Participants in the discussion of question V3

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **1 (1932)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

mouton et exerçant la pression sur la membrure est cisaillée. Il a été ainsi possible de déterminer une fréquence de 5,13 Hertz. On a obtenu pour les essais de durée une fréquence de 3,5 à 4,0 Hertz.

Les mesures ont été faites au moyen de l'appareil déjà cité du système Meyer, ainsi qu'au moyen du miroir de Martens devant lequel était intercalé un second miroir. Les deux miroirs étaient inclinés à 45° par rapport au rayon lumineux. Il a été ainsi possible d'éliminer pratiquement les erreurs dues à un déplacement des deux extrémités de la barre d'essai dans le sens horizontal. L'écart pour ces déplacements n'a été que de 2,4 minutes.

La disposition choisie dans ces essais a le grand avantage de provoquer des contraintes en tout point semblables à celles qui sont produites dans la construction même. Cela n'est juste, il est vrai, que pour une charge théorique ne créant que des oscillations sinusoïdales. En ce moment, nous effectuons des essais de comparaison sur une grande quantité d'assemblages soudés électriquement ou rivés.

V 3

THÉORIE DES OSCILLATIONS DES PONTS ET CHARPENTES
THEORIE DER SCHWINGUNGSERSCHEINUNGEN AN TRAGWERKEN
THEORY OF THE OSCILLATIONS OF STRUCTURES

Dr. Ing. **Friedrich BLEICH**, Baurat, Wien.

Voir « Publication Préliminaire », p. 511. — *Siehe « Vorbericht », S. 511.*
See « Préliminary Publication », p. 511.

Participants à la discussion
Diskussionsteilnehmer
Participants in the discussion :

Dr. phil. W. SPÄTH,
Barmen.

Die drei bei der Belastung eines Bauwerks auftretenden Gegenkräfte, nämlich die elastische Federkraft, die Trägheitskraft und die Reibungskraft wurden bisher als linear mit der Verformung anwachsend vorausgesetzt. Eine eingehende Dynamik kann sich jedoch nicht mit der Annahme linearer Zusammenhänge begnügen, da infolge der hohen Auslastung von Bauwerken die für die mathematische Behandlung übliche Beschränkung auf kleine Verformungen nicht angängig ist.

Die für die Bautechnik wichtigsten Eigenschaften solcher nichtlinearer Schwingungen seien durch graphische Darstellungen kurz erläutert. In Abb. 1 sind die drei Einzelkräfte für verschiedene Betriebsbedingungen vektoriell zusammengesetzt. Die Federkraft nehme hierbei gemäss der stark gezeichneten Belastungs-Verformungslinie zu. Zur Bestimmung der Reibungskräfte sei der

eingezeichnete Verlauf des Reibungswiderstandes zu Grunde gelegt. Die vom Ursprung aus gezeichneten Geraden geben die Massenkräfte für verschiedene Frequenzverhältnisse an. Aus dieser Zusammenstellung lassen sich alle Fragen beantworten.

In Abb. 2 ist der Zusammenhang der Schwingungsamplitude und der hierfür nötigen Erregerkraft für verschiedene Frequenzverhältnisse dargestellt. (Die Frequenz 1 bedeutet hierbei die Eigenfrequenz des Bauwerks für sehr kleine Schwingungsamplituden, die im rein elastischen Bereich bleiben.) Für

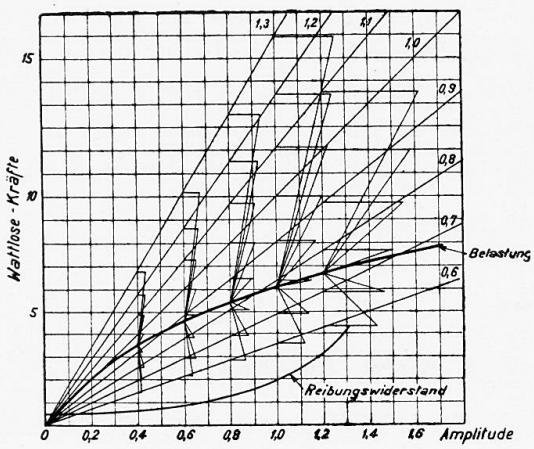

Fig. 1

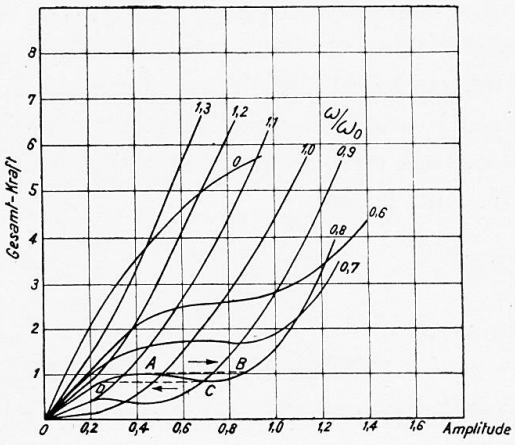

Fig. 2

Fig. 1. — Représentation vectorielle des caractéristiques de réaction élastique, d'inertie et de frottement interne = Vektorielle Zusammensetzung der elastischen Gegenkraft, der Massenkraft und der Reibungskraft = Vectorial combination of elastic reaction, force due to mass, and force due to friction.

Forces déwattées. Charge. Résistance de friction. Amplitude.
Wattlose Kräfte. Belastung. Reibungswiderstand. Amplitude.
Wattless forces. Loading. Frictional resistance. Amplitude.

Fig. 2. — Variations de l'effort dynamique total en fonction de l'amplitude d'oscillation pour différents rapports de fréquence = Verlauf der dynamischen Gesamtkraft in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude für verschiedene Frequenzverhältnisse = Curves showing the dynamic total force in dependence on the amplitude of vibration for various conditions of frequency.

Force totale. Amplitude.
Gesamtkraft. Amplitude.
Total force. Amplitude.

ein Frequenzverhältnis von 0,8 z. B. nimmt die Erregerkraft mit der Amplitude zunächst zu, erreicht hierauf ein Maximum, fällt dann zu einem Minimum ab, um anschliessend wieder anzusteigen. Theoretisch können also einer bestimmten Erregerkraft drei ganz verschiedene Schwingungsamplituden entsprechen. Das Gebiet zwischen Maximum und Minimum ist jedoch labil, so dass sich praktisch bei steigender Erregerkraft ein plötzlicher Sprung von A nach B und entsprechend bei abnehmender Erregung ein Sprung von C nach D ergibt. (Kipperscheinung!)

