Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Theorie der Schwingungserscheinungen an Tragwerken

Autor: Bleich, Friedrich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-465

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

V 3

THEORIE DER SCHWINGUNGSERSCHEINUNGEN AN TRAGWERKEN

THÉORIE DES OSCILLATIONS DES PONTS ET CHARPENTES

THEORY OF THE OSCILLATIONS OF STRUCTURES

Dr.-Ing. Friedrich BLEICH,
Zivilingenieur, Wien.

Herr HOMANN hat in dem vorangehenden Referat in knapper aber äusserst übersichtlicher Form alle jene Probleme der Dynamik berührt, deren theoretische Erledigung zu einer erfolgreichen Erforschung der Schwingungserscheinungen bei Brücken notwendig erscheinen. Die Mannigfaltigkeit und die enge Verkettung der verschiedenen dynamischen Erscheinungen bei Brücken und anderen Bauwerken verlangt gebieterisch vor Inangriffnahme grosszügiger Versuche und Beobachtungen an ausgeführten Brücken die theoretische Klärung zahlreicher Fragen der Bauwerksdynamik, denn in diesen schwierigen Fragen werden nur unter Führung der Theorie Beobachtungen und Untersuchungen am Bauwerk mit Aussicht auf Erfolg durchgeführt werden können. Umgekehrt wird aber auch die fortschreitende Versuchsforschung der Theorie neue Aufgaben und Fragen stellen. In einem solchen steten Zusammenwirken von mathematischer Theorie und Versuchsforschung zwecks gegenseitiger Anregung und Befruchtung sehe ich den einzigen gangbaren Weg, um das überaus schwierige Problem der Bauwerkdynamik, insbesondere der Brückendynamik einer befriedigenden Lösung zuzuführen.

Aufgabe dieses Referates ist es, in groben Umrissen den derzeitigen Stand der Theorie der Schwingungserscheinungen bei Bauwerken im allgemeinen vorzuführen, um dann auf die Besprechung der im Brückenbau in Betracht kommenden besonderen dynamischen Probleme einzugehen.

A. Eigenschwingungen und erzwungene Schwingungen in Bauwerken.

Drei Ursachen sind es im wesentlichen, die zu Schwingungserscheinungen unserer Bauwerke Anlass geben. 1. Bewegte (rollende) Lasten. 2. Periodische Veränderlichkeit ortsfester oder bewegter Lasten. 3. Stosswirkungen der Lasten. 1. und 2. führen auf das Problem der sogenannten erzwungenen Schwin-

gungen, das im Rahmen des praktischen Bedürfnisses wohl als gelöst betrachtet werden kann, während die befriedigende Lösung aller mit eigentlichen Stosswirkungen der Lasten zusammenhängenden dynamischen Aufgaben bisher, trotz vielfacher Anstrengungen der Ingenieure, nicht gelungen ist.

I. Eigenschwingungen elastischer Systeme.

Jedes Tragwerk führt, wenn es irgendwie angeregt und dann sich selbst überlassen wird, Schwingungen aus, die wir als Eigenschwingungen bezeichnen und die infolge gewisser Dämpfungswirkungen wenn keine neuen Anregungen hinzutreten, abklingen. Diese Eigenschwingungen lassen sich immer auf eine endliche oder unendliche Summe von harmonischen Schwingungen also auf die Form

$$y = \sum_{r=1}^{\infty} \eta_r \sin(p_r t + \varepsilon_r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zurückführen. y ist hierbei die Koordinate einer Punktverschiebung des hier zunächst als eben vorausgesetzten Tragwerkes. p ist gleich der 2π fachen Schwingungszahl je sec und heisst Kreisfrequenz, ε ist die Phasenverschiebung. η ist die Schwingungsamplitude, sie stellt eine von der Zeit unabhängige Ortsfunktion vor.

Das durch Gl. (1) dargestellte System von Eigenschwingungen kennzeichnet das dynamische Verhalten des Systems. Die Kenntnis der Eigenschwingungen bildet daher die Grundlage für alle weiteren Schwingungsuntersuchungen. Ordnet man die Glieder in Gl. (1) nach der Grösse von p_r, so heisst das erste Glied mit dem kleinsten p die Grundschwingung, ihr entspricht in der Regel die grösste Amplitude η. Die übrigen Schwingungen heissen Oberschwingungen; p nimmt mit wachsendem r sehr rasch zu, η sehr rasch ab. Massgebende Rolle, insbesonders bei Resonnanzproblemen, spielt die Grundschwingung, weshalb es meistens genügt die Grundschwingungszahl zu kennen.

