è più che mai attuale nella fisica contemporanea. In tutte le teorie attualmente allo studio per descrivere in modo unificato tutte le forze, la geometria gioca un ruolo essenziale. Dopo Einstein sarebbe impensabile immaginare una teoria che includa la gravità e che non sia essenzialmente geometrica. La difficoltà è che la meccanica quantistica che sappiamo governare le leggi della fisica a livello atomico e subatomico, è difficilmente conciliabile con la geometria: il principio di indeterminazione di Heisenberg pone dei limiti fondamentali alla misura di posizione e velocità di particelle. Si è quindi portati a pensare che esista una «geometria quantistica», ancora insufficientemente compresa, che a livello microscopico si comporti in modo molto diverso dalle geometrie che conosciamo e dove in particolare il concetto di punto non è definito. Ma gli studi recenti nella fisica delle interazioni fondamentali, non avendo ancora portato a predizioni verificabili sperimentalmente, hanno dato una spinta vigorosa alla ricerca in matematica pura: molti dei progressi recenti in geometria sono stati ispirati dalle ricerche nella fisica delle stringhe, una teoria che i fisici sperano possa descrivere in modo unificato tutte le interazioni, e nella quale la dualità tra oggetti geometrici gioca un ruolo importante.

* Prof. Dr. Giovanni Felder, Dipartimento di matematica, ETH Zurigo