Aus Abb. 2 lassen sich für verschieden grosse Erregerkräfte die zugehörigen Resonanzkurven entnehmen (Abb. 3). Die niedrigste Resonanzkurve für eine sehr kleine Erregerkraft zeigt normales Verhalten, da auch die grössten Amplituden im Resonanzbereich noch innerhalb des elastischen Bereichs lie-

gen. Die nächsten Resonanzkurven mit schrittweise gesteigerter Erregerkraft zeigen ein Ueberneigen nach tieferen Frequenzen. Auch diese Erscheinung ist labil. Bei allmählich anwachsender Frequenz steigt praktisch die Amplitude z.B. bis A. Für eine kleine Steigerung der Frequenz springt die Amplitude dann plötzlich auf B. Umgekehrt fällt bei abnehmender Frequenz die Amplitude plötzlich von C nach D. Bei den beiden höchsten Resonanzkurven wird die Kipperscheinung durch den sehr stark zunehmenden Reibungswiderstand allmählich ausgefüllt.

Das wichtigste Ergebnis dieser Untersuchung ist, dass bei Vorhandensein nichtlinearer Verhältnisse einer stetigen Aenderung eines Betriebsfaktors, wie z.B. der Erregerfrequenz, der Erregerkraft, der Masse u.s.w. eine unstetige, sprunghafte Aenderung der Schwingungsamplitude des Bauwerks entsprechen

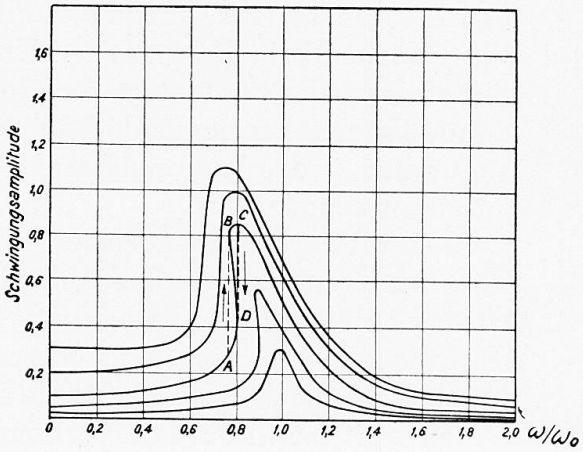

Fig. 3. — Relation entre l'amplitude d'oscillation et la fréquence de l'effort d'excitation pour différentes valeurs de cet effort d'excitation = Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Frequenz der erregenden Kraft für verschieden grosse Werte der erregenden Kraft = Dependence of the amplitude of oscillation on the frequency of the exciting impulse, for various large values of the exciting impulse.

Amplitude d'oscillation.
Schwingungsamplituden.
Amplitude of oscillation.

kann. Durch eine geringe Veränderung der Betriebsfaktoren kann eine Erhöhung der Schwingungsamplitude auf das Mehrfache auftreten.

Für den speziellen Fall der Dynamik von Eisenbahnbrücken seien einige Folgerungen zusammengestellt, um die Wichtigkeit derartiger Untersuchungen für die Frage des Stosskoeffizienten darzulegen. Inwieweit Brücken der verschiedensten Konstruktion, Liegezeit, Beanspruchung nichtlineares Verhalten zeigen, kann nur der Versuch ergeben.

1. Unter sonst gleichbleibenden Betriebsbedingungen kann lediglich durch Aenderung der Grösse der dynamischen Erregerkraft eine sprunghafte Erhöhung der Schwingungsamplitude der Brücke erfolgen. Diese Erhöhung tritt nur auf, wenn die Frequenz der erregenden Kraft, etwa infolge der Massenkräfte des Lokomotivtriebwerks, tiefer liegt als die Eigenfrequenz der Brücke.

Zwei Lokomotivtypen, deren Massenkräfte sich wie 1:2 verhalten, brauchen keinesfalls in allen Fällen Schwingungen der Brücke im gleichen Verhältnis zu erzeugen. Die Lokomotive mit der grösseren Massenkraft kann eine mehrfach grössere Aufschaukelung verursachen.

2. Die Vergrösserung der schwingenden Masse einer Brücke bei der Ueberfahrt eines Zuges kann ebenfalls eine sprunghafte Erhöhung der Brückenschwingungen auf das Mehrfache zur Folge haben.

3. Eine Brücke kann durch langsame Aenderung des Bauzustandes im Laufe der Liegezeit plötzlich ein wesentlich anderes dynamisches Verhalten zeigen.

4. Eine Steigerung der statischen Vorlast durch Erhöhung der Zuglasten kann eine Brücke sprunghaft wesentlich unruhiger machen.

Die bisherigen praktischen Untersuchungen von Bauwerken mit Hilfe von Schwingungsprüfmaschinen nach Späth-Losenhausen haben ergeben, dass harmonisches Verhalten im allgemeinen für sehr kleine Erregerkräfte zu erwarten ist. Eine Steigerung der Erregerkraft zeigt sehr schnell die Ausbildung unharmonischer Erscheinungen, wie sie im Vorstehenden kurz beschrieben wurden. An Eisenbahnbrücken wurde dies besonders von Herrn Dr. Bernhard festgestellt.

Traduction.

Les trois réactions qui se manifestent lorsqu'un ouvrage se trouve soumis à une charge, c'est-à-dire la réaction élastique, l'inertie et le frottement interne ont été considérées, jusqu'à maintenant, comme croissant linéairement avec l'importance de la déformation. Une étude dynamique plus approfondie ne peut toutefois pas se contenter de cette hypothèse d'une relation linéaire, car étant donné l'importance considérable des ouvrages actuels, il n'est plus possible de se limiter à de petites déformations, ainsi qu'on a coutume de le faire dans l'étude mathématique.

Il est intéressant de préciser tout d'abord, par une représentation graphique, les propriétés, essentielles pour la technique de la construction, de ces oscillations non linéaires. On a groupé sur la figure 1, en représentation vectorielle, les trois forces particulières correspondant à différentes conditions de service. La réaction d'élasticité augmente ici suivant la courbe charge-déformation tracée en trait fort. Pour la détermination des efforts de frottement, on se basera sur la variation indiquée de la résistance de frottement. Les droites tracées à partir de l'origine indiquent les efforts d'inertie pour différents rapports de fréquence. Cet ensemble de caractéristiques permet de répondre à toutes les questions qui se posent.

