Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Discussion

Autor: Hartmann, Friedrich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-483

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

auf der sehr weit ausgebildeten Anwendung von Hebelarmen zu beruhen, die in günstigster Weise der unvermeidlichen kleinen Krümmung der Stäbe entgegengesetzt wurden und dürfte mindestens vorläufig für die Praxis nicht verwendet werden.

Es sei noch bemerkt, dass die scharfe Abzweigung der Engesser-Kármán-Linie von der Eulerkurve, die man manchmal bei willkürlicher Annahme einer idealen Arbeitslinie erhält, darauf zurückzuführen ist, dass im Knickmodul $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ enthalten ist. Wenn daher in der Arbeitslinie in der zweiten Ableitung (Krümmungshalbmesser) eine Unstetigkeit vorhanden ist, dann ist in der Linie der Knickspannungen die Unstetigkeit schon in der ersten Ableitung gegeben, und man erhält eine Abzweigung mit einem scharfen Knick. Die Abweichung der Arbeitslinie von der Hook'schen Geraden muss also nach einer Kurve angenommen werden, die im Abzweigungspunkt den Krümmungshalbmesser unendlich hat. Nur dann erhält man einen knickfreien Anschluss an die Eulerkurve.

Die Frage der Knickung ist gegenwärtig schon so zugespitzt, dass Versuche mit kleinen Modellstäben, wie sie bisher verwendet wurden, nicht mehr ausreichen. Ich glaube, dass man viel stärkere Querschnitte als bisher verwenden müsste, um die unvermeidlichen Zentrierungsfehler herabzusetzen. Ganz besonders aber wäre es erwünscht, naturgrosse genietete Stäbe zu drücken, wobei auf möglichst gleiche Stauchgrenze aller Teile zu sehen und der Querschnitt mit möglichst grossem Trägheitshalbmesser auszubilden wäre. Träger und U-Eisen sind wegen der starken Ungleichheit der Stauchgrenze in Steg und Flansch nicht zweckmässig.

Kastenquerschnitte, bestehend aus 4 genügend starken Platten und 4 gleichschenkeligen Winkeleisen dürften geeigneter sein, wobei die Nietschwächung unter 10 % bleiben müsste. Das Druck- Stauchungsdiagramm sollte dann nicht nur mit Proben aus den einzelnen Teilen, sondern auch mit 2 Endabschnitten des ganzen Profiles ermittelt werden, wobei es genügt, die Arbeitslinie bis zur Stauchgrenze zu bestimmen.

Traduction [1].

Au cours de ces dernières années et tout particulièrement assez récemment, des objections se sont élevées au sujet de la théorie du flambage telle qu'elle se présente actuellement. Tout dernièrement, certaines modifications ont été proposées. Il paraît donc indispensable de déterminer dans quelle mesure les résultats fournis par cette théorie peuvent être considérés comme sûrs.

1. — La formule d'Euler traduit d'une manière très juste les efforts de flambage, dans le domaine élastique, pour une barre rectiligne chargée axialement; ce point a été confirmé par de nombreux essais.

La conception rigoureuse de la théorie du flambage, appuyée en particulier sur l'équation différentielle du fléchissement, non simplifiée, établie tout

1. L'auteur ayant été empêché de présenter lui-même son Mémoire au Congrès de Paris, celui-ci a été lu par M. le Prof. Dr. L. Karner, Secrétaire général.

d'abord par Lagrange, précisée ensuite par Grasshof et développée enfin dans toute sa rigueur par Schneider [1] qui l'a également adaptée aux besoins d'ordre pratique, montre que la charge d'Euler ne doit pas être considérée à proprement parler comme représentant rigoureusement la charge de flambage, dans le sens d'une charge admissible, mais seulement comme une charge critique telle que lorsqu'elle est atteinte, l'état d'équilibre, qui était jusque là stable, cesse. La charge d'Euler peut très bien encore ne provoquer aucun fléchissement, un petit accroissement de cette charge étant encore nécessaire pour le provoquer. Sous l'influence de cet accroissement, la barre prend une nouvelle position d'équilibre stable, caractérisée par un fléchissement de son axe, ceci pour autant que les efforts dans les fibres périphériques ne dépassent pas la limite de proportionnalité σ_p. Il en résulte que le dépassement de la charge d'Euler peut être plus important pour des degrés de finesse élevés que pour des degrés de finesse plus faibles et qu'il est enfin nul à la limite de proportionnalité. La charge d'Euler constitue alors non seulement une charge critique, mais également la charge de flambage elle-même. On n'aura toutefois à envisager un dépassement notable de la charge d'Euler que pour des degrés de finesse très grands (barres élastiques, tés), tandis que pour les degrés de finesse couramment adoptés dans la construction, les possibilités de dépassement de la charge d'Euler sont très faibles, et cette considération n'intervient pratiquement pas. Dans la pratique, on peut donc toujours considérer la charge d'Euler comme charge de flambage, point de vue que l'expérience confirme.