Fasst man die Bauwerke im allgemeinsten Fall als aus biegungs- und torsionssteifen Stäben zusammengesetzte Tragwerke auf, so vollführen die einzelnen Stäbe Längs- Biegungs- und Torsionsschwingungen. Ausserdem vollführen die einzelnen Stäbe als ganzes periodische Verschiebungen und Drehungen. In Fachwerken spielen, selbst wenn die Stäbe in den Knoten steif verbunden sind, die Biegungsspannungen in der Regel nur eine untergeordnete Rolle, die Nebenspannungen haben bei den hauptsächlich gebräuchlichen Fachwerkformen sehr geringen Einfluss auf die Formänderung des Fachwerkträgers. Massgebend sind hier die Längenänderungen, also vom dynamischen Standpunkt aus, die periodischen Verschiebungen und Drehungen der ganzen Stäbe, sowie ihre Längsschwingungen. Umgekehrt spielen bei Rahmensystemen die Biegungsschwingungen neben den Längsschwingungen eine ausschlaggebende Rolle. Setzt man voraus, dass unsere Bauwerke, was in der Mehrzahl der Fälle zutreffen wird, aus ebenen Tragsystemen bestehen, wo von Ausnahmsfällen abgesehen, Torsionsmomente keine Rolle spielen, so können wir in erster Annäherung mit einer dynamischen Theorie des ebenen Fachwerkes

einerseits, und des ebenen Stabwerkes, d. s. ebene Tragwerke aus biegungssteifen und miteinander steif verbundenen Stäben, anderseits, zunächst das Auslangen finden.

Für die Schwingungszahlen der Eigenschwingungen sind die Grösse und Verteilung der Massen, sowie die Steifigkeit des Tragwerkes massgebend. Je grösser die Masse und je elastischer das Tragwerk ist, umso langsamer ist die Grundswingung. Die Schwingungszahlen werden von kleinen Massenverschiebungen wenig beeinflusst, es genügt daher bei der praktischen Ermittlung der Schwingungszahlen vereinfachte Massenverteilung anzunehmen, um die Berechnung zu vereinfachen, ohne dass sich das Ergebnis, praktisch genommen, verschiebt.

1. Eigenschwingungen von Fachwerken.

Die Ermittlung der Eigenschwingungsperioden kann ausserordentlich vereinfacht werden, wenn man jedes Fachwerk in ausreichender Annäherung als ein System von n Massenpunkten, die in den n Knoten des Trägers sitzen, betrachtet, und zwischen denen die Stabkräfte als innere elastische Kräfte wirken[6, 10]. Ist das Fachwerk im allgemeinsten Fall z fach statisch unbestimmt, so führt das Problem auf $N = 2n - 3 - z$ homogene Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} P_k u_k \frac{p^2}{gE} &= \sum_h \frac{F_{hk}}{s_{hk}} \left[(u_k - u_h)\cos\alpha_{hk} + (v_k - v_h)\sin\alpha_{hk}\right]\cos\alpha_{hk} \\ P_k v_k \frac{p^2}{gE} &= \sum_h \frac{F_{hk}}{s_{hk}} \left[(u_k - u_h)\cos\alpha_{hk} + (v_k - v_h)\sin\alpha_{hk}\right]\sin\alpha_{hk} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

worin u_k v_k die Verschiebungsamplituden des Knotens k, u_h, v_h die Verschiebungen aller durch Stäbe mit k verbundenen Knoten h, F_{hk}, s_{hk} Flächen und Längen der in k zusammentreffenden Stäbe, P_k die Knotenlast in k, g und E Schwerebeschleunigung und Elastizitätsmodul bedeuten. α_{hk} sind die Neigungswinkel der Stäbe gegen eine feste Achse x. Siehe Abb 1.

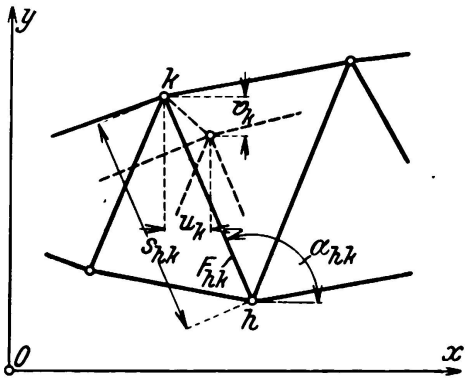

Fig. 1.

Die Null gesetzte Determinante des Gleichungssystems (2) liefert die Periodengleichung aus der die N Eigenschwingungsgrössen des Fachwerkes hervorgehen. Praktisch wäre die Ausrechnung der Determinante überaus beschwerlich. Doch kann in äusserst einfacher Weise durch ein von POHLHAUSEN[9] angegebenes schrittweises Annäherungsverfahren, das in seinem Wesen mit den von Vianello für Bemessung von Knickstäben vorgeschlagenen zeichnerischen Verfahren übereinstimmt, die Grundschwingungszahl und wenn notwendig die höheren Schwingungszahlen mit verhältnismässig geringer Mühe ermittelt werden.