La figure 2 traduit la relation entre l'amplitude des oscillations et les efforts d'excitation qui sont nécessaires pour les produire, pour différents rapports de fréquence (la fréquence 1 représente ici la fréquence propre d'oscillation de l'ouvrage pour de très petites amplitudes d'oscillation qui restent dans le domaine de l'élasticité pure). Pour un rapport de fréquence de 0,8 par exemple, l'effort d'excitation nécessaire augmente tout d'abord avec l'amplitude, passe par un maximum, puis tombe à un minimum, pour finir par augmenter à nouveau. Théoriquement, à un effort d'excitation déterminé, il correspond donc trois amplitudes d'oscillation entièrement différentes. La zone comprise entre le maximum et le minimum est toutefois labile, de sorte qu'en pratique, lorsque l'effort d'excitation croît, on constate une saute brusque de A à B et réciproquement, lorsque l'effort d'excitation décroît, on constate une saute brusque de C à D (phénomène de bascule).

A partir de la figure 2 et pour différentes valeurs des efforts d'excitation, on déduit les courbes de résonance correspondantes (fig. 4). Pour un très faible effort d'excitation, la courbe de résonance inférieure possède une allure normale, car les amplitudes les plus élevées dans la zone de résonance se trouvent encore à l'intérieur de la zone élastique. Lorsque l'effort d'excitation monte

progressivement, les courbes de résonance suivantes accusent une tendance vers des fréquences plus faibles. Ce phénomène est également instable. Lorsque la fréquence croît progressivement, l'amplitude augmente par exemple jusqu'à A. Pour une faible augmentatien de la fréquence, cette amplitude saute ensuite brusquement à B. Inversement, lorsque la fréquence diminue, l'amplitude tombe brusquement de C à D. Pour les deux courbes de résonance supérieures, le phénomène de bascule est progressivement étouffé par l'augmentation très accentuée de la résistance de frottement.

Le résultat le plus intéressant de cette recherche est que étant donné l'existence d'un rapport non linéaire, à une variation régulière de l'un des facteurs, comme par exemple la fréquence de l'excitation, l'effort d'excitation, la masse, etc... ; il peut correspondre une variation non continue, désordonnée de l'amplitude d'oscillation de l'ouvrage. Sous l'influence d'une faible variation de l'un des facteurs, peut se produire une augmentation de l'amplitude d'oscillation dans un rapport multiple du premier.

Dans le cas particulier que constitue la dynamique des ponts de chemins de fer, il est intéressant d'examiner quelles peuvent être les conséquences générales de ce qui précède, afin de faire ressortir l'importance des recherches de cette nature en ce qui concerne la question du coefficient de choc. Seule, l'étude expérimentale peut montrer dans quelle mesure les ponts de différents types, de différents âges et de différentes capacités ont un comportement non linéaire.

1. — Toutes conditions de service étant identiques par ailleurs, une augmentation désordonnée de l'amplitude d'oscillation du pont peut être provoquée uniquement par une modification de la valeur de l'effort dynamique d'excitation. Cette augmentation ne se produit toutefois que lorsque la fréquence de l'effort d'excitation, par exemple sous l'influence des efforts mis en jeu par la masse du mécanisme moteur des locomotives, se trouve plus basse que la fréquence propre du pont.

Deux types de locomotives dont les masses mettront en jeu des efforts admettant entre eux le rapport 1/2 peuvent fort bien provoquer dans le pont des oscillations dont les amplitudes ne soient nullement dans le même rapport. La locomotive qui développe le plus gros effort d'inertie peut fort bien provoquer des oscillations relativement beaucoup plus importantes.

2. — L'augmentation de la masse oscillante d'un pont au moment du passage d'un train peut également avoir pour conséquence une augmentation disproportionnée des oscillations de ce pont, dans un rapport multiple.

3. — Avec le temps, et par suite d'une modification lente dans son état effectif, il peut fort bien se faire qu'un pont accuse brusquement une altération sensible dans son comportement dynamique.

4. — Une augmentation de la charge statique initiale résultant d'une majoration des charges roulantes peut compromettre brusquement, d'une manière sensible, la sécurité d'un pont.

Les études pratiques qui ont été effectuées jusqu'à maintenant sur des ouvrages à l'aide de machines d'essai dynamique, système Späth-Losenhausen, ont montré que l'on ne peut compter d'une manière générale, sur un comportement dynamique suivant une loi harmonique, c'est-à-dire régulière et simple, que lorsque les efforts d'excitation sont très faibles. Sous l'influence d'une

augmentation de l'effort d'excitation on arrive très rapidement à des phénomènes d'ordre inharmonique, tels que ceux qui ont été mis en évidence dans ce qui précède. Ce fait a d'ailleurs été établi, tout particulièrement en ce qui concerne les ponts de chemin de fer, par le Dr. Bernhard.

Zusammenfassung.

An Hand von graphischen Darstellungen wird eine Erweiterung der Dynamik von Bauwerken gegeben, wobei die meist übliche Voraussetzung eines linearen Zusammenhangs der Kräfte mit der Verformung fallen gelassen wird. Messungen mit Hilfe von Schwingungssprüfmaschinen bestätigen die Ergebnisse der theoretischen Ableitungen. Als wichtigstes Ergebnis sei vermerkt, dass einer stetigen Aenderung eines Betriebsfaktors eine unstetige, sprunghafte Aenderung der Schwingungsamplitude des Bauwerks entsprechen kann.

Résumé.

En s'appuyant sur des représentations graphiques, l'auteur montre quels développements a subi la dynamique des constructions, développements d'où il résulte que l'hypothèse couramment admise d'une relation linéaire entre les efforts et les déformations doit être abandonnée. Les mesures qui ont été effectuées à l'aide des machines d'essai dynamique confirment les résultats d'ordre théorique. Parmi les résultats les plus importants, il faut signaler qu'une variation continue d'un des facteurs de l'exploitation de l'ouvrage peut fort bien se traduire sous la forme d'une variation disproportionnée et brusque de l'amplitude des oscillations de l'ouvrage.

Summary.

With the aid of graphic representations, an extension of the dynamics of structures is given, whereby the generally customary assumption of a linear connection between the forces and the deformation is not made. Measurements with the help of vibration testing machines confirm the results deduced theoretically. As most important result, be it noted that a continuous change in one service factor may correspond to a discontinuous sudden change in the amplitude of vibration of the structure.

J. W. SPILLER,

Chief Engineer, Crown Agent for the Colonies, London.

With the conclusions of the Bridge Stress Committee appointed by the Department of Scientific and Industrial Research as a foundation a theoretical investigation of hammer blow effects has been carried out by members of my

staff during the past two years. The primary object of the investigation was the derivation of formulae suitable for application to Colonial Railway bridges, which while simple in character would bring into account the more important bridge and load characteristics.