2. — En ce qui concerne le domaine plastique, Engesser a établi en 1895 une formule toujours valable, en introduisant le module de flambage T [2]. La formule donnant T a été indiquée dans sa forme la plus générale ; elle est valable pour une section quelconque. Si dans le domaine élastique, la forme de la section n'exerce aucune influence sur la charge de flambage, par contre, il n'en est plus de même dans le domaine plastique. Malheureusement, à cette époque, Engesser ne disposait d'aucun diagramme convenable pour l'acier de construction ; il avait toutefois, dans une communication publiée antérieurement à cette date dans « Zeitschrift des Ing. und Arch. Vereines Hannover » de 1889, montré d'une manière parfaitement nette, la relation entre le diagramme et la courbe des contraintes de flambage, quoiqu'il ait d'ailleurs fait intervenir à cette époque la valeur inexacte

$$T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

pour le module de flambage. Il avait parfaitement reconnu l'importance de la limite de compression en tant que limite supérieure des contraintes de flambage et publié, dans son ouvrage « Zusatzkräfte und Nebenspannungen », dès 1892, un diagramme des efforts de flambage ; ce diagramme concorde presque parfaitement avec celui que les chemins de fer allemands emploient actuellement pour leurs calculs. Il semble que ces travaux d'Engesser aient peu attiré l'attention jusqu'à 1910, époque à laquelle Kármán les reprit, conduisant

1. Zeitschrift des österr. Ing. und Arch. Ver., 1901.
2. Schweizer. Bauzeitung, 1895, 27 juillet.

l'étude un peu plus loin ; ses travaux eurent d'ailleurs le même sort. Si ces formules ont toutefois réussi à pénétrer dans le domaine de la pratique, c'est précisément grâce aux essais que Kármán effectua avec une grande précision et qui confirment la théorie, pour les aciers de construction étudiés. Kármán a d'ailleurs eu le mérite de donner le premier la théorie de l'influence des petites excentricités. Il a pu ainsi montrer que, dans le domaine plastique, l'influence d'excentricités même très faibles est incomparablement plus forte que dans le domaine élastique.

Après avoir déterminé lui-même, par des essais, des diagrammes de compression précis, il a pu traduire pour la première fois, d'une manière théorique, la variation des contraintes de flambage considérées comme fonction dela finesse.

Ses travaux contiennent toutefois un point douteux et c'est précisément à ce sujet que des objections se sont élevées en particulier tout récemment (fig. 1).

Lorsque les contraintes de flambage se rapprochent de la limite de compression σ_s, la théorie d'Engesser-Kármán donne des degrés de finesse au flambage $\lambda_k = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_k}}$ de plus en plus petits et l'on finit par avoir :

$$\lambda = 0 \qquad \text{pour } \sigma_k = \sigma_s$$

en admettant que le diagramme vienne coïncider avec l'horizontale à la limite de compression ($T = 0$). Toutefois, après le dépassement de la zone de compression, le diagramme remonte à nouveau, ainsi que le degré de finesse. La courbe des contraintes de flambage donne donc une branche située au-dessus de σ_s et dont l'allure est indiquée par la figure 1. Il en résulte ce fait singulier que pour certains degrés de finesse λ_a on obtient trois contraintes de flambage différentes, ce qui constitue une impossibilité. Kármán n'a toutefois pas porté, dans le tracé des courbes des contraintes de flambage, la branche conduisant à $\lambda = 0$; il a par contre relié les branches situées au-dessous et au-dessus de la limite de compression par la ligne tracée en traits discontinus sur la figure 1 ; il obtient ainsi un tracé continu, qui n'est cependant pas exact dans la région qui correspond à la ligne en traits discontinus. Dans l'esprit de la théorie, seul peut être exact le tracé en traits pleins, avec la branche correspondant à $\lambda = 0$. Je crois toutefois pouvoir donner une explication de cette contradiction apparente suivant laquelle on obtient pour un λ_a donné trois valeurs différentes sur la courbe de σ_k.