Man wählt zu diesem Zwecke ein beliebiges System von Verschiebungen u und v, die aber mit den Auflagerbedingungen im Einklange stehen müssen,

und berechnet mit der Annahme $\lambda^2 = \frac{p^2}{E g} = 1$ die Knotenlasten $P u \lambda^2$ und $P v \lambda^2$ und hiezu zeichnerisch oder rechnerisch die zugehörenden Stabkräfte S, die wir als erste Näherungswerte mit S' bezeichnen. Mit diesen Stabkräften ermittelt man die Verschiebungen u' und v', z B mit einem Williotschen Verschiebungsplan, und berechnet nach Pohlhausen mittels der Beziehung

$$\lambda'^2 = \frac{1}{\sqrt{\Sigma(P u')^2 + \Sigma(P v')^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

einen ersten Näherungswert λ'^2. Die Summen unter den Wurzelzeichen erstrekken sich hiebei auf alle Knoten des Fachwerkes. Man bestimmt nun mit diesem Wert λ'^2 neuerdings die Knotenlasten $P u' \lambda'^2$ und $P v' \lambda'^2$ und dazu die neuen Stabkräfte S'' und die dazugehörenden Knotenverschiebungen u'', v'', die einen neuen Näherungswert

$$\lambda''^2 = \frac{1}{\sqrt{\Sigma(P u'')^2 + \Sigma(P v'')^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

liefern. Der Vorgang wird solange wiederholt, bis die aufeinanderfolgenden Näherungswerte von λ^2 genügend Übereinstimmung zeigen. Dieses Verfahren führt sehr rasch zum Ziele, da die Konvergenz eine ausgezeichnete ist und meistens der dritte Näherungswert bereits ausreicht. In der Regel wird es genügen, auf diese Weise nur die Grundschwingungszahl zu ermitteln. Doch liegt nichts im Wege, auch die höheren Schwingungszahlen auf dem gleichen Wege zu finden.

Das Verfahren ist vollkommen allgemein und kann bei jeder Art Fachwerksystem, statisch bestimmt oder statisch unbestimmt und bei jeder Art der Massenverteilung verwendet werden und liefert nach zwei oder dreimaliger Wiederholung des einfachen Rechnungsganges (es handelt sich im wesentlichen um Zeichnung von Kräfteplänen und Verschiebungsplänen bezw. Biegeplänen) sehr genaue Ergebnisse. Wegen praktischen Beispielen sei auf [10 und 11] hingewiesen.

2. Eigenschwingungen von Rahmentragwerken.

Wir betrachten zunächst einen einfachen, biegungssteifen Stab als einfachsten Fall eines Rahmentragwerkes. Er stellt ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden vor. An Stelle des endlichen Systems der Gleichungen (2) beim Fachwerk, aus denen die Frequenzen der freien Schwingungen zu ermitteln sind, tritt die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 v}{d x^4} - \frac{\mu p^2}{J E} v = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Gl. (4) stellt die Differentialgleichung des mit $\mu \frac{p^2}{E} v$ belasteten Stabes vor, wobei v die Ausbiegung bedeutet.

Die Ermittlung der Lösung dieser Gleichung kann in der gleichen Art erfolgen, wie bei den analogen Differentialgleichungen in der Theorie des instabilen Gleichgewichtes, nämlich durch schrittweises Anpassen der Biegelinie an

die Bedingungen (4). Es ergibt sich damit im Wesentlichen das gleiche Verfahren, das wir bereits im Vorangehenden dargelegt haben, und das, sinngemäss angewendet, nicht nur für den Einzelstab, sondern auch für jedes Rahmentragwerk Geltung besitzt [11].

Zu diesem Zwecke denken wir uns den steifen Stab oder das Rahmengebilde in einzelne, genügend dicht aneinander gereihte Massenpunkte zerlegt. Jedem dieser Massenpunkte ordnen wir eine zunächst willkürlich angenommene, aber mit den Auflagerbedingungen des Systems verträgliche Verschiebung v, oder wenn wir gleich verallgemeinern wollen, Verschiebungen u und v zu. u sind die Verschiebungen in der Längsrichtung des Stabes, während v die Verschiebung quer zur Stabachse bedeuten. Wir belasten nun das Rahmengebilde in den gewählten Massenpunkten mit den Lasten $P u \lambda^2$ bezw. $P v \lambda^2$. P bedeutet das Gewicht der in den fraglichen Massenpunkten konzentriert gedachten Massen μ des Stababschnittes und seiner Auflasten, wobei zunächst

$$\lambda^2 = \frac{p^2}{E g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gleich 1 gewählt wird. Zu diesen Lasten ermittelt man rechnerisch oder zeichnerisch die Biegungsmomente und Normalkräfte und damit die Verformung in der in der Statik üblichen Weise und gewinnt so ein erstes System von Verschiebungen u' und v'. Man berechnet nun einen ersten Wert von λ^2 nach der Formel.

