Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Diskussion

Autor: Schleicher, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-619

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

tance de l'effet de choc pulsatoire exercé par la machine, il existe cinq conditions pour lesquelles peut se produire l'oscillation maximum du pont, une seule de ces conditions étant susceptible de produire l'effet de choc maximum pour une portée déterminée.

1. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse critique inférieure, les ressorts des locomotives étant bloqués par le frottement.

2. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse critique inférieure, les ressorts étant en action.

3. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse critique supérieure, les ressorts étant en action.

4. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse limite de rotation des roues motrices de la locomotive, les ressorts étant en action.

5. — L'oscillation maximum peut se produire à la vitesse limite, les ressorts étant bloqués par le frottement.

Des formules ont été établies pour chacun des cinq cas d'oscillation du pont, dans lesquelles on a fait rentrer les caractéristiques les plus importantes des ponts et des charges ; ces formules ont été ensuite simplifiées, de manière à ne laisser subsister que les éléments ci-dessous :

Masse du pont. — Fréquence propre. — Longueur de la portée. — Effet de choc pulsatoire exercé par la locomotive. — Charges sur les essieux.

Des formules particulières ont été également établies pour permettre de déterminer laquelle des cinq conditions d'oscillation du pont peut être appliquée dans un cas particulier déterminé.

En partant des formules simplifiées, on a tracé des courbes intéressant une gamme très étendue de masses de ponts et de fréquence propres d'oscillation, de charges par essieu et d'effets de choc dus aux machines, cela pour un diamètre minimum donné pour les roues motrices ; d'autres courbes se rapportent à toutes les combinaisons possibles entre les masses et les fréquences, couvrant les effets de choc maxima pour chacune des charges considérées. Enfin, une formule a été établie pour représenter toutes ces enveloppes. Cette formule est exprimée sous forme de valeur admissible pour le coefficient de choc ; on a adopté la forme habituelle d'un rapport à la charge roulante, en fonction de trois éléments seulement :

Effet de choc pulsatoire produit par la machine ;

Charge sur les essieux ;

Longueur de la portée.

On pense qu'un mémoire, exposant dans leur détail les investigations qui viennent d'être esquissées, pourra être présenté prochainement à l'Institution of Civil Engineers.

Dr. Ing. F. SCHLEICHER,

Professor an der Technischen Hochschule Hannover.

Für die angenäherte Berechnung der Eigenfrequenzen von elastischen Stabsystemen, wie z. B. von kontinuierlichen Balken und Vollwandrahmen, ist die Methode von Lord Rayleigh besonders gut geeignet. Diese Methode ist in der

letzten Zeit durch verschiedene Arbeiten weiterentwickelt worden, sodass auf sie hingewiesen werde [1].

Ist die Biegungslinie $y = y(x)$ des Stabes für die Eigenschwingung bekannt, so kann die Kreisfrequenz ω der Schwingung nach Lord Rayleigh aus der Gleichung

$$\omega^2 = \frac{\int EJ\ y''^2\ dx}{\int \frac{q}{g}\ y^2\ dx} \tag{1}$$

berechnet werden. Darin bedeutet EJ die von der Stelle x des Stabes abhängige Biegungssteifigkeit, g die Erdbeschleunigung und q das im allgemeinen Falle mit x veränderliche Eigengewicht je Längeneinheit, einschliesslich der eventuellen Belastung.

Einen dem Rayleighschen Ausdruck (1) entsprechenden Wert für ω^2 als Funktion von M und M″ haben Hohenemser und Prager angegeben [2]. Es ist danach

$$\omega^2 = \frac{\int \frac{g}{q}\ M''^2\ dx}{\int M^2 \frac{dx}{EJ}} \tag{2}$$

Für Biegungslinien y, die nur wenig von der Eigenschwingung abweichen, geben die Ausdrücke (1) und (2) nahe bei ω^2 liegende Werte. Für die Eigenschwingung selbst nehmen beide Ausdrüke den gleichen Minimalwert an.

