En hommage à Ferdinand Gonseth : quels problèmes peut se poser un mathématicien ?

Autor(en): **Moine, Jean-Marie**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Actes de la Société jurassienne d'émulation**

Band (Jahr): **94 (1991)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-685203

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

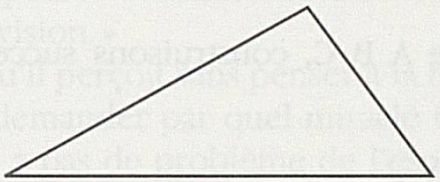
En hommage à Ferdinand Gonseth

par Jean-Marie Moine

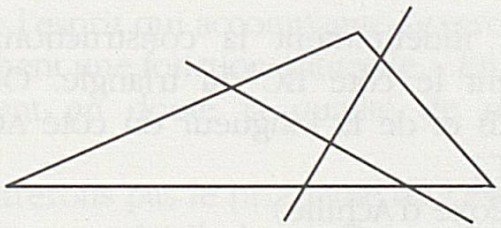
Quels problèmes peut se poser un mathématicien ?

Chacun de nous est parfois un peu mathématicien ou un peu philosophe. Permettez-moi de vous citer un événement que j'ai personnellement vécu. Une mère de famille s'approcha d'un de nos collègues de l'Ecole secondaire du Locle et lui dit : « Mon fils qui était bon en calcul fait maintenant de mauvais résultats en mathématiques modernes ! Pourquoi ? Quelle est la différence entre calcul et mathématiques modernes ? »

Ce collègue dessina sur une feuille la figure suivante :



– Qu'ai-je dessiné, Madame ?
– Vous avez dessiné un triangle.
– Bien, Madame.
Puis il dessina :



– Et maintenant ?
– C'est un triangle avec une croix dessus !
– Non Madame ; c'est un non-triangle.
La pauvre femme repartit mal à l'aise.
On est en droit de se poser des questions, par exemple, celles-ci :
Qui a tort ? Qui a raison ?

L'un a-t-il entièrement raison?

L'autre a-t-il entièrement raison?

Les deux ont-ils partiellement raison, partiellement tort?

Je m'abstiendrai de répondre.

Mais au fait, qu'est-ce que mathématique et philosophie? Voici ce que dit le dictionnaire.

Mathématicien: personne qui cultive ou enseigne les mathématiques.

Mathématiques: disciplines étudiant, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés des êtres abstraits, tels que les nombres, les figures géométriques, etc.

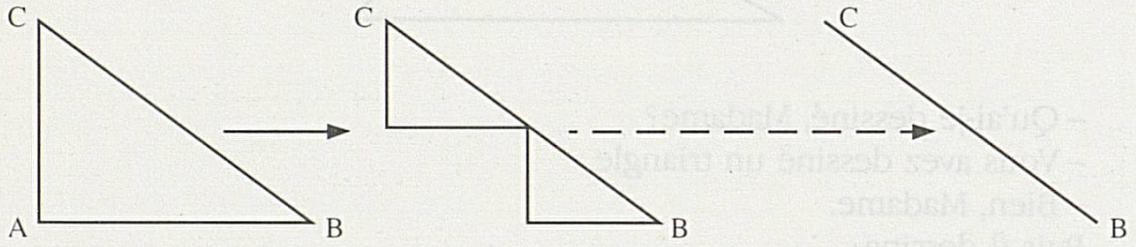
Philosophie: science générale des principes et des causes. Essai de démêler les principes généraux de l'univers, et d'ordonner les connaissances et les observations en un système cohérent.

L'observation et le raisonnement sont deux des piliers sur lesquels reposent les mathématiques et la philosophie. L'observation et le raisonnement peuvent parfois conduire à des problèmes plus ou moins épineux!

Je vous soumets deux exemples.

Exemple 1

A partir du triangle A B C, construisons successivement les figures dessinées.



Si l'on continue indéfiniment la construction, la figure semble «devenir» finalement le côté BC du triangle. Or, la somme de la longueur du côté AB et de la longueur du côté AC est-elle égale à la longueur du côté BC?

Exemple 2. (paradoxe d'Achille)

Achille, courant pour rattraper une tortue qui chemine devant lui, ne la rejoindra jamais parce qu'au préalable il doit atteindre la place d'où elle est partie; quand il y sera parvenu, la tortue l'aura quittée et se trouvera en avant; en répétant ce raisonnement, on voit que la tortue sera toujours en avant d'Achille!