$$\lambda'^2 = \frac{1}{\sqrt{\Sigma (P u')^2 + \Sigma (P v')^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und wiederholt den vorgeschriebenen Rechnungsgang. Das Ergebnis seien die Verschiebungen u'' und v'', mit denen neuerdings gemäss Gl. (6) ein zweiter Näherungswert λ''^2 bestimmt werden kann. Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis zwei aufeinanderfolgende λ genügend Übereinstimmung zeigen. Dies ist oft schon bei λ'' der Fall.

Auf diese Weise gelingt es, bei passendem Ansatz der ersten Biegelinie die einzelnen Schwingungstypen der Reihe nach darzustellen und die zugehörigen Schwingungszahlen zu berechnen.

II. Erzwungene Schwingungen elastischer Systeme.

Wirkt in irgend einem Punkte des Tragwerkes eine Last P, die ihre Grösse periodisch ändert, wir nehmen an, dass dies nach dem Gesetz $P(t) = P \sin \omega t$ erfolge, so vollführt das Tragwerk, wenn ein gewisser stationärer Zustand erreicht ist, Schwingungen mit der Frequenz ω. Diese Schwingungen sind im allgemeinen für das Bauwerk so lange ungefährlich, als die Schwingungszahl n nicht in Übereinstimmung mit einer der niedrigen Eigenschwingungsperioden, insbesonders mit der Grundschwingungsperiode steht. Ist dies der Fall, so tritt die bekannte Erscheinung der Resonanz ein. Die Schwingungsamplituden und damit die von den Schwingungen herrührenden Beanspruchungen können sehr gross werden, und falls die Dämpfung nicht genügend stark ist, wachsen die Amplituden und damit die Spannungen im Tragwerk in einer

den Bestand desselben gefährdenden Weise. Für die praktische Bemessung des Bauwerks entsteht nun die Frage, wie nahe darf die Schwingungszahl n der einwirkenden Last an die kritische Schwingungszahl ν heranrücken, ohne das Bauwerk in Gefahr zu bringen, und wie hoch sind die durch die schwingende Last erzeugten tatsächlichen Beanspruchungen im Bauwerk.

1. Näherungslösung.

Vereinfachende Annahmen führen auf folgende verhältnismässig gut stimmende Näherungsformeln: [10 und 11]

a) Fachwerke: Ist $P^* \sin \omega t$ die schwingende Last, die in einem Knoten m angreife, w die Verschiebung des Knotens m in der Richtung von P^*, u und v die übrigen Knotenverschiebungen, wobei w, u, v die bei der Ermittlung der Eigenschwingungen nach dem Pohlhausenverfahren festgestellten Eigenschwingungsverschiebungen und P die zugehörenden Knotenlasten sind; ist weiters S_k die Stabkraft im Stabe s_k, die zu diesen Verschiebungen gehört und die ebenfalls aus dem Rechnungsgange zur Bestimmung der Eigenschwingungen bekannt ist, so ist die tatsächliche Stabspannung S_k^* unter Wirkung der schwingenden Last $P^* \sin \omega t$ gegeben durch

$$S_k^* = \frac{\alpha S_k}{1 - \frac{n^2}{\nu^2}}, \quad \alpha = \frac{w}{\Sigma P u^2 \lambda^2 + \Sigma P v^2 \lambda^2}, \quad \lambda = \frac{p^2}{E g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hierbei ist von Fall zu Fall die Rechnung mit jenem Eigenschwingungstypus durchzuführen, dessen Schwingungszahl $\nu = \frac{p}{2\pi}$ der Schwingungszahl der antreibenden Kraft P^*, nämlich $n = \frac{\omega}{2\pi}$ am nächsten kommt. n kann kleiner oder grösser als ν sein.

b) Rahmentragwerke: Eine ganz analoge Formel gilt auch hier. Ist M_k^* das von der Last $P^* \sin \omega t$ hervorgerufene Biegungsmoment in irgend einem Punkte k, so gilt hierfür

$$M_k^* = \frac{\alpha M_k}{1 - \frac{n^2}{\nu^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Bezeichnunhen haben die gleiche Bedeutung wie oben. M_k ist das zu den Eigenschwingungsverschiebungen u, v, w gehörende Moment im Punkte k.