The amount of engine hammer blow varies as the square of the speed and the maximum impact effect will occur when the pulsations of the hammer blow synchronise with the frequency of oscillation of the bridge.

For bridges of long span the number of oscillations per second is less than the maximum speed of the driving wheels in revolutions per second and synchronisation will only occur at low speeds, i. e. when the amount of engine hammer blow is small. The speed at which synchronism occurs for long spans will always correspond to the frequency of the fully loaded bridge, commonly known as the lower critical speed.

In bridges of moderate span full synchronism will also occur but the value of the lower critical speed for these spans will be higher than for long spans. Furthermore synchronism might occur at the upper critical speed approximating to the frequency of the unloaded bridge. The amount of engine hammer blow for moderate spans oscillating at these high speeds is therefore relatively large.

For bridges of small span the critical speed of bridge oscillation in periods per second will exceed any possible speed of the engine in revolutions per second and only partial synchronism of the hammer blow impulses with the frequency of bridge oscillation can occur.

For a complete range of spans with any given loading and hammer blow there are five possible conditions of bridge oscillation as enumerated below, only one of which will produce the maximum impact effect on any particular span.

1) Maximum oscillation may occur at the Lower Critical Speed with the springs of the locomotives " locked " by spring friction.

2) Maximum oscillation may occur at the Lower Critical Speed with the springs acting.

3) Maximum oscillation may occur at the Upper Critical Speed with the springs acting.

4) Maximum oscillation may occur at the Limiting Speed of revolution of the locomotive driving wheels with the springs acting.

5) Maximum oscillation may occur at the Limiting Speed with the springs " locked " by spring friction.

Formulae have been derived for each of the five states of bridge oscillations in terms of the more important bridge and load characteristics and these formulae have been simplified to become functions of the following elements only :

Bridge mass.
Free frequency.
Span length.
Engine hammer blow.
Axle loads.

Selective formulae were also derived to determine which of the five possible states of bridge oscillation is applicable in any particular case.

With the aid of the simplified formulae curves have been plotted for a wide variation of bridge masses and free frequencies, axle loads and hammer blows and for a given minimum diameter of driving wheel and further curves were drawn enveloping all mass frequency combinations to cover the maximum impact effects for each of the loadings considered. Finally a formula was derived to satisfy all these enveloping curves. The formula is expressed as an impact factor allowance in the familiar form of a proportion of the maximum live load and in terms of three elements only :

Engine hammer blow at some constant speed.

Axle loads.

Span length.

A paper dealing fully with the investigation outlined above will, it is hoped, be read shortly before the Institution of Civil Engineers.

Traduction.

En partant des conclusions formulées par le Bridge Stress Committee, subventionné par le Department of Scientific and Industrial Research, à titre de fondation, une étude théorique de l'effet de choc a été effectuée par certains de mes Collaborateurs au cours de ces deux dernières années. L'objet initial de ces recherches était d'élaborer des formules susceptibles d'être mises en application pour le calcul des ponts des chemins de fer coloniaux ; ces ouvrages, quoique présentant un caractère de simplicité, offrent cependant les caractéristiques les plus accusées.

L'importance de l'effet de choc produit par la locomotive varie comme le carré de la vitesse et l'influence d'impact résultante est maximum lorsque les pulsations produites par les machines sont en synchronisme avec la fréquence d'oscillation du pont.

Pour les ponts de grande portée, le nombre d'oscillations par seconde est inférieur à la vitesse maximum des roues motrices en tours par seconde et le synchronisme ne peut se produire qu'aux faibles vitesses, c'est-à-dire lorsque l'importance de l'effet de choc pulsatoire produit par la machine est faible. La vitesse pour laquelle se produit le synchronisme dans les ponts à grande portée correspondra toujours à la fréquence d'oscillation du pont à pleine charge et est dénommée vitesse critique inférieure.

Dans les ponts de portée moyenne, le synchronisme complet peut également se produire, mais la valeur de la vitesse critique inférieure, pour ces portées, est plus élevée que pour les grandes portées. En outre, le synchronisme peut se produire à la vitesse critique supérieure, qui correspond à peu près à la fréquence du pont non chargé.

Pour les ponts de faible portée, la vitesse critique d'oscillation du pont, en période par seconde, dépasse toute vitesse possible de la machine en tours par seconde ; seul, un synchronisme partiel peut se produire entre les effets d'impulsion produits par la machine et la fréquence d'oscillation du pont.

Pour une gamme complète de portées, pour toute charge et pour toute impor-

tance de l'effet de choc pulsatoire exercé par la machine, il existe cinq conditions pour lesquelles peut se produire l'oscillation maximum du pont, une seule de ces conditions étant susceptible de produire l'effet de choc maximum pour une portée déterminée.

1. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse critique inférieure, les ressorts des locomotives étant bloqués par le frottement.

2. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse critique inférieure, les ressorts étant en action.

3. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse critique supérieure, les ressorts étant en action.

4. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse limite de rotation des roues motrices de la locomotive, les ressorts étant en action.

5. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse limite, les ressorts étant bloqués par le frottement.

Des formules ont été établies pour chacun des cinq cas d'oscillation du pont, dans lesquelles on a fait rentrer les caractéristiques les plus importantes des ponts et des charges ; ces formules ont été ensuite simplifiées, de manière à ne laisser subsister que les éléments ci-dessous :

Masse du pont. — Fréquence propre. — Longueur de la portée. — Effet de choc pulsatoire exercé par la locomotive. — Charges sur les essieux.

Des formules particulières ont été également établies pour permettre de déterminer laquelle des cinq conditions d'oscillation du pont peut être appliquée dans un cas particulier déterminé.

En partant des formules simplifiées, on a tracé des courbes intéressant une gamme très étendue de masses de ponts et de fréquence propres d'oscillation, de charges par essieu et d'effets de choc dus aux machines, cela pour un diamètre minimum donné pour les roues motrices ; d'autres courbes se rapportent à toutes les combinaisons possibles entre les masses et les fréquences, couvrant les effets de choc maxima pour chacune des charges considérées. Enfin, une formule a été établie pour représenter toutes ces enveloppes. Cette formule est exprimée sous forme de valeur admissible pour le coefficient de choc ; on a adopté la forme habituelle d'un rapport à la charge roulante, en fonction de trois éléments seulement :

Effet de choc pulsatoire produit par la machine ;

Charge sur les essieux ;

Longueur de la portée.

