Diskussion

Autor(en): **Hartmann, Friedrich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **1 (1932)**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-482

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Participants à la discussion des questions I_1 et I_2.
Diskussionsteilnehmer an den Fragen I_1 und I_2.
Participants in the discussion of questions I_1 and I_2.

Dr. Friedrich HARTMANN [1],
Professor an der Technischen Hochschule, Wien.

Da im Laufe der letzten Jahre und besonders in jüngster Zeit Bedenken gegen die bestehende Knicktheorie aufgetaucht sind und zuletzt sogar Verbesserungsvorschläge gemacht wurden, ist es notwendig einmal festzustellen, inwieweit man die Ergebnisse der Knicktheorie als gesichert ansehen darf.

1) Dass im elastischen Bereich für den geraden, zentrisch belasteten Stab die Euler'sche Formel die Knicklasten in sehr zuverlässiger Weise darstellt, wurde schon durch zahlreiche Versuche bewiesen.

Die schärfere Fassung der Knicktheorie im elastischen Bereich mit der ungekürzten Differentialgleichung der Biegelinie, die zuerst Lagrange, dann angenähert Grashof und zuletzt in voller Schärfe, auch für den praktischen Gebrauch geeignet, Schneider [2] in Wien gebracht hat, zeigt, dass die Euler'sche Last eigentlich nicht strenge die Knicklast im Sinne der tragbaren Last ist, sondern nur als kritische Last aufzufassen ist, bei deren Erreichung das bisher stabile Gleichgewicht des Stabes aufhört. Die Eulerlast selbst vermag aber noch keine endliche Ausbiegung zu erzeugen, sondern es ist dazu eine kleine Steigerung dieser Last erforderlich. Mit dieser geht der Stab in einen neuen stabilen Gleichgewichtszustand über mit ausgebogener Achse, aber nur solange, als die Randspannungen die Proportionalitätsgrenze σ_p nicht überschreiten. Daraus ergibt sich, dass die Ueberschreitung der Eulerlast für grosse Schlankheiten grösser sein kann als für kleine und an der P-Grenze schliesslich Null wird. Hier ist die Eulerlast nicht nur die kritische sondern gleichzeitig auch die Knicklast. Eine nennenswerte Ueberschreitung der Eulerlast kommt aber nur bei sehr grossen Schlankheiten vor (federartige Stäbe, Reisschiene), während bei den im Bauwesen üblichen Schlankheiten die mögliche Ueberschreitung der Eulerlast sehr geringfügig ist, sodass sie praktisch gar keine Rolle spielt. Für die Praxis darf daher die Euler'sche Last immer auch als Knicklast angesehen werden und die Versuche bestätigen dies.

2) Für den unelastischen Bereich wurde im Jahre 1895 von Engesser die heute geltende Knickformel durch Einführung des Knickmoduls T abgeleitet [3]. Die Formel für T wurde in allgemeinster Form, also für jeden beliebigen Querschnitt gültig, gegeben. Während nämlich im elastischen Bereich die Querschnittform ohne Einfluss auf die Knickspannung ist, ist dies im unelastischen Bereich nicht mehr der Fall. Engesser stand damals leider noch keine richtige Arbeitslinie für Baustahl zur Verfügung, doch hat er schon in einer früheren Veröffentlichung, in der Zeitschrift des Ing. u. Arch.-Vereines Han-

1. Da der Autor verhindert war, am Pariserkongress teilzunehmen, wurde das vorliegende Referat vom Generalsekretär, Hrn. Prof. Dr. L. Karner, vorgetragen.
2. Ztsch. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1901.
3. Schweizer. Bauzeitung 1895 vom 27. Juli.

nover 1889, damals allerdings noch mit dem unrichtigen Knickmodul $T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, den Zusammenhang zwischen Arbeitslinie und Linie der Knickspannungen vollkommen einwandfrei dargestellt, die Bedeutung der Stauchgrenze als oberste Grenze der Knickspannungen voll erkannt und überdies in seinem Buche « Zusatzkräfte und Nebenspannungen » 1892 bereits ein Diagramm für den Verlauf der Knickspannungen gegeben, das sich fast vollkommen mit jenem deckt, das heute die deutschen Reichsbahnen ihren Berechnungen zugrunde legen. Diese Arbeiten Engessers wurden scheinbar wenig beachtet und sind erst 1910 durch Kármán zum Leben erweckt worden, der die Herleitung etwas ausführlicher als Engesser wiedergab, aber natürlich genau dasselbe erhielt. Dass die Formeln nunmehr siegreich in die Praxis einzogen, ist auf die Versuche zurückzuführen, die Kármán mit grosser Genauigkeit anstellte und die die Theorie für den gewählten Baustahl bestätigten. Ein besonderes Verdienst Kármáns ist es, zum ersten Mal die Theorie des Einflusses kleiner Exzentrizitäten gegeben zu haben. Er konnte dadurch zeigen, dass der Einfluss selbst sehr kleiner Exzentrizitäten im unelastischen Bereich eine ungleich grössere Rolle spielt als im elastischen Bereich.