Aus den Formel (7 und 8) erkennt man, dass bei Heranrücken von n an ν, der Nenner sich der Grenze 0 nähert, und dass bei Fehlen der Dämpfung S oder M ins Unendliche wächst. Anderseits gestatten die einfachen Gl. (7 und 8) zu entscheiden, wie nahe man im Einzelfalle mit der Schwingungszahl n an die kritische Zahl ν heranrücken darf, um einerseits die notwendige Sicherheit zu haben, dass man weit genug vom kritischen Grenzzustand entfernt ist, und dass anderseits die auftretende dynamische Spannung im Tragwerk, hinzugefügt zu den von den übrigen ruhenden Lasten hervorgerufenen Spannungen noch innerhalb der zulässigen Beanspruchung bleibe. Die Entscheidung im

Einzelfalle hängt ganz davon ab, mit welcher Genauigkeit n bekannt ist und wie genau die kritische Eigenschwingung bestimmt werden kann. Diese Bestimmung ist mit sehr grosser Genauigkeit dann durchführbar, wenn die mitschwingenden Massen der Grösse und Lage nach gut bestimmt sind. Wie nahe man n an ν heranrücken lassen kann, hängt weiters damit zusammen, wie gross für sich genommen der Spannungszuwachs in Folge der schwingenden Last P gegenüber den von den übrigen Lasten erzeugten Spannungen ist. Man erkennt, dass eine allgemeine Regel, wie gross der Unterschied zwischen n und ν gemacht werden soll, nicht gegeben werden kann, dass aber anderseits die einfachen Formeln (7 und 8) es leicht machen, im Einzelfall nach richtiger Einschätzung der die Genauigkeit der beiden massgebenden Zahlen n und ν beinflussenden Faktoren, den Abstand von n und ν festzulegen.

2. Genaue Lösung.

Für das Fachwerk fehlt in der einschlägigen Literatur ein zweckmässiges Verfahren zur genaueren Ermittlung der Formänderungen und Beanspruchungen in Folge eingeprägter Schwingungen, obwohl es grundsätzlich nicht schwer sein dürfte, diese Aufgabe in einer für die Praxis geeigneten Form zu lösen.

Für das ebene Rahmentragwerk haben, PRAGER [12], BLEICH [11], mehr oder weniger allgemeine Verfahren angegeben, um in einer auch bei praktischen Rechnungen anwendbaren Form und ohne allzugrosse Rechenarbeit die Aufgabe der erzwungenen Schwingung streng zu lösen.

Die Prüfung der Näherungsformeln (7 und 8) an den Ergebnissen der genauen Berechnung hat die Zuverlässigkeit der Näherungsformeln bestätigt.

B. Dynamische Probleme des Brückenbaues.

Wie in den nachfolgenden Erörterungen gezeigt werden wird, genügen die im Vorangehenden in Kürze vorgeführte Theorie und ihre Ergebnisse, um eine ganze Reihe von Fragen der Brückendynamik erfassen zu können. Welche Fragen überhaupt in Betracht kommen, haben Sie aus dem ausgezeichneten Bericht des Herrn HOMANN entnommen.

Von diesen Fragen sind die folgenden einer mehr oder weniger guten rechnungsmässigen Behandlung zugängig :

1. Erzwungene Schwingungen infolge der mit der Geschwindigkeit v rollenden Lasten.

2. Zusatzbeanspruchungen von den Fliehkräften, die in der nach unten gekrümmten Bahnlinie der bewegten Lasten auftreten.

3. Zusatzbeanspruchungen infolge der erzwungenen Schwingungen, die durch die periodisch veränderlichen Raddrücke der Lokomotiven infolge des unvollständigen Massenausgleiches ausgelöst werden, sowie die Zusatzbeanspruchungen durch die periodischen Stosswirkungen der in regelmässigen Abständen angeordneten Schienenstösse.

Eine Reihe älterer Arbeiten hat sich mit diesen Einzelproblemen befasst. Ich nenne hier nur PHILLIPS [2], RENAUDOT [3], BRESSE [4], LEBERT [5], die das Problem der Brückenschwingungen unter dem Einfluss der rollenden Lasten behan-

delt haben. STOKES[1], und ZIMMERMANN[7] haben den Einfluss der infolge der Durchbiegung entstehenden Fliehkräfte dargestellt.

Timoshenko[8] hat als erster einige Fragen der Brückendynamik, die einer rechnerischen Behandlung zugänglich sind, in einheitlicher Weise, unter der Benützung der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art erörtert. Die gleichen Probleme wurden später von der Differentialgleichung der Querschwingungen gerader Stäbe ausgehend und, so weit notwendig, unter Berücksichtigung der Abfederung der rollenden Last von Bleich untersucht und gezeigt, wie man auf theoretischem Wege zu den für die Praxis notwendigen Stosskoeffikienten gelangen kann [10].