On pense qu'un mémoire, exposant dans leur détail les investigations qui viennent d'être esquissées, pourra être présenté prochainement à l'Institution of Civil Engineers.

Dr. Ing. F. SCHLEICHER,

Professor an der Technischen Hochschule Hannover.

Für die angenäherte Berechnung der Eigenfrequenzen von elastischen Stabsystemen, wie z. B. von kontinuierlichen Balken und Vollwandrahmen, ist die Methode von Lord Rayleigh besonders gut geeignet. Diese Methode ist in der

letzten Zeit durch verschiedene Arbeiten weiterentwickelt worden, sodass auf sie hingewiesen werde [1].

Ist die Biegungslinie $y = y(x)$ des Stabes für die Eigenschwingung bekannt, so kann die Kreisfrequenz ω der Schwingung nach Lord Rayleigh aus der Gleichung

$$\omega^2 = \frac{\int EJ\ y''^2\ dx}{\int \frac{q}{g}\ y^2\ dx} \tag{1}$$

berechnet werden. Darin bedeutet EJ die von der Stelle x des Stabes abhängige Biegungssteifigkeit, g die Erdbeschleunigung und q das im allgemeinen Falle mit x veränderliche Eigengewicht je Längeneinheit, einschliesslich der eventuellen Belastung.

Einen dem Rayleighschen Ausdruck (1) entsprechenden Wert für ω^2 als Funktion von M und M″ haben Hohenemser und Prager angegeben [2]. Es ist danach

$$\omega^2 = \frac{\int \frac{g}{q}\ M''^2\ dx}{\int M^2 \frac{dx}{EJ}} \tag{2}$$

Für Biegungslinien y, die nur wenig von der Eigenschwingung abweichen, geben die Ausdrücke (1) und (2) nahe bei ω^2 liegende Werte. Für die Eigenschwingung selbst nehmen beide Ausdrüke den gleichen Minimalwert an.

Sowohl der Rayleighsche Ausdruck (1), wie auch die Gleichung (2) von Hohenemser und Prager machen bei der Anwendung zur angenäherten Berechnung der Frequenz die Schätzung einer Biegungslinie bzw. einer Momentenlinie notwendig. Infolge der geringen Abhängigkeit des Ergebnisses von der Funktion y (x) erhält man unter normalen Verhältnissen auch bei einer grösseren Abweichung der Schätzung von der tatsächlichen Eigenschwingung noch eine brauchbare Annäherung. Wenn jedoch die Biegungssteifigkeit EJ des Stabes längs der Achse x in weiten Grenzen variiert, können die Schätzungen für y (x) leicht einen bedeutenderen Fehler zur Folge haben. In solchen Fällen empfiehlt sich der nachstehend skizzierte Weg.

Wir formen die Rayleighsche Gleichung (1) für diesen Zweck etwas um. Mit

$$EJ\ y'' = M \tag{3}$$

folgt aus Gleichung (1)

$$\omega^2 = \frac{\int M^2 \frac{dx}{EJ}}{\int \frac{q}{g}\ y^2\ dx} \tag{4}$$

---

1. F. Pfeiffer, Elastokinetik, Handbuch der Physik, Bd. IV, Berlin 1928.
Th. Poeschl, Ueber die angenäherte Berechnung der Schwingzahlen von Rahmenträgern, Ingenieur-Archiv. I. Band, 1930.
K. Klotter, Ueber die Eigenschwingzahlen der elastischen Querschwingungen belasteter Saiten, Stäbe, Membranen und Platten. Ingenieur-Archiv, I. Band, 1930.

2. K. Hohenemser und W. Prager, Ueber das Gegenstück zum Rayleighschen Verfahren der Schwingungslehre, Ingenieur-Archiv, III. Bd. 1932.

worin M (x) die zu der Biegungslinie y (x) gehörige Momentenlinie bedeutet.

Man erkennt in $\int M^2 \frac{dx}{EJ}$ den Ausdruck für die doppelte von den Biegungsmomenten M (x) geleistete Arbeit, die der Verschiebungsarbeit der Belastungskräfte p gleich ist. Die Beziehung (4) kann somit als eine neue Form der Gleichung von A. Morley [1] aufgefasst werden.

Der Rechnungsgang zur Ermittlung der Eigenfrequenz, z. B. für einen kontinuierlichen Träger, gestaltet sich damit folgendermassen. Für eine geeignete Querbelastung des Stabes werden die Biegungsmomente M (x) bestimmt, und damit, etwa als Seilpolygon nach den bekannten Methoden der Baustatik, die

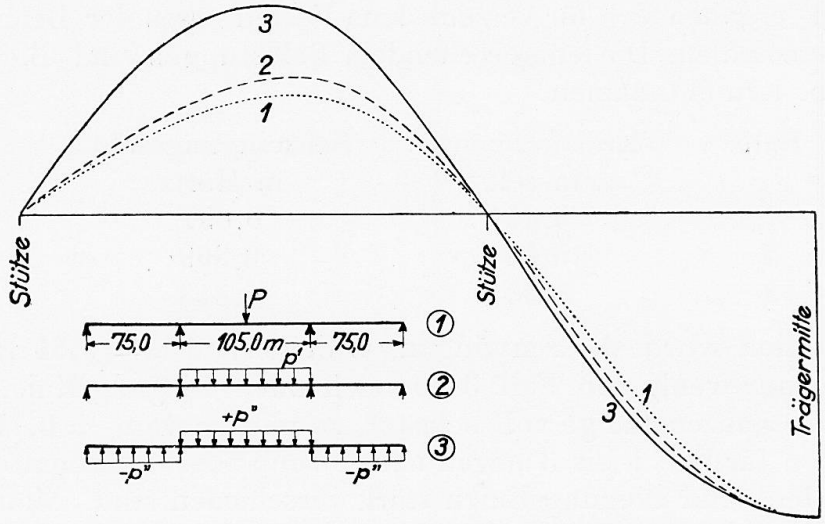

Fig. 1. — Conditions de charge admises et courbes élastiques pour la poutre continue.
Belastungsannahmen und Biegungslinien für den kontinuierlichen Träger.
Appui = Stütze = Support.
Milieu de la poutre = Trägermitte = Centre of girder.

Biegungslinie y (x). Ein angenäherter Wert der Kreisfrequenz ω ergibt sich mit den so ermittelten, zusammengehörigen Grössen M und y durch Einsetzen in Gleichung 4.