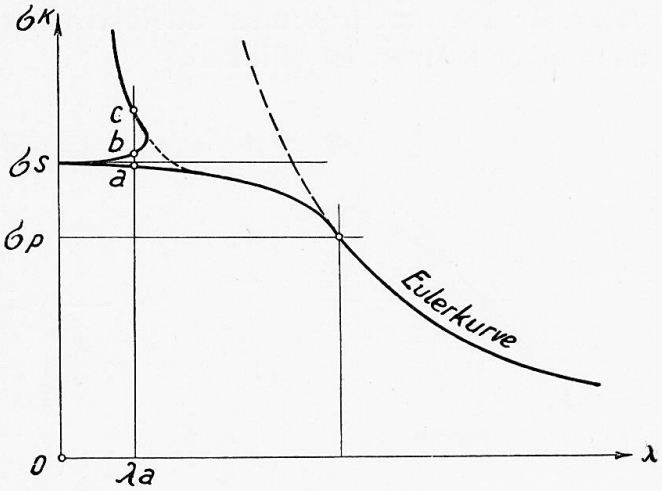

Fig. 1.
Courbe d'Euler = Eulerkurve = Euler curve.

Kármán konnte, nachdem er selbst genaue Arbeitslinien für Druck durch den Versuch ermittelt hatte, den Verlauf der Knickspannungen als Funktion der Schlankheit zum ersten Male theoretisch darstellen.

Seine Darstellung enthält aber eine Unstimmigkeit und das ist die, gegen die sich die Angriffe besonders in jüngster Zeit richteten.

Die Engesser-Kármán'sche Theorie ergibt nämlich bei Annäherung der Knickspannungen an die Stauchgrenze σ_s immer kleiner werdende Knickschlankheiten $\lambda_k = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_k}}$ und für $\sigma_k = \sigma_s$ schliesslich $\lambda_k = 0$, wofern die Arbeitslinie an der Stauchgrenze in die Wagrechte übergeht ($T = 0$). Nach Durchlaufen des Stauchbereiches steigt aber die Arbeitslinie wieder an und damit auch die Knickschlankheit. Daher ergibt die Linie der Knickspannungen einen oberhalb σ_s liegenden Ast, dessen Verlauf aus Bild 1 zu ersehen ist. Die Folge davon ist die sonderbare Erscheinung, dass für gewisse Schlankheiten λ_a sich dreierlei verschiedene Knickspannungen σ_a, σ_b, σ_c ergeben, was als unmöglich erklärt wird. Kármán hat nun die nach $\lambda = 0$ gehende Spitze im Verlaufe der Linien der Knickspannungen nicht gezeichnet, sondern die Aeste unterhalb und oberhalb der Stauchgrenze durch die im Bild 1 gestrichelt dargestellte Linie verbunden, wodurch er einen stetigen Linienzug erhielt, der jedoch im

Bereich der gestrichelten Linie unrichtig ist. Richtig im Sinne der Theorie kann nur der vollgezeichnete Linienzug mit der Spitze bei $\lambda = 0$ sein. Ich glaube nun aber auch den scheinbaren Widerspruch aufklären zu können, dass man für λ_a drei verschiedene Werte auf der Kurve der σ_k erhält.

Zunächst muss man die Vorstellung verlassen, dass die σ_k Knickspannungen darstellen. Es sind auch wieder nur kritische Spannungen, die die Aenderung des Gleichgewichtszustandes erzeugen, da ja Engesser und Kármán bei der Herleitung der Formeln nur mit unendlich kleinen Ausbiegungen rechneten. Es müssen also endliche Ausbiegungen ausgeschaltet bleiben.

Wir haben gesehen, dass an der P-Grenze die Euler'sche Last auch schon gleich der Knicklast ist, (immer im Sinne der tragbaren Last). Dies gilt um so mehr für den nun folgenden unelastischen Bereich [1], solange die Arbeitslinie nach oben konvex ist (Bild 2).