1. Erzwungene Schwingungen von der rollenden Last.

Unter der Annahme, dass eine Einzellast P, deren Masse aber klein gegen die Masse des Tragwerkes gedacht ist, über einen frei aufgelagerten Balken von der Stützweite l mit der Geschwindigkeit c rollt, lassen sich die durch die bewegte Last erzwungenen Schwingungen leicht berechnen. Der Träger führt dann neben den Eigenschwingungen erzwungene Schwingungen mit der Periode $T = \frac{2\,l}{c}$ aus. Diese Periode ist also gleich der doppelten Zeit, die die Last braucht, um über die Brücke zu rollen. Die Bewegung ist langsam gegenüber den freien Schwingungen. Die Bahn des Lastpunktes ist im verzerrten Masstab in Abb. 2 dargestellt. Die grösste Durchbiegung tritt etwas seitwärts der Mitte auf. Da die erzwungenen Schwingungen verhältnismässig langsam sind, so tritt bei der Steifigkeit der heutigen Brücken Resonanzwirkung erst bei Lastgeschwindigkeiten von über 300 m/sek. ein, die natürlich nicht vorkommen, sodass Resonanzerscheinungen bei diesem Problem nicht in Frage kommen. Die zusätzliche Beanspruchung durch die Wirkung der rollenden Lasten beträgt bei schweren Eisenbahnbalkenbrücken etwa 10 % der statischen Wirkung der Last P bei 5 m Spannweite und nimmt bis auf ca 5 % bei 150 Spannweite ab. Die genaueren Zahlen sind nachstehend angegeben. Sie wurden für schwere Eisenbahnbalkenbrücken unter bestimmten Annahmen über Eigengewicht und Steifigkeit errechnet [10]. Aehnliche Zahlenreihen lassen sich für jeden Brückentypus, z. B. Bogenbrücken, unschwer aufstellen.

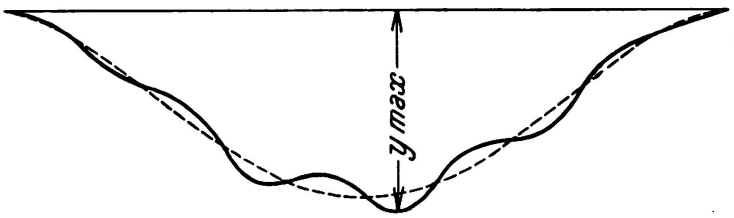

Fig. 2.

Tafel 1.

Stützweite l in m	4	6	10	15	20	25	50	100	150
Vermehrung in % der statischen Wirkung	10,3	9,8	8,7	8,7	8,3	8,1	6,8	5,9	5,0

Rollt eine ganze Folge von Einzellasten über die Brücke, so werden sich die einzelnen Lasten in ihrer Wirkung auf den Träger z. T. stören. Im ungün-

stigsten Fall aber zeigt es sich, dass die gleichen Vermehrungskoeffizienten gelten, wie für eine Einzellast [8 und 10].

Untersucht man den Einfluss, den die Abfederung der Wagen auf die Schwingungen ausübt, so gelangt man zu dem folgenden einfachen Zusammenhang [10]. Ist ν die Eigenschwingungszahl des Trägers ν', die der mit P belasteten Feder, so verhält sich die Amplitude der erzwungenen Schwingung der abgefederten Last zur Amplitude der Trägerschwingungen wie

$$\mu = \frac{\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2}{1-\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ist ν gross, ν' klein, so ist μ klein gegen 1, d. h. die abgefederte Last schwingt mit bedeutend kleinerer Amplitude als der Träger.

Die kleinen Wellen, die sich in Abb. 2 über die Hauptdurchbiegung überlagern, werden daher durch die Abfederung der Last stark abgeflacht. Der Einfluss der Abfederung ist bei Brücken kleiner Stützweiten mit ihren raschen Schwingungen sehr gross. Bei grösseren Brücken macht sich die Abfederung weniger geltend. Diese Erkenntnis ist aber äusserst wichtig, da gerade bei kleinen Brücken die Trägheitswirkungen der Lasten von grosser Bedeutung sind, und die gerade durch die Abfederung stark vermindert werden.

