Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Artikel: Die Dämpfung von Brückenschwingungen

Autor: Friedrich, Erich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5018

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AI 2

Die Dämpfung von Brückenschwingungen

The damping of oscillations in bridges

L'amortissement des oscillations des ponts

PROF. DR. TECHN. DIPL. ING. ERICH FRIEDRICH
Vorstand der Lehrkanzel für Betonbau an der Universität für Technische Wissenschaften in Graz, Österreich.

EINLEITUNG

Durch das Bestreben immer leichter und kühner zu bauen, wird es auch im Betonbau erforderlich, das Bauwerk unter den Verkehrsbelastungen nicht mehr als statisch ruhend zu betrachten, sondern den Einfluss der bewegten Belastung zu berücksichtigen. Der alte Grundsatz, dass, je schwerer gebaut wird, um so sicherer das Bauwerk ist, gilt nicht mehr. Wir kommen dazu, auch im Betonbau unliebsame dynamische Einflüsse zu ergründen und, wenn erforderlich, ihnen durch bauliche Massnahmen entgegenzutreten. Die gesamte Frage der Sicherheit von Bauwerken, die Frage der Einführung eines *n*-freien Bemessungsverfahrens und die Frage, wie man zweckmässig bestehende Bauten auf ihre Tragfähigkeit untersucht, kann durch die Betrachtung des Bauwerkes als dynamisches Gebilde in viel umfassenderer Weise beantwortet werden. Der Bauingenieur wird hier vielfach die bereits im Maschinenbau gewonnenen Erfahrungen und Erkenntnisse für seine Bedürfnisse umformen und anwenden können.* Im nachfolgenden wird auf eine dieser Fragen eingegangen, wobei die bei dynamischen Untersuchungen bereits bekannten Verfahren auf das Gebiet des Brückenbaues übertragen und dem Bauingenieur erschlossen werden sollen. Bei einem Maschinenfundament hat man es in der Regel mit einer gleichbleibenden Schwingungszahl zu tun. Im Brückenbau hingegen wird das Bauwerk von Fahrzeugen mit verschiedener Belastung und verschiedenen Schwingungszahlen befahren, so dass man darauf Rücksicht nehmen und die Untersuchungen auf veränderliche Schwingungszahlen ausdehnen muss.

Bei einer bestehenden Brücke in Villach traten unter der Verkehrsbelastung erhebliche Schwingungen auf. Man hatte daraufhin die Verkehrsbelastung beschränkt und die Geschwindigkeit, mit der die Brücke befahren wird, herabgesetzt. Beide Massnahmen störten empfindlich den gesamten Verkehr und wirkten sich

* I. P. Den Hartog, *Mechanische Schwingungen.* Deutsche Bearbeitung von Dr. Gustav Mesmer Julius Springer, Berlin, 1936.

vielfach nachteilig aus. So hatte die Beschränkung der Geschwindigkeit zur Folge, dass die Brücke ständig mit der vollen Verkehrslast belastet war, weil sich die Kraftwagen auf der Brücke zusammendrängten. Auch die Beschränkung der Höchstbelastung wirkte sich nachteilig auf den gesamten Verkehr aus. Ausserdem ist es praktisch unmöglich, bei dem stets zunehmenden Verkehr diese Beschränkung aufrechtzuerhalten.

Zunächst ist die Frage interessant, welche Schwingungen von den Kraftwagentypen auf die Brücke ausgeübt werden. Bei der Brücke in Villach handelt es sich um ein Bauwerk, das wohl statisch einwandfrei ist, aber mit der Eigenschwingungszahl gerade in dem Bereich der von den Fahrzeugen ausgeübten Schwingungen liegt, sodass die Brücke stets Resonanzschwingungen ausführt.

Vom Institut für Kraftfahrzeugbau an der Technischen Hochschule in Graz wurden für einige Fahrzeugtypen folgende Schwingungszahlen angegeben. Im Mittel schwanken die Schwingungen von Fahrzeugfedern zwischen 0,9 und 2,30 Hertz.

TAFEL I

Ausgeübte Schwingungen in Hertz

Fahrzeugtype	Belastung	Vorderfeder	Hinterfeder
Steyr 220	ohne Nutzlast	1,85	2,30
Steyr 220	100 kg. (1 Person)	—	2,03
Steyr 220	400 kg. (4 Personen)	—	1,62
Fiat Topolino	ohne Nutzlast	1,77	2,23
Fiat Topolino	3 Personen	2,70	1,67
Fiat 1100	ohne Nutzlast	1,40	1,42
Fiat 1100	6 Personen	1,27	1,29

Durch den Marschtritt werden etwa 2,2 Hertz ausgeübt. Der Einfluss der Unebenheiten der Fahrbahn verursacht beim Befahren ebenfalls Schwingungen. Um auch hier Anhaltspunkte zu gewinnen, sei folgendes mitgeteilt: Bei Fahrbahnen mit Kopfsteinpflaster ist der mittlere Abstand der Höcker $a=10\div15$ cm., bei Fahrbahnen mit Schlaglöchern beträgt der Abstand der Schlaglöcher rd. $50\div100$ cm. Bei Landstrassen ist der Abstand der Höcker rd. $20\div400$ cm. Man kann auch hieraus auf die Stösse schliessen, die ein Fahrzeug auf die Fahrbahn ausübt.

$$f\,(\text{Hertz})=\frac{V\,(\text{km./h.})}{3{,}6a\,(\text{m.})}$$

Bei einer Geschwindigkeit z.B. von $V=16$ km./h. ergibt sich hieraus bei einer Höckerentfernung von rd. 1 m. eine Schwingungszahl von rund 5 Hertz. Die Frage, die gestellt wird, ist die, ob es möglich ist, durch einen Einbau die Schwingungen für die Brücke unschädlich zu machen, und weiter, wie dieser Schwingungsdämpfer aussehen muss.