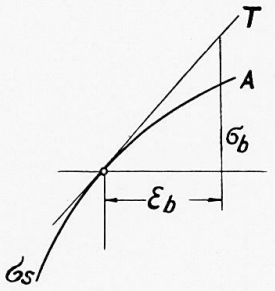

Fig. 2.

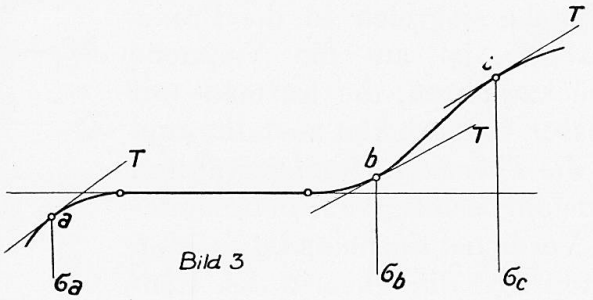

Fig. 3.

Für eine unendlich kleine oder angenähert für eine sehr kleine endliche Ausbiegung des Stabes verlaufen die Biegedruckspannungen σ_b nach der Tangente T an die Arbeitslinie A. Die Biegedehnung ε_b ist dabei auch unendlich klein oder näherungsweise sehr klein zu denken, denn für eine endliche Ausbiegung folgt σ_b nicht der Tangente T sondern der Arbeitslinie A selbst und da die Arbeitslinie unterhalb T verläuft, erhält man sozusagen einen kleineren Knickmodul als für den Spannungsverlauf nach der Tangente und demgemäss auch eine kleinere Knickschlankheit oder für die ursprüngliche Knickschlankheit eine kleinere Tragkraft. Dies lässt sich auch rechnungsmässig unter Annahme einer Sinuslinie als Biegelinie leicht nachweisen.

Wenn hingegen die Arbeitslinie oberhalb der Tangente T liegt, wie am Beginn des Verfestigungsbereiches, dann wird der Knickmodul (in übertragenem Sinne) mit endlicher Ausbiegung grösser als bei unendlich kleiner Ausbiegung, d. h. die Knickschlankheit oder die Tragkraft wächst bei endlicher Ausbiegung mit der Ausbiegung an, erreicht ein Maximum (wirkliche Knicklast und fällt dann wieder ab, ähnlich wie dies im elastischen Bereich streng genommen der Fall ist; nur sind im unelastischen Bereich die Unterschiede zwischen kritischer und Knick-Last wesentlich grösser als im elastischen Bereich, wo sie rechnungsmässig durch die ganz geringfügige Differenz zwischen den Ergebnissen aus der genauen und der abgekürzten Differentialgleichung erhalten werden, während sich hier wesentliche Differenzen auch nach der

1. Siehe den Diskussionsbeitrag von Prof. Chwalla.

gewöhnlichen Rechnungsweise ergeben (Annahme einer Sinuslinie). Im elastischen Bereich ist die Arbeitslinie überhaupt eine Gerade, fällt also mit T zusammen. Somit erhält man hier nach dem eben Gesagten für endliche Ausbiegungen genau dieselbe tragbare Last wie für unendlich kleine Ausbiegungen, also die Eulerlast. Man sollte aber eigentlich eine grössere tragbare Last erhalten. Dass dies nicht der Fall ist, kommt eben daher, dass man bei der Berechnung der tragbaren Last nur die gewöhnliche Biegetheorie mit der abgekürzten Gleichung anwendet.

Nun ist die Dreiheit der Knickspannungen für die Schlankheit λ_a erklärbar. Bild 3 stellt das Stück der Arbeitslinie an der Stauchgrenze σ_s dar. Erreicht die Knickspannung den Wert σ_a, dem die Knickschlankheit λ_a entspricht ($\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_a}{\sigma_a}}$), dann hört der gerade Stab auf stabil zu sein. Er will sich ausbiegen. Da aber die Engesser-Kármán'sche Linie keine endlichen Ausbiegungen berücksichtigt, müssen wir die Ausbiegungen künstlich verhindern. Belasten wir nun weiter, so wird das Bestreben, seitlich auszuweichen, noch zunehmen, da ja wachsenden Knickspannungen eine immer kleinere Knickschankheit entspricht. Bei $\sigma_k = \sigma_s$ wird das Bestreben des Ausweichens am stärksten sein, darüber hinaus aber wieder abnehmen, da nun auch die λ_k wieder wachsen, wie dies Bild 1 zeigte. Endlich kommt man zum Punkt b, dem auch wieder die Knickschlankheit $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_b}{\sigma_b}}$ entspricht. σ_b ist nun eine kritische Spannung, insoferne als hier das labile Gleichgewicht wieder in ein stabiles Gleichgewicht übergeht. Denn wenn $\sigma_k = \sigma_b$ ist, liegt die Arbeitslinie schon oberhalb der Tangente T und eine Ausbiegung kann jetzt nur durch eine Laststeigerung bewirkt werden. Man kann also hier die seitliche Festhaltung des Stabes entfernen, der Stab ist im stabilen Gleichgewicht! Das ist natürlich auf die inzwischen vollzogene Verfestigung nach Durchlaufen des Stauchbereiches zurückzuführen und auf das darauffolgende Ansteigen der Arbeitslinie.