2. Einfluss der Trägheitskräfte der rollenden Last.

Wenn man die Träger nicht als gewichtslos betrachten will, ist eine strenge Lösung der hier in Frage kommenden Aufgabe nicht möglich. Die über den Träger rollende Last P mit der Masse $\frac{P}{g}$ übt infolge der Bahnkrümmung nach unten einen Druck

$$P' = P\left(1 - \frac{\mu}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

aus, wo μ der oben, Gl. (9), ermittelte Beiwert der Abfederung ist. Die Wirkung dieser Kraft ist eine zweifache. Sie beeinflusst sowohl die oben berechneten erzwungenen Schwingungen als auch die sie begleitenden freien Schwingungen. Durch eine mehr abschätzende Näherungsberechnung wurde gefunden, dass die Vergrösserung der unter 1) betrachteten erzwungenen Schwingungen im Verhältnis von

$$1 : 1 + \frac{8M}{pl^2}\alpha^2 \qquad \alpha^2 = \frac{c^2 l^2 p}{\pi^2 EIg} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

erfolgt [10]. Hierin ist M das Moment des rollenden Lastenzuges, pl das Tragwerksgewicht, EJ die Brückensteifigkeit. Die folgende Tafel 2 gibt in Prozenten die Vermehrung der statischen Wirkung für den in Tafel 1 zugrunde gelegten Brückentypus an.

Tafel 2.

Stützweite l in m	4	6	10	15	20	25	50	100	150
Vermehrung in % der statischen Wirkung	12,3	8,3	4,9	3,3	2,4	1,9	0,91	0,38	0,23

Der Einfluss der lotrechten Fliehkräfte auf die freien Schwingungen ist nur bei kleinsten Stützweiten von Bedeutung. Die folgende Tafel 3 gibt ziffernmässig die Vermehrung der statischen Wirkung durch diese Fliehkräfte, bei dem bereits oben erwähnten betrachteten Brückentypus an[10].

Tafel 3.

Stützweite l in m	4	6	10	15	20	25	50	100	150
Vermehrung in % der statischen Wirkung	19,2	11,3	5,3	3,3	2,3	1,7	1,0	0,62	0,27

3. Dynamische Wirkungen der Gegengewichte der Lokomotivräder.

Die Gegengewichte der Lokomotivräder wirken mit dem Gesetz $P \sin 2\pi n t$ auf die Brücke. Nähert sich n einer Eigenschwingungszahl, so tritt Resonanz ein. Bei den üblichen Schnellzugslokomotiven ist $c = 30$ m/sec. und $n \simeq 5$. Nun ist bei Balkenbrücken von etwa 50 m Spannweite die Eigenschwingungszahl ν ebenfalls gleich 5. Es besteht also die Gefahr, dass bei Brücken von etwa 50 m Spannweite angefangen, starke Resonanzerscheinungen auftreten können. Diese Wirkungen werden aber erfahrungsgemäss verringert durch die Phasenverschiebung bei den einzelnen Lokomotivrädern und durch die Dämpfung in der Brücke, Es erscheint daher in erster Linie notwendig, da das Problem der gedämpften erzwungenen Schwingungen von der theoretischen Seite her als gelöst betrachtet werden kann, durch Beobachtungen an Brücken ziffernmässige Werte der Dämpfungskoeffizienten festzustellen. Mit der Bestimmung dieser Dämpfungskoeffizienten wäre auch die Frage der Resonanz bei erzwungenen Schwingungen infolge der in festen Abständen angebrachten Schienenstösse einer Lösung näher gebracht.

Damit wurden in knapper Form die wichtigsten einer theoretischen Behandlung unterzogenen Probleme der Brückendynamik gestreift. Bei der mathematischen Behandlung dieser Aufgaben wurde aber stillschweigend von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Lasten durch starre Längs- und Querträger auf die Hauptträger übertragen werden. Die Wirkung der elastischen Fahrbahntafel macht sich aber so wie eine Abfederung geltend. Es wäre daher als eine nächste, durchaus auf theoretischem Wege lösbare Aufgabe zu erledigen, den Einfluss der elastischen Fahrbahntafel auf die Schwingungserscheinungen bei den Hauptträgern und umgekehrt den Einfluss der elastischen Lagerung von Längs- und Querträgern auf deren Schwingungen rechnerisch festzustellen.

Quellennachweis

1. Stokes. Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges. Trans. of the Cambridge Soc., 1849, p. 707.

2. Philips. Calcul de la résistance des poutres droites, telles que les ponts, les rails, etc., sous l'action d'une charge en mouvement. Ann. des mines, 1855, p. 467.

3. Renaudot. Études de l'influence des charges en mouvement sur la résistance des ponts métalliques à poutres droites. Ann. des Ponts et Chauss., 1861, p. 145.

4. Bresse. Cours de mécanique appliquée, I, 1862-66, p. 361.

5. Lebert. Études des mouvements vibratoires dans les ponts à poutres droites à une

travée et dans les ponts suspendus à tablier continu simplement appuyées aux culées. Ann. Ponts et Chauss., 1899, p. 215.