Die Intensität der Belastung spielt keine Rolle. Ihre Verteilung ist so zu wählen, dass man sich der wahrscheinlichen Form der Eigenschwingung möglichst annähert. Die dem System eigentümlichen Randbedingungen, ebenso die Uebergangsbedingungen an den Zwischenstützen usw., sind nach Obigem ohne Weiteres erfüllt [2].

Für die Biegungslinie der Eigenschwingung sind die entsprechenden Belastungen p dem Produkt qy aus Durchbiegung und schwingender Masse proportional. Wählt man somit längs der einzelnen Oeffnungen sinus- oder parabelförmig verteilte Belastungen p, in den benachbarten Oeffnungen je von

1. Man vergleiche z. B. die Gl. 10 der in Fussnote 2) genannten Arbeit von Hohenemser und Prager.

2. Bei Verwendung von Polynomansätzen zur angenäherten Darstellung der Biegelinie, die in manchen Fällen mit Vorteil benutzt werden können, ist für jede Oeffnung ein besonderer Ansatz zu machen, da sonst die Unstetigkeiten in den Ableitungen von y an den Stützen usw. nicht zu erfassen sind.

entgegengesetztem Vorzeichen, und die Grösse der Belastungen dem annähernd geschätzten Verhältnis der Durchbiegungen in den betreffenden Oeffnungen proportional, dann erhält man nach Gleichung (4) eine für alle praktischen Zwecke ausreichende Genauigkeit der Frequenz. Zur Kontrolle oder Erzielung einer noch grösseren Genauigkeit ist am einfachsten ein Iterationsverfahren zu benutzen.

Als Beispiel seien für eine im Bau befindliche grosse kontinuierliche Vollwandbalkenbrücke mit drei Oeffnungen von 75 + 105 + 75 m Stützweite einige nach Gleichung (4) ermittelte Werte der Grundfrequenz mitgeteilt. Unter Berücksichtigung des stark veränderlichen Trägheitsmomentes[1] J und des veränderlichen Eigengewichtes q (die Brücke selbst wurde ohne Nutzlast angenommen) ergaben sich für verschiedene Verteilungen der Belastung p die nachstehenden Zahlen. Die entsprechenden Belastungen und Biegungslinien sind aus Abb. 1 zu entnehmen.

Fall	Kreisfrequenz ω in sek^{-1}	Schwingungszahl in Hertz
1	5,64	0,897
2	5,46	0,869
3	5,33	0,848

Durch Iteration wurde die Schwingungszahl zu rund n = 0,84 Hertz gefunden, bei einer nur wenig von Fall 3 abweichenden Biegungslinie. Wird die Brücke auf der ganzen Länge voll belastet, so wird etwa n = 0,71 Hertz.

Die Werte ω für Fall 1 bis 3 liegen nahe beieinander, trotzdem die zugehörigen Momenten- und Biegungslinien stark verschieden sind. Man vergleiche hierzu die Abb. 1. Daraus ist zu erkennen, wie leicht nach der obigen Methode Näherungswerte von grosser Genauigkeit erhalten werden können.

Eine angenäherte Berechnung der Oberschwingungen des gleichen kontinuierlichen Trägers gab nahe aufeinander folgende Frequenzen. Während sich die Schwingungszahlen bei einfachen Balken wie 1 : 4 : 9, verhalten, ist das Verhältnis für den vorliegenden kontinuierlichen Balken etwa 1:1,8:4,1...

Zum Schluss sei noch eine Bemerkung über die Berechnung der Eigenfrequenzen der Fahrbahntafeln von Stahlkonstruktionen der üblichen Bauweise mit Längs- und Querträgern gestattet. Diese Frequenzen hängen in hohem Masse davon ab, wie weit die Fahrbahnplatte mit den Längsträgern zusammenwirkt.

Für das obige Beispiel ergab sich die Grundfrequenz der unbelasteten Fahrbahn je nach den Annahmen über die Grösse der Steifigkeit des aus den eisernen Längsträgern und der Eisenbetonplatte bestehenden elastischen Systems zu n = 12 bis 22 Hertz. Die entsprechenden Grenzen für die gleichmässig mit 500 kg/m² belastete Fahrbahn sind n = 9,5 bis 18 Hertz.

Bei der Rechnung wurden die Querträger als starr angenommen und Querbiegung der Eisenbetonplatte ausgeschlossen. Der Querträgerabstand betrug 5,00 m. Es ist anzunehmen, dass die tatsächliche Eigenfrequenz der Fahrbahntafel nahe an der oberen Grenze liegt, doch kann diese Frage wohl nur durch

---

1. Für den Hauptträger dieser kontinuierlichen Brücke ist $_{max}J = 9{,}0\ _{min}J$.

Beobachtungen an ausgeführten Bauwerken geklärt werden. Aus verschiedenen Gründen dürften dabei zeitlich etwas veränderliche Werte zu erwarten sein, auch wäre der in dem Referat Bleich erwähnte Einfluss der elastischen Lagerung zu studieren.

Traduction.

La méthode de Lord Rayleigh convient particulièrement bien pour le calcul des fréquences propres des systèmes élastiques de barres, tels que les poutres continues et les cadres à parois pleines. Cette méthode a été développée encore, assez récemment, à la suite de différents travaux, sur lesquels il est intéressant d'attirer l'attention [1].

Si l'on connaît la ligne élastique $y = y\,(x)$ de la barre dans le cas de l'oscillation propre, on peut calculer la pulsation ω de l'oscillation, suivant Lord Rayleigh, d'après l'équation :

$$\omega^2 = \frac{\int \mathrm{E\,I}\, y''^2\, dx}{\int \frac{q}{g}\, y^2\, dx} \tag{1}$$

équation dans laquelle on désigne par :

E I la rigidité de flexion, qui dépend de la position x de la section transversale considérée de la barre ;

g l'accélération de la pesanteur ;

q le poids propre par unité de longueur, qui, dans le cas général, varie avec x, plus la charge éventuelle.

Hohenemser et Prager [2] ont donné, pour ω^2, en fonction de M et de M'', une expression qui correspond à celle de Rayleigh :

$$\omega^2 = \frac{\int \frac{g}{q}\, \mathrm{M}''^2\, dx}{\int \mathrm{M}^2\, \frac{dx}{\mathrm{E\,I}}} \tag{2}$$

Pour des courbes de flexion y qui ne s'écartent que peu de l'oscillation propre, les expressions (1) et (2) donnent des valeurs voisines. Pour le cas de l'oscillation propre elle-même, les deux expressions accusent la même valeur minimum.