Vous vous rendez certainement compte que les problèmes posés par les deux exemples ci-dessus ne sont pas tout à fait élémentaires. Ils sont

un peu plus compliqués que les problèmes soumis à des élèves de l'école primaire ou de l'école secondaire. Bien sûr, Ferdinand Gonseth a été confronté, comme chacun de nous, à de tels problèmes, ne serait-ce que lorsqu'il était jeune étudiant. Mais un homme d'une telle intelligence a certainement vite abandonné de tels problèmes qu'il résolvait, sans doute, sans difficulté, pour réfléchir à d'autres problèmes. Mais quels peuvent être ces problèmes?

Un de ces problèmes est *le problème de l'espace*.

Pour essayer de comprendre de quoi il s'agit, je me propose de le suivre dans le début de:

La géométrie et le problème de l'espace, de Ferdinand Gonseth.

(L'ensemble de l'œuvre compte six chapitres, publiés en 1945 par les Editions du Griffon, Neuchâtel).

Connaissance intuitive ou par évidence.

« Pour savoir, il n'est pas nécessaire de savoir comment on sait. » L'homme « épouse par l'esprit la forme et la nature des objets qui l'entourent. Les épouse-t-il complètement et parfaitement? »

Pour percevoir l'espace, « l'homme normal n'a qu'à ouvrir les yeux pour en percevoir la vision. »

« Dans cet espace qu'il perçoit sans penser à la façon dont il le perçoit, il se déplace sans se demander par quel miracle il sait s'y déplacer. »

« A ce niveau, il n'y a pas de problème de l'espace. »

L'aide de l'instrument.

Pour soumettre « nos appréciations individuelles des distances ou des volumes au contrôle expérimental », nous devons inventer des instruments et acquérir une technique de la mesure.

Or toute technique, même très simple, nécessite réflexion et imagination.

« Mais l'activité de l'esprit qui accompagne l'exercice de nos fonctions naturelles est également une fonction naturelle. » En mesurant, « nous ne mettrons aucunement en doute la qualité de notre représentation spaciale ».

« Nous ne rencontrerons pas le problème de l'espace. »

Passage d'une figure matérielle à une figure abstraite.

C'est le « moment où nous concevrons le point, la droite, le cercle comme des notions séparables des choses matérielles ».

« Nous apercevrons en elles (en ces notions abstraites) une réalité d'un autre ordre, présentant ses évidences propres, objet d'une connaissance de nature nouvelle; notre technique de la mesure se complétera d'une technique mentale de la déduction et de la démonstration. »

«La distinction entre l'idéal et le réel peut s'installer en nous comme un simple élément de connaissance. Sans que nous y prenions garde, elle peut se joindre, comme une ombre fidèle, à tous les objets de la connaissance spaciale. Pourquoi ferait-elle naître une question ou un remords? L'ombre qui suit tous nos pas ne nous gêne guère, à moins que nous ne nous avisions de sauter plus loin qu'elle. De même, tant que l'idée pourra se tenir aux côtés de la connaissance primaire (intuitive) de l'objet, sans que celle-ci cesse d'être sûre d'elle-même, le problème de la connaissance, et tout spécialement le problème de l'espace, pourront rester latents.»

Le problème de l'espace.

«La connaissance que nous avons de l'espace peut-elle donner lieu à un problème de connaissance?»

Quittons momentanément Ferdinand Gonseth, pour essayer de comprendre comment cela s'est justement produit lors de la découverte des géométries non-euclidiennes. De quoi s'agit-il?

Citons d'abord cinq mathématiciens, dont les travaux ont influencé particulièrement la science de la géométrie.

Euclide, IIe siècle avant J.-C. (Grèce).
Legendre, 1752-1833. (France).
Gauss, 1777-1855. (Allemagne).
Lobatchevsky, 1792-1856. (Russie).
Bolyai (fils), 1802-1860. (Hongrie).

Disons d'emblée que les notions de géométrie enseignées à l'école primaire, à l'école secondaire, et dans les gymnases, font partie de la géométrie euclidienne, géométrie ainsi nommée en l'honneur d'Euclide, qui en est le père.

Pour élaborer sa théorie, Euclide a formulé, entre autres, quatre axiomes.

Axiome: proposition évidente par elle-même et qui n'est susceptible d'aucune démonstration.