Il importe tout d'abord de se rendre compte exactement de ce que représentent les contraintes de flambage σ_k. Ce ne sont que des charges critiques qui provoquent une modification de l'état d'équilibre, car Engesser et Kármán eux-mêmes en établissant leurs formules n'ont fait intervenir que des fléchissements infiniment petits. Il faut donc écarter tout fléchissement d'ordre fini.

Nous avons vu qu'à la limite de proportionnalité, la charge d'Euler est déjà égale à la charge de flambage (toujours dans le sens d'une charge admissible). Ce point est d'autant plus valable pour le domaine plastique, qui vient immédiatement après [1], tant que le diagramme présente une convexité vers le haut(fig. 2).

1. Voir Contribution du Professeur Chwalla à la Discussion.

Pour des fléchissements infiniment petits de la barre, ou à titre d'approximation, pour des fléchissements très petits, les contraintes de compression et flexion simultanées se confondent avec la tangente T au diagramme A. L'allongement de flexion ε_b doit donc être considéré également comme infiniment petit ou à titre d'approximation comme très petit ; en effet, pour un fléchissement fini, σ_b ne suit plus la tangente T, mais bien le diagramme A lui-même et comme ce diagramme passe au-dessous de la tangente T, on obtient, pour ainsi dire, un module de flambage plus petit que si la courbe suivait la tangente et par suite également un degré de finesse au flambage plus faible, ou, pour le degré initial de finesse au flambage, une charge admissible plus faible. On peut d'ailleurs arriver à ce même résultat par le calcul en partant d'une sinusoïde comme courbe de déformation.

Si, par contre, le diagramme se trouve au-dessus de la tangente T, comme c'est le cas au commencement de la zone d'écoulement, le module de flambage (dans le sens considéré) est plus élevé pour un fléchissement fini que pour un fléchissement infiniment petit, c'est-à-dire que le degré de finesse ou la charge admissible croît, pour un fléchissement fini, avec ce fléchissement, pour passer par un maximum (charge de flambage effective) et décroît à nouveau, ainsi que c'est le cas, rigoureusement, dans le domaine élastique ; toutefois, dans le domaine plastique, les différences entre la charge critique et la charge de flambage sont sensiblement plus importantes que dans le domaine élastique ; dans ce dernier domaine, en effet, on assimile ces différences aux différences très faibles entre les résultats tirés des équations différentielles exacte et simplifiée, tandis que dans le cas qui nous occupe on obtient des différences notables même avec la méthode courante de calcul (hypothèse d'une courbe sinusoïdale). Dans le domaine élastique, le diagramme est presque une droite et il se confond donc avec T. D'après ce que nous venons de voir, on obtient donc alors, pour des fléchissements finis, exactement la même charge admissible que pour des fléchissements infiniment petits, c'est-à-dire la charge d'Euler. On devrait toutefois, en toute rigueur, obtenir une charge admissible plus élevée. Ceci provient du fait que pour le calcul de la charge admissible, on a eu recours à la théorie courante de la flexion en adoptant l'équation simplifiée (fig. 3).

On peut maintenant expliquer le fait que l'on obtient trois valeurs de la charge de flambage pour un λ_a donné. La figure 3 représente la partie du diagramme qui se trouve à la limite de compression σ_s. Si la contrainte de flambage atteint la valeur σ_a, à laquelle correspond un degré de finesse au flambage $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_a}{\sigma_a}}$ la barre rectiligne ne conserve plus sa stabilité : elle fléchit. Comme toutefois le tracé d'Engesser-Kármán n'envisage pas les fléchissements finis, nous sommes dans l'obligation de les empêcher artificiellement. Si nous continuons à charger la barre, la tendance au déversement latéral augmentera encore, car effectivement à des charges de flambage croissantes correspond un degré de finesse de flambage de plus en plus petit. Pour $\sigma_k = \sigma_s$ la tendance au déversement latéral est maximum, pour diminuer toutefois ensuite, car à partir de ce moment, les λ_k croissent à nouveau, ainsi que le

montre la figure 1. On arrive finalement au point b, auquel correspond à nouveau le degré de finesse au flambage

$$\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_b}{\sigma_b}}$$

σ_b devient alors une tension critique, en ce sens que, ici, l'équilibre instable se transforme à nouveau en un équilibre stable. Mais si $\sigma_k = \sigma_b$, le diagramme se trouve déjà au-dessus de la tangente T et le fléchissement ne peut être maintenant provoqué que par une augmentation de la charge. On peut donc alors supprimer le dispositif de soutien de la barre, car cette dernière se trouve en état d'équilibre stable. Ce fait doit être évidemment attribué au fait que la barre a cédé dans l'intervalle, après avoir traversé la zone de compression et au mouvement vers le haut qui en est résulté pour le diagramme.