Nachdem das Gleichgewicht für σ_b stabil ist, muss man offenbar die Belastung weiter steigern können and das ist möglich bis man den Punkt c erreicht mit der Knickspannung σ_c, der abermals die Knickschlankeit $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_c}{\sigma_c}}$ entspricht. Jetzt aber ist die kritische Last auch Knicklast, weil die Arbeitslinie schon unterhalb T liegt. Jetzt ist das Tragvermögen des Stabes endgültig erschöpft.

Diese Ercheinungen sind übrigens durch Kármáns Versuche erhärtet, bei denen sich bei Erreichung der Stauchgrenze eine Labilität zeigte, die nach der Äusserung Kármáns der Stab aber überwand, um dann eine grössere Belastung aufnehmen zu können. Es ist also bei Kármáns Versuchen nicht einmal die seitliche Festhaltung erforderlich gewesen. Das ist wohl darauf zurückzuführen, dass die verschiedenen Punkte eines Stabes verschieden hohe Stauchgrenzen haben. Es beginnt also an einer Stelle das Fliessen, während an der anderen schon die Verfestigung erfolgt. Der Abstand zwischen a und b im Bild 1 ist in Wirklichkeit so klein, dass die Schwankungen in der Höhe

der Stauchgrenze im Stab wahrscheinlich meist grösser sein werden, was für die Stabilität förderlich ist. Dazu kommt im besonderen Falle der Kármán'schen Versuche, dass der von ihm verwendete Stahl einen ausserordentlich kleinen Stauchbereich hat. Bild 4 zeigt die Arbeitslinie des Kármán'schen Stahles im Vergleich zu der des normalen St. 37. Aus diesem Vergleich ist aber noch etwas anderes zu entnehmen. Bei den Knickversuchen des Deutschen Stahlbau-Verbandes, die bis $\lambda_{min} = 20$ durchgeführt wurden, hat sich kein Anstieg der Knickspannungen oberhalb der Stauchgrenze ergeben, während bei Kármán die Knickspannungen bei $\lambda = 30$ kräftig über σ_s anstiegen. Auch dieser

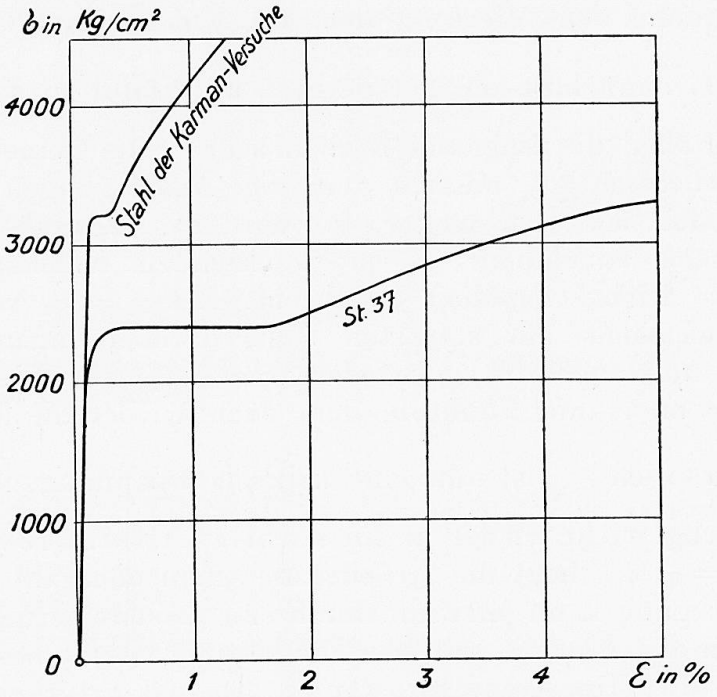

Fig. 4. — Acier employé par Kármán
= Stahl der Kármán-Versuche = Steel of Kármán test.