6. Reissner. Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks. Zeitschrift für Bauwesen, 1903, Seite 135.

7. Zimmermann. Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Berlin, 1896.

8. Timoshenko. Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Zeitschrift für Math. und Phys., 1911, S. 163.

9. Pohlhausen. Berechnung der Eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., 1921, S. 28.

10. Bleich. Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin, 1924.

11. Bleich. Stahlhochbauten, ihre Theorie, Berechnung und bauliche Gestaltung. Berlin, 1932.

12. Prager. Die Beanspruchung von Tragwerken durch schwingende Lasten. Ing. Archiv., 1930.

TRADUCTION

par M. Gossieaux, Ing., Paris.

Dans le rapport qu'il vient de nous communiquer, M. Homann a présenté d'une manière concise, mais parfaitement claire, tous ceux des problèmes de la dynamique dont la mise au point paraît nécessaire si l'on veut pouvoir effectuer des recherches fructueuses sur les phénomènes d'oscillation qui se manifestent dans les ponts. La multiplicité et l'étroit enchaînement des divers phénomènes dynamiques que l'on observe dans les ponts et dans les autres ouvrages exigent d'une manière impérieuse, avant le commencement des recherches de grande envergure et des observations sur des ponts réels, la solution théorique de nombreuses questions pratiques concernant la dynamique des ouvrages. Si l'on veut, en effet, pouvoir poursuivre, avec quelques chances de succès, les observations et les recherches concernant la construction, dans ces domaines difficiles, il est nécessaire de s'appuyer sur des bases théoriques solides. Inversement, la progression des recherches expérimentales posera des questions théoriques nouvelles. Dans une dépendance aussi étroite entre la théorie mathématique et la recherche expérimentale, dépendance qui a pour conséquence la réciprocité dans l'impulsion et les progrès, je vois la seule condition qui permette d'arriver à une solution heureuse du problème délicat que constitue la dynamique de la construction et, en particulier, la dynamique du pont.

Le but de la présente étude est de présenter, d'une manière générale, et dans ses grandes lignes, l'état actuel de la théorie des phénomènes oscillatoires que l'on rencontre en construction, pour passer ensuite à l'énoncé des problèmes dynamiques qui se posent tout particulièrement en ce qui concerne la construction des ponts.

A. Les oscillations propres et les oscillations forcées dans la construction.

Il existe trois causes principales qui peuvent donner naissance, dans nos ouvrages de construction, à des phénomènes d'oscillation. Ce sont les suivantes :

tement de cette hypothèse que les charges sont transmises aux poutres principales par l'intermédiaire des longerons et des poutres transversales rigides. L'influence de l'élasticité du tablier de la voie se fait donc sentir comme si une supension intervenait. Il faudrait donc ensuite déterminer complètement, sur des bases théoriques, l'influence qu'exerce le tablier élastique du pont sur les phénomènes d'oscillation, puis déterminer corrélativement l'influence de l'appui élastique que constituent les longerons et les poutres transversales sur ces oscillations.

Zusammenfassung.

Es werden die Methoden zur Berechnung der Eigenschwingungen und der durch periodisch veränderliche Lasten hervorgerufenen erzwungenen Schwingungen dargelegt. Diese Verfahren können bei Fachwerken, bei biegungssteifen Trägern und bei Rahmenkonstruktionen Anwendung finden. Verwendung der vorgeführten Theorien in der Dynamik der Brücken und zwar auf folgende Probleme : 1) Erzwungene Schwingungen der Brücken unter dem Einfluss rasch bewegter Lasten, 2) Einfluss der durch die Durchbiegung der Brücken geweckten lotrechten Fliehkräfte der bewegten Lasten. Der Einfluss der Abfederung der Lasten auf die dynamische Wirkung derselben kann berücksichtigt werden. Als Beispiel werden die Vermehrungszahlen der statischen Spannungen durch die dynamische Wirkung der bewegten Lasten bei schweren Eisenbahnbalkenbrücken vorgeführt.

Résumé.

L'auteur expose les méthodes de détermination des oscillations propres et des oscillations forcées qui sont provoquées par des charges périodiquement variables. Ces méthodes peuvent être employées pour les treillis, les poutres rigides et les charpentes constituées par des cadres.

Il expose ensuite les principes de l'application des théories précédentes à la dynamique du pont, et en particulier aux problèmes suivants :

1. Oscillations forcées provoquées dans les ponts par l'action des charges rapides ;

2. Influence des efforts centrifuges verticaux, provoqués par le fléchissement des ponts sous l'action des charges roulantes.

On peut d'ailleurs tenir compte de l'influence qu'exerce la suspension des charges sur leur action dynamique.

A titre d'exemple, l'auteur montre quelles amplifications subissent les influences statiques par suite de l'action dynamique des charges roulantes, dans les ponts lourds de chemins de fer.