L'équilibre étant devenu stable pour σ_b, on doit évidemment pouvoir faire croître à nouveau la charge ; ceci est possible jusqu'à ce que l'on atteigne le point c avec une contrainte de flambage σ_c, à laquelle correspond à nouveau le degré de finesse au flambage $\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{T_c}{\sigma_c}}$

Maintenant, toutefois, la charge critique est également charge de flambage, car le diagramme passe au-dessous de la tangente T. La possibilité de résistance de la barre est maintenant définitivement épuisée.

Ces considérations ont été confirmées par les essais de Kármán, essais dans lesquels se manifeste une instabilité lorsque la limite de compression est atteinte ; suivant la propre expression de Kármán, d'ailleurs, la barre domine cette instabilité et arrive à pouvoir supporter une charge plus élevée. Donc, dans les essais de Kármán, l'appui latéral de soutien de la barre ne s'est nullement montré nécessaire. Ceci doit être attribué au fait que les différents points d'une barre accusent des limites de compression différentes. A un endroit donné, le phénomène d'écoulement commence donc à se manifester, tandis qu'en un autre point, on en arrive déjà à la période de reprise des possibilités de charge. L'écartement entre a et b dans la figure 1 est en réalité si faible que les variations du niveau atteint par la limite de compression sont vraisemblablement, dans la plupart des cas, supérieures aux nécessités de la stabilité. Dans le cas particulier que constituent les essais de Kármán, il convient en outre de remarquer que l'acier employé par lui possédait une zone de compression extrêmement faible. On trouvera dans la figure 4 le diagramme de l'acier de Kármán comparé avec le diagramme de l'acier de construction normal St. 37. De cette comparaison on peut encore tirer une autre conclusion. Au cours des essais qui ont été effectués par le Deutscher Stahlbau-Verband, et qui se sont étendus jusqu'à $\lambda_{min} = 20$, aucun accroissement des contraintes de flambage ne s'est produit au-dessus de la limite de compression, alors que dans les essais de Kármán, pour $\lambda = 30$, les contraintes de flambage étaient montées substantiellement au-dessus de σ_s. Ce fait constitue également une raison pour avoir quelque doute au sujet de l'exactitude des essais de Kármán. L'accroissement des contraintes de flambage dépend uniquement de l'allure du diagramme dans la zone de reprise des possibilités

de charge. Plus la montée du diagramme est rapide, plus les degrés d'élancement λ (finesse) correspondants sont élevés. On constate toutefois, sur la figure 4, que dans le diagramme de Kármán, la montée de la courbe, après passage à la limite de compression, est très rapide, ce qui n'est pas le cas pour les autres sortes d'aciers. Sur le diagramme ici tracé pour l'acier St. 37, on n'obtient des contraintes de flambage croissantes que pour $\lambda = 15$.

Je crois avoir ainsi exposé toutes les objections qui s'élèvent contre les singularités d'allure du diagramme des contraintes de flambage. Dans la pratique, par ailleurs, on n'a jamais à prendre en considération les contraintes de flambage qui se trouvent au-dessus de la limite de compression ; étant donné le manque d'homogénéité que l'on rencontre toujours dans les éléments utilisés dans la construction, on n'arrive presque jamais à surmonter l'instabilité correspondant à σ_a mais toujours au flambage. Dans un treillis statiquement déterminé, il se produit immédiatement des déformations absolument inadmissibles, dès qu'un élément travaillant à la traction atteint l'état d'écoulement ; il en est de même pour les éléments travaillant à la compression lorsqu'ils atteignent la limite de compression. Cette dernière constitue donc, dans la pratique, la limite extrême des contraintes de flambage.

Dans cet esprit, je considère toujours la théorie de Kármán-Engesser, avec les contraintes de flambage tendant vers $\lambda_k = \infty 0$, comme la seule théorie dont l'emploi puisse être envisagé pour les calculs de la pratique, dans le domaine plastique. En ce qui concerne la sécurité, il convient d'adopter une valeur plutôt plus élevée, dans ce domaine plastique, que dans le domaine élastique. D'une part, en effet, dans le domaine plastique, les plus petites excentricités diminuent d'une manière sensible les charges de flambage ; il en résulte que pour de nombreuses formes de sections qui s'écartent du rectangle, la charge de flambage est quelque peu inférieure à celle qui correspond à la section rectangulaire elle-même, pour laquelle seule les calculs de flambage ont été effectués. D'autre part, les limites de compression plus faibles réduisent également les charges de flambage dans le domaine plastique.