Umstand ist ein Grund gewesen, die Richtigkeit der Kármán'schen Versuche anzuzweifeln. Nun hängt der Anstieg der Knickspannungen einzig vom Verlauf der Arbeitslinie im Verfestigungsbereich ab. Je steiler die Arbeitslinie dort ansteigt, desto grösser ergeben sich die zugehörigen Knickschlankheiten λ. Aus Bild 4 erkennt man aber, dass bei der Kármán'schen Arbeitslinie der Anstieg nach Erreichen der Stauchgrenze sehr kräftig erfolgt, wie es bei anderen Stahlarten nicht der Fall ist. Bei der hier gezeichneten Arbeitslinie für St. 37 erhält man die ansteigenden Knickspannungen erst für $\lambda = 15$!

Damit glaube ich nun allen Einwürfen gegen den absonderlichen Verlauf der Linie der Knickspannungen begegnet zu haben. Für die Praxis kommen allerdings die oberhalb der Stauchgrenze liegenden Knickspannungen niemals in Frage, da bei den Unregelmässigkeiten, wie sie bei einem Stab in einer Konstruktion immer vorhanden sind, die Labilität bei σ_a wohl kaum jemals überwunden werden wird, sondern immer zum Ausknicken führen dürfte. So wie übrigens ein Zugstab in einem statisch bestimmten Fachwerk sofort ganz unzulässige Formänderungen des Fachwerkes erzeugt, wenn er ins Flies-

sen kommt, gilt dies in gleicher Weise für Druckstäbe beim Erreichen der Stauchgrenze. Diese ist also für die Praxis die grösstmögliche Knickspannung.

In diesem Sinne halte ich die Engesser-Kármán'sche Theorie mit ihren nach $\lambda_k = 0$ verlaufenden Knickspannungen nach wie vor als die einzige für die praktische Berechnung in Frage kommende Theorie für den unelastischen Bereich. Was nun die Sicherheit anbelangt, so sollte diese eher im unelastischen Bereich grösser gewählt werden als im elastischen. Nicht nur, dass im unelastischen Bereich selbst kleinste Exzentrizitäten die Knickspannungen empfindlich herabdrücken, ist auch für manche vom Rechteck abweichende Querschnittsformen die Knickspannung im unelastischen Bereich etwas tiefer gelegen als für den Rechteckquerschnitt, für den allein die Knickspannungen ja berechnet werden. Ferner setzen tiefer liegende Stauchgrenzen die Knickspannungen im plastischen Bereich empfindlich herab.

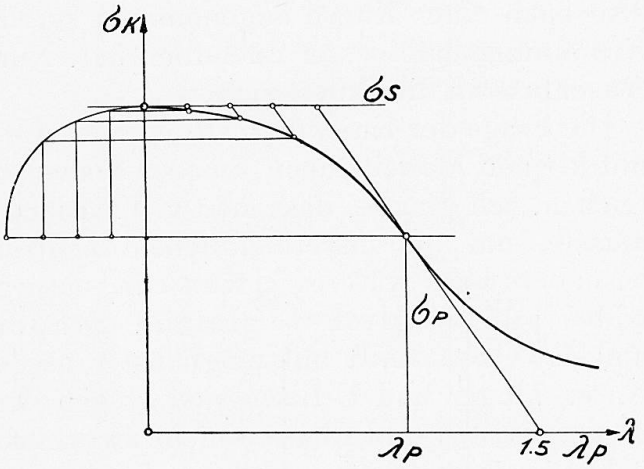

Fig. 5.

Eine andere Frage ist, welchen Verlauf der Arbeitslinie zwischen P- und S-Grenze man annehmen soll, da ja hievon der Verlauf der Knickspannungen sehr abhängig ist. Die Versuche des Deutschen Stahlbau-Verbandes hatten Baustähle zur Grundlage, bei denen die Arbeitslinie fast bis zur Stauchgrenze der Hook'schen Geraden folgte oder nur sehr wenig davon abwich. In einem solchen Falle liegen die Knickspannungen bis in unmittelbare Nähe der Stauchgrenze auf der Eulerkurve oder weichen nur wenig davon ab. Natürlich kommt dies auch bei Anwendung der Engesser-Kármán'schen Theorie zum Ausdruck. Es wäre daher wichtig zu wissen, ob die Arbeitslinie für Druck bei unseren Baustählen tatsächlich immer so verläuft und ob abweichende Ergebnisse, wie man sie bisher sehr häufig fand, nur für den Zugversuch gelten oder auf zu wenig genaue Durchführung des Druckversuches zurückzuführen sind.