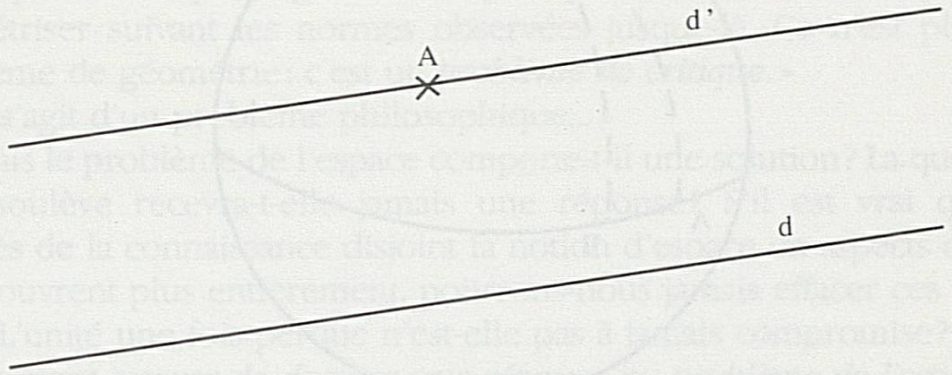
Voici ces quatre axiomes.

1er axiome: par deux points distincts, on peut mener une ligne droite.
2e axiome: on peut prolonger indéfiniment une droite.
3e axiome: on peut décrire un cercle de centre donné et de rayon donné.
4e axiome: tous les angles droits sont égaux entre eux.

Il y a une telle harmonie entre ce que disent ces axiomes (même pour le deuxième axiome) et ce qu'on peut observer en faisant des constructions sur une feuille de papier, que personne n'en a été étonné.

A partir de ces axiomes, on peut montrer que:

par tout point A non situé sur une droite d, on peut mener une droite d' parallèle à d; de plus, d et d' sont sans point commun.



On ne peut toutefois, à partir de ces axiomes, montrer que d' est unique.

Euclide énonça alors un postulat qui porte son nom.

Postulat: proposition qui n'est ni évidente par elle-même, ni logiquement démontrable.

Voici le *postulat d'Euclide*: d' est la seule parallèle à d passant par A.

Ce postulat fut l'objet de grandes discussions, déjà à l'époque d'Euclide.

Pendant plus de deux mille ans, on a essayé, sans succès, de démontrer le postulat d'Euclide à partir des premiers axiomes. Legendre a même démontré que ce postulat ne pouvait être faux.

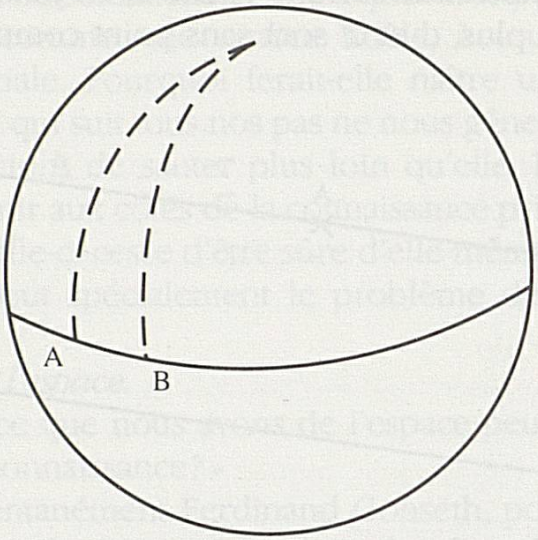
Devant tant d'insuccès, Gauss (vers 1816), puis indépendamment Bolyai et Lobatchevsky (vers 1830) eurent une idée nouvelle: *rejeter le postulat d'Euclide*, autrement dit admettre l'existence de plusieurs parallèles menées par un point à une droite.

La géométrie *non-euclidienne* était née, et avec elle, un *problème de l'espace*.

En anecdote, signalons que Gauss s'est refusé à publier ses travaux de recherches à ce sujet. Il aurait dit: «J'appréhende trop les clameurs des Béotiens si j'exprimais complètement mes vues.»

L'idée d'imaginer qu'il existe plusieurs parallèles à une droite passant par un même point, ou que deux droites parallèles peuvent se couper, peut sembler farfelue. Permettez-moi de vous exposer un exemple qui n'a rien à voir avec le problème de l'espace qui nous préoccupe; mais vous comprendrez cet exemple, qui vous montrera, je l'espère, qu'une idée qui paraît farfelue, l'est peut-être moins qu'on pourrait le penser.