Une question se pose encore ; c'est de savoir quel tracé il convient d'admettre pour le diagramme, entre la limite de proportionnalité et la limite de compression, car de ce tracé dépend étroitement celui de la courbe des charges de flambage. Les essais du Deutscher Stahlbau-Verband ont porté sur les aciers de construction dans lesquels le diagramme suit la loi de Hook presque jusqu'à la limite de compression, ou tout au moins ne s'en écarte que très peu. Dans ces conditions, les charges de flambage se trouvent sur la courbe d'Euler jusqu'au voisinage immédiat de la limite de compression, ou ne s'en écartent également que très peu. Ces considérations s'appliquent évidemment aussi lorsque l'on fait appel à la théorie d'Engesser-Kármán. Il serait donc intéressant de savoir si le diagramme de compression de nos aciers de construction a un tracé semblable ou si les écarts que l'on a pu constater très fréquemment jusqu'à maintenant ne sont à prendre en considération que pour l'essai de traction, à moins qu'il ne faille les attribuer à un manque de précision dans l'exécution des essais de compression.

Dans l'expectative, j'estime qu'il conviendrait de considérer la courbe des charges de flambage comme une ellipse ayant ses axes principaux inclinés,

tangente à la courbe d'Euler au point σ_p et dont la tangente horizontale se trouve au niveau de la limite de compression, le point de tangence correspondant à $\lambda_k = \infty$ O (figure 5). Cette ellipse peut être déduite très rapidement d'un quart de cercle (figure 5).

Pour déterminer la tangence à la courbe d'Euler, on part de la tangente à cette courbe au point σ_p, tangente que l'on peut tracer immédiatement, puisque la sous-tangente est égale à $\lambda/2$.

Les essais effectués par le Deutscher Stahlbau-Verband pour l'acier au silicium ont conduit à des charges de flambage plus élevées que celles que l'on aurait pu déduire du diagramme correspondant d'après Engesser-Kármán. Ce résultat me semble toutefois devoir être attribué à l'emploi très large de bras de levier s'opposant dans les conditions les plus favorables aux petites courbures inévitables dans les barres; il conviendrait donc de ne pas en tenir compte dans la pratiqne, tout au moins provisoirement.

Il faut encore remarquer que l'écart important entre le diagramme d'Engesser-Kármán et la courbe d'Euler, que l'on obtient souvent, en partant d'un diagramme théorique, est dû à l'introduction de $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ dans le module de flambage. Par suite, s'il existe une scission dans la deuxième partie du diagramme (rayon de courbure), cette scission existe déjà dans la première partie de la courbe des charges de flambage et la bifurcation présente un coude brusque. Cette scission entre le diagramme et la loi de Hook doit donc être considérée comme une courbe ayant un rayon de courbure infini au point de raccordement. Dans ces conditions seulement, on obtient un raccordement sans coude brusque sur la courbe d'Euler.

La question du flambage a fait l'objet d'études déjà assez poussées pour que les essais que l'on a effectués jusqu'à maintenant avec des barres d'essai de dimensions réduites soient devenus insuffisants. Je pense que l'on devrait faire porter les essais sur des sections beaucoup plus importantes si l'on veut pouvoir réduire l'importance des erreurs de centrage que l'on ne peut pas éviter. Il serait particulièrement désirable que l'on fasse subir des essais de compression à des éléments rivés en grandeur naturelle, dans lesquels on s'efforcerait, dans toute la mesure du possible, d'avoir des limites de compression identiques pour toutes les pièces et des sections possédant un rayon d'inertie aussi élevé que possible. Il ne serait pas judicieux de choisir pour ces essais des poutres ou des fers à U, à cause des inégalités très marquées de la limite de compression dans les âmes et dans les ailes. Des sections en caisson, constituées par quatre éléments suffisamment résistants et quatre cornières à ailes égales seraient plus indiquées, l'affaiblissement dû au rivetage devant toutefois rester inférieur à 10 %. La détermination du diagramme de compression devrait d'ailleurs être effectuée non seulement sur des éprouvettes prélevées sur les pièces des assemblages mais également sur deux assemblages complets, étant entendu qu'il suffit de pousser le tracé de ce diagramme jusqu'à la limite de compression.