Sowohl der Rayleighsche Ausdruck (1), wie auch die Gleichung (2) von Hohenemser und Prager machen bei der Anwendung zur angenäherten Berechnung der Frequenz die Schätzung einer Biegungslinie bzw. einer Momentenlinie notwendig. Infolge der geringen Abhängigkeit des Ergebnisses von der Funktion y (x) erhält man unter normalen Verhältnissen auch bei einer grösseren Abweichung der Schätzung von der tatsächlichen Eigenschwingung noch eine brauchbare Annäherung. Wenn jedoch die Biegungssteifigkeit EJ des Stabes längs der Achse x in weiten Grenzen variiert, können die Schätzungen für y (x) leicht einen bedeutenderen Fehler zur Folge haben. In solchen Fällen empfiehlt sich der nachstehend skizzierte Weg.

Wir formen die Rayleighsche Gleichung (1) für diesen Zweck etwas um. Mit

$$EJ\ y'' = M \tag{3}$$

folgt aus Gleichung (1)

$$\omega^2 = \frac{\int M^2 \frac{dx}{EJ}}{\int \frac{q}{g}\ y^2\ dx} \tag{4}$$

---

1. F. Pfeiffer, Elastokinetik, Handbuch der Physik, Bd. IV, Berlin 1928.
Th. Poeschl, Ueber die angenäherte Berechnung der Schwingzahlen von Rahmenträgern, Ingenieur-Archiv. I. Band, 1930.
K. Klotter, Ueber die Eigenschwingzahlen der elastischen Querschwingungen belasteter Saiten, Stäbe, Membranen und Platten. Ingenieur-Archiv, I. Band, 1930.

2. K. Hohenemser und W. Prager, Ueber das Gegenstück zum Rayleighschen Verfahren der Schwingungslehre, Ingenieur-Archiv, III. Bd. 1932.

worin M (x) die zu der Biegungslinie y (x) gehörige Momentenlinie bedeutet.

Man erkennt in $\int M^2 \frac{dx}{EJ}$ den Ausdruck für die doppelte von den Biegungsmomenten M (x) geleistete Arbeit, die der Verschiebungsarbeit der Belastungskräfte p gleich ist. Die Beziehung (4) kann somit als eine neue Form der Gleichung von A. Morley [1] aufgefasst werden.

Der Rechnungsgang zur Ermittlung der Eigenfrequenz, z. B. für einen kontinuierlichen Träger, gestaltet sich damit folgendermassen. Für eine geeignete Querbelastung des Stabes werden die Biegungsmomente M (x) bestimmt, und damit, etwa als Seilpolygon nach den bekannten Methoden der Baustatik, die

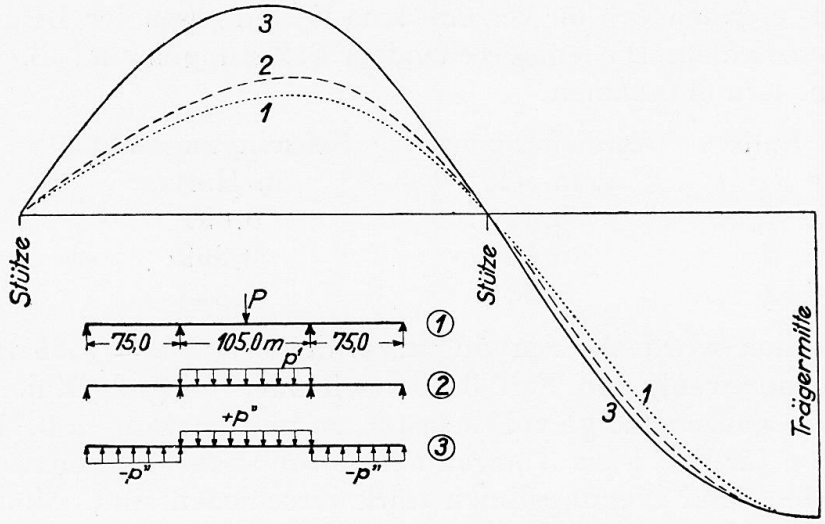

Fig. 1. — Conditions de charge admises et courbes élastiques pour la poutre continue.
Belastungsannahmen und Biegungslinien für den kontinuierlichen Träger.
Appui = Stütze = Support.
Milieu de la poutre = Trägermitte = Centre of girder.