Bis dahin würde ich empfehlen, die Linie der Knickspannungen vorsichtigerweise als Ellipse mit geneigt liegenden Hauptachsen einzutragen, die die Eulerkurve an der Stelle σ_P berührt und deren wagrechte Tangente in der Höhe der Stauchgrenze liegt mit der Berührung bei $\lambda = 0$. (Bild 5) Diese Ellipse lässt sich aus einem Viertelkreis sehr rasch entwickeln.

Für die Berührung der Eulerkurve braucht man die Tangente an diese im Punkt σ_P die man sofort ziehen kann, da die Subtangente der Eulerkurve gleich $\frac{\lambda}{2}$ ist.

Die Versuche des deutschen Stahlbau-Verbandes haben für Siliziumstahl höhere Knickspannungen ergeben als man auf Grund der betreffenden Arbeitslinie nach Engesser-Kármán erhalten würde. Dieses Ergebnis scheint mir aber

auf der sehr weit ausgebildeten Anwendung von Hebelarmen zu beruhen, die in günstigster Weise der unvermeidlichen kleinen Krümmung der Stäbe entgegengesetzt wurden und dürfte mindestens vorläufig für die Praxis nicht verwendet werden.

Es sei noch bemerkt, dass die scharfe Abzweigung der Engesser-Kármán-Linie von der Eulerkurve, die man manchmal bei willkürlicher Annahme einer idealen Arbeitslinie erhält, darauf zurückzuführen ist, dass im Knickmodul $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ enthalten ist. Wenn daher in der Arbeitslinie in der zweiten Ableitung (Krümmungshalbmesser) eine Unstetigkeit vorhanden ist, dann ist in der Linie der Knickspannungen die Unstetigkeit schon in der ersten Ableitung gegeben, und man erhält eine Abzweigung mit einem scharfen Knick. Die Abweichung der Arbeitslinie von der Hook'schen Geraden muss also nach einer Kurve angenommen werden, die im Abzweigungspunkt den Krümmungshalbmesser unendlich hat. Nur dann erhält man einen knickfreien Anschluss an die Eulerkurve.

Die Frage der Knickung ist gegenwärtig schon so zugespitzt, dass Versuche mit kleinen Modellstäben, wie sie bisher verwendet wurden, nicht mehr ausreichen. Ich glaube, dass man viel stärkere Querschnitte als bisher verwenden müsste, um die unvermeidlichen Zentrierungsfehler herabzusetzen. Ganz besonders aber wäre es erwünscht, naturgrosse genietete Stäbe zu drücken, wobei auf möglichst gleiche Stauchgrenze aller Teile zu sehen und der Querschnitt mit möglichst grossem Trägheitshalbmesser auszubilden wäre. Träger und U-Eisen sind wegen der starken Ungleichheit der Stauchgrenze in Steg und Flansch nicht zweckmässig.

Kastenquerschnitte, bestehend aus 4 genügend starken Platten und 4 gleichschenkeligen Winkeleisen dürften geeigneter sein, wobei die Nietschwächung unter 10 % bleiben müsste. Das Druck- Stauchungsdiagramm sollte dann nicht nur mit Proben aus den einzelnen Teilen, sondern auch mit 2 Endabschnitten des ganzen Profiles ermittelt werden, wobei es genügt, die Arbeitslinie bis zur Stauchgrenze zu bestimmen.

Traduction [1].

Au cours de ces dernières années et tout particulièrement assez récemment, des objections se sont élevées au sujet de la théorie du flambage telle qu'elle se présente actuellement. Tout dernièrement, certaines modifications ont été proposées. Il paraît donc indispensable de déterminer dans quelle mesure les résultats fournis par cette théorie peuvent être considérés comme sûrs.

1. — La formule d'Euler traduit d'une manière très juste les efforts de flambage, dans le domaine élastique, pour une barre rectiligne chargée axialement; ce point a été confirmé par de nombreux essais.

La conception rigoureuse de la théorie du flambage, appuyée en particulier sur l'équation différentielle du fléchissement, non simplifiée, établie tout

1. L'auteur ayant été empêché de présenter lui-même son Mémoire au Congrès de Paris, celui-ci a été lu par M. le Prof. Dr. L. Karner, Secrétaire général.