Lorsqu'il s'agit de calculer d'une manière approchée la fréquence, il est nécessaire, tant avec l'expression de Rayleigh (1) qu'avec l'équation (2) de Hohenemser et Prager, de partir d'une courbe de flexion ou d'un diagramme des moments estimés. Étant donné le peu de dépendance qui existe entre le

---

1. F. Pfeiffer, Elastokinetik, Handbuch der Physik, Vol. VI, Berlin, 1928.
Th. Pöschl, Ueber die angenäherte Berechnung der Schwingzahlen von Rahmenträgern, Ing.-Arch., Vol. I, 1930.
K. Klotter, Ueber die Eigenschwingzahlen der elastischen Querschwingungen belastete Saiten, Stäbe, Membranen und Platten. Ing.-Arch., Vol. I, 1930.

2. Hohenemser et Prager, Ueber das Gegenstück zum Rayleighschen Verfahren der Schwingungslehre, Ing.-Arch., Vol. III, 1932.

résultat et la fonction $y\ (x)$, on obtient encore une approximation suffisante, dans des conditions normales, et même en cas d'écart important entre l'estimation et l'oscillation propre effective. Si toutefois la rigidité de flexion E I de la barre varie le long de l'axe des x dans d'assez larges limites, les estimations effectuées pour $y\ (x)$ peuvent avoir pour conséquence, assez facilement, une erreur importante. En pareil cas, il est à recommander de suivre la marche indiquée brièvement ci-après.

On transforme quelque peu l'équation de Rayleigh (1) pour le cas considéré. De :

$$\mathrm{E\,I}\, y'' = \mathrm{M} \tag{3}$$

on déduit, en tenant compte de l'équation (1) :

$$\omega^2 = \frac{\int \mathrm{M}^2 \frac{dx}{\mathrm{E\,I}}}{\int \frac{q}{g}\, y^2\, dx} \tag{4}$$

équation dans laquelle M (x) désigne la courbe des moments correspondant à la courbe de flexion $y\ (x)$.

On reconnaît dans $\int \mathrm{M}^2 \frac{dx}{\mathrm{E\,I}}$ le double du travail fourni par les moments de flexion M (x), qui est équivalent au travail de déformation des efforts mis en jeu par la charge. La relation (4) peut donc être considérée comme une nouvelle forme de l'équation de A. Morley [1].

La marche à suivre pour le calcul de la fréquence propre, par exemple pour une poutre continue, se développe par suite de la manière suivante. Pour une charge transversale appropriée de la barre, on détermine les moments fléchissants M (x), puis à partir de ces moments, la courbe de flexion $y\ (x)$, en la traitant en quelque sorte comme un polygone funiculaire suivant la méthode connue de la statique. En reportant les valeurs ainsi déterminées et correspondantes de M et de y dans l'équation (4), on peut déterminer une valeur approchée pour la pulsation ω.

La valeur même de la charge n'a aucune influence. Sa répartition doit être choisie d'une manière telle que l'on se rapproche dans toute la mesure du possible de l'allure effective de l'oscillation propre. Les conditions propres au système en ce qui concerne les bords, de même que les conditions transitoires aux appuis intermédiaires, etc..., sont remplies, d'après ce qui précède, sans dispositions particulières [2].

En ce qui concerne la ligne élastique correspondant à l'oscillation propre les charges correspondantes p sont proportionnelles au produit $q\,y$ de la flexion et de la masse oscillante. Par suite, si l'on adopte, suivant les différentes tra-

---

1. Voir par exemple l'équation (10) de l'étude de Hohenemser et Prager faisant l'objet de la note (2) précédente.

2. Lorsque l'on adopte la représentation approchée par polynômes pour la courbe de flexion, ce qui est avantageux dans de nombreux cas, il faut prévoir une expression particulière pour chaque travée, faute de quoi il ne serait pas possible de faire intervenir les particularités que présente y aux appuis, etc...

vées, des charges réparties sinusoïdalement ou paraboliquement, ayant, dans deux travées voisines, des signes opposés, et si les valeurs des charges sont proportionnelles au rapport déterminé d'une manière approximative entre les flèches dans les travées correspondantes, on obtiendra alors, pour la fréquence, dans tous les cas de la pratique, une approximation suffisante en partant de l'équation (4). A titre de contrôle, ou si l'on veut obtenir une plus grande précision, on procédera par itérations successives, procédé le plus simple.

A titre d'exemple, considérons un pont à poutres pleines continues, en cours de construction, et qui possède trois travées de 75 + 105 + 75 m. de portée et pour lequel nous donnons ci-après quelques valeurs de la fréquence propre déterminées d'après l'équation (4). Ces chiffres ont été obtenus pour différentes valeurs de la charge p répartie, en tenant compte des variations très accusées du moment d'inertie I [1] et des variations du poids propre (on a considéré le pont lui-même sans charge utile). Les charges et lignes élastiques correspondantes sont indiquées par la figure 1.

Cas n°	Pulsation ω en sec^{-1}.	Fréquence n en hertz
1	5,64	0,897
2	5,46	0,869
3	5,33	0,848

Par itération, on a trouvé, pour la fréquence d'oscillation environ $n = 0,84$ hertz, pour une ligne élastique ne s'écartant que peu du cas 3. Si le pont est chargé sur toute sa longueur, on a environ $n = 0,71$ hertz.

Les valeurs de ω pour les cas 1 et 3 sont voisines l'une de l'autre, quoique les moments et lignes élastiques correspondants accusent des divergences assez prononcées. Voir à ce sujet la figure 1. On voit combien, avec la méthode ci-dessus, il est facile d'obtenir des valeurs approchées présentant une bonne précision.

Un calcul approché des oscillations harmoniques supérieures, pour la même poutre continue, a donné des fréquences se succédant à intervalles assez rapprochés. Tandis que les fréquences pour les poutres simples sont dans le rapport 1 : 4 : 9 par exemple, on obtient, pour la poutre continue ci-dessus 1 : 1,8 : 4,1...

Enfin, pour conclure, qu'il soit permis une remarque au sujet du calcul des fréquences propres des tabliers des ponts de chemin de fer en construction métallique, suivant la disposition habituelle comportant des poutres longitudinales et transversales. Ces fréquences dépendent dans une large proportion de la réaction qui s'exerce entre le tablier proprement dit et les poutres longitudinales.