Biegungslinie y (x). Ein angenäherter Wert der Kreisfrequenz ω ergibt sich mit den so ermittelten, zusammengehörigen Grössen M und y durch Einsetzen in Gleichung 4.

Die Intensität der Belastung spielt keine Rolle. Ihre Verteilung ist so zu wählen, dass man sich der wahrscheinlichen Form der Eigenschwingung möglichst annähert. Die dem System eigentümlichen Randbedingungen, ebenso die Uebergangsbedingungen an den Zwischenstützen usw., sind nach Obigem ohne Weiteres erfüllt [2].

Für die Biegungslinie der Eigenschwingung sind die entsprechenden Belastungen p dem Produkt qy aus Durchbiegung und schwingender Masse proportional. Wählt man somit längs der einzelnen Oeffnungen sinus- oder parabelförmig verteilte Belastungen p, in den benachbarten Oeffnungen je von

1. Man vergleiche z. B. die Gl. 10 der in Fussnote 2) genannten Arbeit von Hohenemser und Prager.

2. Bei Verwendung von Polynomansätzen zur angenäherten Darstellung der Biegelinie, die in manchen Fällen mit Vorteil benutzt werden können, ist für jede Oeffnung ein besonderer Ansatz zu machen, da sonst die Unstetigkeiten in den Ableitungen von y an den Stützen usw. nicht zu erfassen sind.

entgegengesetztem Vorzeichen, und die Grösse der Belastungen dem annähernd geschätzten Verhältnis der Durchbiegungen in den betreffenden Oeffnungen proportional, dann erhält man nach Gleichung (4) eine für alle praktischen Zwecke ausreichende Genauigkeit der Frequenz. Zur Kontrolle oder Erzielung einer noch grösseren Genauigkeit ist am einfachsten ein Iterationsverfahren zu benutzen.

Als Beispiel seien für eine im Bau befindliche grosse kontinuierliche Vollwandbalkenbrücke mit drei Oeffnungen von 75 + 105 + 75 m Stützweite einige nach Gleichung (4) ermittelte Werte der Grundfrequenz mitgeteilt. Unter Berücksichtigung des stark veränderlichen Trägheitsmomentes[1] J und des veränderlichen Eigengewichtes q (die Brücke selbst wurde ohne Nutzlast angenommen) ergaben sich für verschiedene Verteilungen der Belastung p die nachstehenden Zahlen. Die entsprechenden Belastungen und Biegungslinien sind aus Abb. 1 zu entnehmen.

Fall	Kreisfrequenz ω in sek^{-1}	Schwingungszahl in Hertz
1	5,64	0,897
2	5,46	0,869
3	5,33	0,848

Durch Iteration wurde die Schwingungszahl zu rund n = 0,84 Hertz gefunden, bei einer nur wenig von Fall 3 abweichenden Biegungslinie. Wird die Brücke auf der ganzen Länge voll belastet, so wird etwa n = 0,71 Hertz.

Die Werte ω für Fall 1 bis 3 liegen nahe beieinander, trotzdem die zugehörigen Momenten- und Biegungslinien stark verschieden sind. Man vergleiche hierzu die Abb. 1. Daraus ist zu erkennen, wie leicht nach der obigen Methode Näherungswerte von grosser Genauigkeit erhalten werden können.

Eine angenäherte Berechnung der Oberschwingungen des gleichen kontinuierlichen Trägers gab nahe aufeinander folgende Frequenzen. Während sich die Schwingungszahlen bei einfachen Balken wie 1 : 4 : 9, verhalten, ist das Verhältnis für den vorliegenden kontinuierlichen Balken etwa 1:1,8:4,1...