Voici cet *exemple* :



Imaginons notre Terre comme une sphère parfaite. Deux individus qui ignorent qu'ils vivent sur une sphère sont en deux points distincts A et B de l'équateur. Ils tracent deux segments de droites parallèles au voisinage de A et de B. Puis ils décident de les prolonger. Surprise... leurs « droites » se coupent au pôle Nord !

Laissons à Ferdinand Gonseth le soin de commenter ce *problème de l'espace* et essayons de le suivre dans son idée pour tenter d'y apporter une réponse.

« C'est au nom de l'évidence que certains commentateurs d'Euclide mirent en doute le postulat des parallèles ; c'est dans le climat de l'évidence que bien des géomètres en tentèrent la démonstration. C'est de l'évidence que se réclamaient aussi bien Legendre faisant la preuve que le postulat ne pouvait être faux que Bolyai et Lobatchevsky construisant la géométrie hyperbolique dans laquelle il ne peut être juste. »

« La géométrie euclidienne, concurrencée efficacement par une seconde géométrie, tout aussi vraisemblable du point de vue d'une évidence arithmétique, se trouvait ébranlée jusque dans son fondement : *la notion de l'espace.* »

« Pour sortir de cette impasse, le géomètre ne pouvait éviter de répondre à l'une ou à l'autre des questions suivantes, si ce n'est aux deux : *Quelle est la vraie géométrie ? Qu'est-ce que l'espace ?* La question de la vérité de l'une ou l'autre des géométries en présence perdait d'ailleurs sa signification au niveau de l'analyse, au sens de laquelle ces deux géométries sont complètement équivalentes ; le problème crucial est donc bien celui de l'espace. »

«La connaissance a ses remous. Dans sa progression, l'esprit ne cesse d'expérimenter et ne cesse d'être exposé à tous les risques de la recherche. Même en géométrie, le plus grand de ces risques ne lui est pas épargné: celui de *découvrir sa propre relativité.*»

«Le problème qui surgit ainsi ne peut pas être traité en continuant à géométriser suivant les normes observées jusque-là. Ce n'est plus un problème de géométrie; c'est un *problème de critique.*»

«Il s'agit d'un problème philosophique...»

«Mais le problème de l'espace comporte-t-il une solution? La question qu'il soulève recevra-t-elle jamais une réponse? S'il est vrai que le progrès de la connaissance disjoint la notion d'espace en aspects qui ne se recouvrent plus entièrement, pourrons-nous jamais effacer ces disparités? L'unité une fois perdue n'est-elle pas à jamais compromise?»

Comment essayer de donner une réponse au problème de l'espace?

Suivons encore Ferdinand Gonseth:

«Jusqu'ici nous imaginions que l'aspect théorique de la géométrie euclidienne correspondait de façon schématique à notre représentation intuitive de l'espace. Dans le cadre des géométries non-euclidiennes, le divorce entre ces deux aspects est complet. Il nous faut reconstruire une représentation concrète de l'espace à la mesure de l'aspect abstrait des nouvelles géométries.»

«Le concret se réalise alors sous la forme d'un *nouvel espace*, l'*espace universel* qui joue vis-à-vis du non-euclidien, un rôle équivalent à celui de l'espace sensible vis-à-vis de la géométrie euclidienne. En dernière analyse, le problème de la synthèse de l'euclidien et du non-euclidien se ramène à l'étude de la compatibilité de ces deux espaces.»

«Ils sont compatibles en ce sens que l'homme, considérant l'espace universel, en reçoit une image qu'*il peut confondre en première approximation* avec l'espace euclidien.»

Cet exposé a été présenté le 28 août 1990, en première partie d'une séance organisée par la section chaux-de-fonnière de la SJE, pour marquer le centenaire de la naissance de Ferdinand Gonseth.

En seconde partie, M. Eric Emery, professeur de mathématiques au Gymnase de La Chaux-de-Fonds, a relaté ses souvenirs liés aux rencontres qu'il a eu la chance de faire avec l'illustre philosophe et mathématicien, et a évoqué l'amitié qui s'ensuivit. Ce jour-là, nous avons également eu le plaisir et l'honneur d'accueillir M. Gilbert Lovis, délégué aux Affaires culturelles du Canton du Jura, qui nous a apporté le bonjour sympathique du Gouvernement de la République et Canton du Jura.

Jean-Marie Moine

ARTS