Pour l'exemple ci-dessus, on a obtenu, pour la fréquence propre fondamentale de la voie non chargée, des valeurs de n comprises entre 12 et 22 hertz, suivant les hypothèses concernant la valeur de la rigidité du système élastique constitué par les poutres métalliques longitudinales et le platelage en béton armé. Les valeurs limites correspondantes pour le n du tablier

1. Pour la poutre principale, on a pour ce pont continu : max I = 9. min I.

uniformément chargé à raison de 500 kg/m² sont comprises entre 9,5 et 18 hertz.

Pour effectuer les calculs, on a supposé que les poutres transversales étaient rigides et on a négligé la flexion dans le sens transversal du platelage en béton armé. L'intervalle entre les poutres transversales atteignait 5,00 m. Il est à supposer que la fréquence propre effective du tablier de la voie est voisine de la limite supérieure ci-dessus ; toutefois, ce point ne peut être élucidé que par des observations sur l'ouvrage terminé. Pour différentes raisons, il faut toutefois s'attendre à trouver des valeurs effectives variables dans le temps ; il conviendrait également d'étudier l'influence de l'élasticité des appuis, influence signalée dans le rapport Bleich.

Dr. St. de KUNICKI,
Professeur à l'École Polytechnique, Varsovie.

A la suite des exposés de M. le Conseiller supérieur Homann et de M. le Dr Bleich, l'auteur apporte son approbation au projet présenté par M. Homann et ayant pour but de poursuivre l'étude de la dynamique des ouvrages, tant du point de vue théorique que du point de vue expérimental. Les coefficients de choc adoptés dans les différents pays ne représentent en effet que des valeurs approchées. Il importerait donc de pouvoir remplacer ces coefficients par des valeurs qui cadrent mieux avec la réalité effective. Jusqu'à maintenant, on s'est contenté d'additionner les influences élémentaires, faute de savoir de quelle manière composer ces différentes influences dynamiques.

Parmi les facteurs à considérer, les joints des rails jouent un rôle primordial, ainsi que l'état d'usure variable des bandages des roues ; pour les ponts de faible portée, ces deux influences interviennent à elles deux pour moitié dans le coefficient de choc. On a proposé différentes solutions, telles que l'emploi de rails de grande longueur, les joints soudés (Voir Cambournac : Congrès International des Ponts et Charpentes de Vienne, 1928), l'interposition de pièces élastiques entre rails et infrastructure (caoutchouc ou feutre comprimé, ainsi qu'il a été adopté pour les ponts russes) ; toutefois, ces dispositions n'ont pas donné des résultats plus intéressants, du point de vue économique, que l'adoption de coefficients de choc majorés dans certaines proportions.

Dr.-Ing. A. CHMIELOWIEC,
École Polytechnique, Lwów.

Sous l'influence de la charge permanente, un élément quelconque d'une charpente ou d'un pont subit une fatigue statique ; sous l'influence de la charge mobile, il subit en plus d'une fatigue statique une fatigue dynamique. Donc le poids mobile est plus dangereux que le poids permanent. On ne doit pas traiter de la même façon les deux fatigues provenant du poids permanent et du poids mobile. On ne doit pas exiger que leur somme ne dépasse pas une valeur donnée, comme le font la plupart des règlements de divers pays. Avant de les ajouter l'une à l'autre il faudrait réduire les deux

fatigues (celle du poids permanent et celle du poids mobile) à une fatigue statique. On peut le faire en multipliant la charge mobile par un coefficient plus grand que l'unité. C'est ainsi qu'on tient compte à la fois d'un autre facteur : c'est que la charge mobile augmente presque chaque année (à cause du développement rapide de la circulation) tandis que la charge permanente ne peut pas varier. En multipliant la charge mobile par un coefficient plus grand que l'unité dans le calcul d'une construction on réserve l'avenir.

Je me suis occupé du règlement polonais concernant le taux de fatigue pour les ponts en béton et en béton armé. J'ai proposé d'admettre les mêmes taux de fatigue pour les ponts que pour les charpentes, mais de multiplier la charge mobile des ponts-routes par 1,5 et celle des ponts-rails par 2. Ma proposition a été bien accueillie par le Congrès du Béton Armé qui a eu lieu à Varsovie le 21-22 novembre 1931, et il est bien probable qu'elle sera définitivement acceptée par les autorités gouvernementales dans le nouveau règlement.

J'ai trouvé que les dimensions des poutres des ponts moyens restent les mêmes d'après le nouveau règlement que d'après l'ancien. Les dimensions des petits ponts, des poutres et des dalles du tablier, comme il ressort des calculs d'après l'ancien règlement, sont trop faibles, étant données l'influence dynamique et l'augmentation constante des poids mobiles. Aussi a-t-on proposé de réduire le taux de fatigue pour les dalles du tablier des ponts-routes de 15 % et celui des ponts-rails de 20 %. C'est un remède artificiel, utile il est vrai mais loin d'être suffisant. Il n'est pas nécessaire dans le nouveau règlement. Ici la réduction des taux de fatigue pour les petits ponts et pour les éléments du tablier se fait automatiquement parce que le rapport de la charge mobile à la charge totale va en croissant quand la portée diminue ; et c'est justement la réduction de 15 % pour les dalles du tablier des ponts-routes et celle de 20 % pour les ponts-rails qui se fait automatiquement d'après le nouveau règlement.

D'après l'ancien règlement les ponts en béton de grande portée ne sont pas possibles à cause du taux de fatigue trop petit. Ici le poids mobile ne joue presque aucun rôle, même si on le multiplie par 1,5 ou par 2. C'est la charge permanente qui importe et pour les voûtes encastrées s'ajoutent encore la température et le retrait. Le fait que le nouveau règlement permet ici d'admettre un taux de fatigue, beaucoup plus élevé, comme on l'admet pour les charpentes, aura une très grande répercussion, car il rendra possible la construction de grands ponts comme on en construit en France ou ailleurs.

Pour rendre possible la construction de ponts de grande portée, les règlements de quelques pays élèvent leurs taux de fatigue. Ce remède pose immédiatement une question délicate : quelle est la portée limite après laquelle on pourra admettre le taux de fatigue élevé ? Cette question est évitée heureusement dans le nouveau règlement polonais. On n'a pas besoin d'insister sur le fait que ce règlement est à la fois pratique, rationnel, simple et général. Il me semble que c'est là la voie que doivent suivre à l'avenir les règlements concernant le taux de fatigue à admettre pour les ponts. Je ne vois aucune raison pour que les taux de fatigue des ponts doivent différer de ceux des charpentes. Il suffit de multiplier la charge mobile par un coefficient qui est à établir séparément pour les ponts-routes et pour les ponts-rails et séparément pour chaque matériau.