Zum Schluss sei noch eine Bemerkung über die Berechnung der Eigenfrequenzen der Fahrbahntafeln von Stahlkonstruktionen der üblichen Bauweise mit Längs- und Querträgern gestattet. Diese Frequenzen hängen in hohem Masse davon ab, wie weit die Fahrbahnplatte mit den Längsträgern zusammenwirkt.

Für das obige Beispiel ergab sich die Grundfrequenz der unbelasteten Fahrbahn je nach den Annahmen über die Grösse der Steifigkeit des aus den eisernen Längsträgern und der Eisenbetonplatte bestehenden elastischen Systems zu n = 12 bis 22 Hertz. Die entsprechenden Grenzen für die gleichmässig mit 500 kg/m² belastete Fahrbahn sind n = 9,5 bis 18 Hertz.

Bei der Rechnung wurden die Querträger als starr angenommen und Querbiegung der Eisenbetonplatte ausgeschlossen. Der Querträgerabstand betrug 5,00 m. Es ist anzunehmen, dass die tatsächliche Eigenfrequenz der Fahrbahntafel nahe an der oberen Grenze liegt, doch kann diese Frage wohl nur durch

---

1. Für den Hauptträger dieser kontinuierlichen Brücke ist $_{max}J = 9{,}0\ _{min}J$.

Beobachtungen an ausgeführten Bauwerken geklärt werden. Aus verschiedenen Gründen dürften dabei zeitlich etwas veränderliche Werte zu erwarten sein, auch wäre der in dem Referat Bleich erwähnte Einfluss der elastischen Lagerung zu studieren.

Traduction.

La méthode de Lord Rayleigh convient particulièrement bien pour le calcul des fréquences propres des systèmes élastiques de barres, tels que les poutres continues et les cadres à parois pleines. Cette méthode a été développée encore, assez récemment, à la suite de différents travaux, sur lesquels il est intéressant d'attirer l'attention [1].

Si l'on connaît la ligne élastique $y = y\,(x)$ de la barre dans le cas de l'oscillation propre, on peut calculer la pulsation ω de l'oscillation, suivant Lord Rayleigh, d'après l'équation :

$$\omega^2 = \frac{\int \mathrm{E\,I}\, y''^2\, dx}{\int \frac{q}{g}\, y^2\, dx} \tag{1}$$

équation dans laquelle on désigne par :

E I la rigidité de flexion, qui dépend de la position x de la section transversale considérée de la barre ;

g l'accélération de la pesanteur ;

q le poids propre par unité de longueur, qui, dans le cas général, varie avec x, plus la charge éventuelle.

Hohenemser et Prager [2] ont donné, pour ω^2, en fonction de M et de M'', une expression qui correspond à celle de Rayleigh :

$$\omega^2 = \frac{\int \frac{g}{q}\, \mathrm{M}''^2\, dx}{\int \mathrm{M}^2\, \frac{dx}{\mathrm{E\,I}}} \tag{2}$$

Pour des courbes de flexion y qui ne s'écartent que peu de l'oscillation propre, les expressions (1) et (2) donnent des valeurs voisines. Pour le cas de l'oscillation propre elle-même, les deux expressions accusent la même valeur minimum.

Lorsqu'il s'agit de calculer d'une manière approchée la fréquence, il est nécessaire, tant avec l'expression de Rayleigh (1) qu'avec l'équation (2) de Hohenemser et Prager, de partir d'une courbe de flexion ou d'un diagramme des moments estimés. Étant donné le peu de dépendance qui existe entre le

---

1. F. Pfeiffer, Elastokinetik, Handbuch der Physik, Vol. VI, Berlin, 1928.
Th. Pöschl, Ueber die angenäherte Berechnung der Schwingzahlen von Rahmenträgern, Ing.-Arch., Vol. I, 1930.
K. Klotter, Ueber die Eigenschwingzahlen der elastischen Querschwingungen belastete Saiten, Stäbe, Membranen und Platten. Ing.-Arch., Vol. I, 1930.

2. Hohenemser et Prager, Ueber das Gegenstück zum Rayleighschen Verfahren der Schwingungslehre, Ing.-Arch., Vol. III, 1932.