DIE EIGENSCHWINGUNG VON BRÜCKEN

Für einen frei aufliegenden Träger mit der Elastizitätszahl E, dem Trägheitsmoment J und der Stützweite l ergibt sich bei konstanter Masse μ je Längeneinheit die Eigenschwingungszahl (Abb. 1).

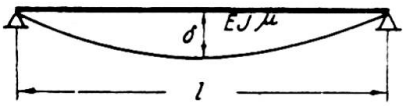


Abb. 1

$$\omega=\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die Schwingungsdauer T, das ist die Zeit, die der Träger braucht um von einer Lage ausgehend wieder in die gleiche Lage zurückzukehren, ist mit ω durch folgende Gleichung gegeben.

$$T \cdot \omega = 2\pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Zahl der Schwingungen in einer Sekunde (Hertz genannt) beträgt:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, genügt es, an Stelle des wirklichen Systems einen einfachen Schwinger zu betrachten (Abb. 2). Ein einfacher Schwinger besteht aus einer Feder mit der Federkonstanten c und einer darunter angehängten Masse m. Die Federkonstante c ist jene Kraft, die erforderlich ist, um die Feder um 1 cm. zu verlängern. Wird die Masse aus der Ruhelage gebracht, indem an der Masse m nach abwärts gezogen wird, und wird die Feder losgelassen, so schwingt das System mit der Eigenschwingungszahl

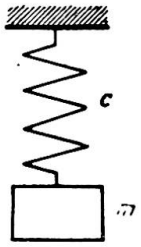


Abb. 2

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Bei einem Träger ist die statische Durchbiegung δ in Feldmitte bei gleichmässiger Lastverteilung $G = mg$ ($g = 981$ cm./sec.^{2} = Erdbeschleunigung) gegeben. Die Federkonstante ist daher

$$c = \frac{mg}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

oder

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\delta}} \doteq \frac{10 \cdot \pi}{\sqrt{\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{\sqrt{\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Die statische Durchbiegung des Trägers unter der gegebenen Massenverteilung ist daher ein Mass für die Eigenschwingungszahl des Trägers.

Man sollte in Hinkunft in die Brückenbestimmungen eine Vorschrift aufnehmen, die die Eigenschwingungszahl beschränkt. Damit würde allerdings die Durchbiegung unabhängig von der Stützweite beschränkt werden. Wenn nun eine Brücke mit der Eigenschwingungszahl in der Nähe der durch den Verkehr auftretenden Schwingungen liegt, so können die durch die Resonanz bedingten grossen Verformungen die Tragfähigkeit der Brücke wesentlich herabsetzen. Die statische Durchbiegung δ_{st} ist mit einem Vergrösserungsfaktor

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

zu multiplizieren, um die unter der Verkehrslast auftretenden Verformungen zu erhalten. In dieser Gleichung ist Ω die durch den Verkehr hervorgerufene Schwingungszahl und ω die Eigenschwingungszahl. Wird $\Omega/\omega = 1$ so wird $\mathfrak{V} = \infty$. Eine Abminderung dieses Faktors bekommt man durch die Dämpfung D.

Setzt man die Dämpfung proportional der Geschwindigkeit, so lautet für das Ersatzsystem (Abb. 2) die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Als Dämpfung bezeichnet man

$$D=\frac{k}{2\sqrt{cm}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bei einer Dämpfung ist die Vergrösserungsfunktion für die Durchbiegung

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+4D^2\frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

An Hand von ausgeführten Versuchen, über die Oberregierungsbaurat Arthur Lämmlein berichtet,* kann man sich ein Bild über den Dämpfungsfaktor machen. In der nachfolgenden Tafel II ist für den Resonanzfall die Vergrösserungsfunktion ermittelt.

TAFEL II

Nr.	Name	Bauweise	Dämpfung	Vergrösserungs-faktor	Eigen-schwingungs-zahl in Hz.
1	Bleibachbrücke	Spannbeton	0,014	35,7	4,25
2	Brücke bei Emmendingen	Spannbeton	0,008	125	3,14
3	Brücke Oberhausen	Verbund	0,0065	154	6,88
4	Hügelsheim	Stahlbeton-platte	0,1213	8,2	10,60

Man erkennt aus diesen Zahlen, dass bei Resonanz Werte auftreten können, die für die Brücke ausserordentlich bedenklich sind. Auch bei der Brücke in Villach ist die Dämpfung der Brücke selbst gering. Der Wert D liegt bei 0,010, sodass der Vergrösserungsfaktor rd. 100 ist. Um diese Brücke zu beruhigen, wird ein Dämpfungsträger vorgeschlagen, der nun berechnet und beschrieben wird.

DIE DÄMPFUNG EINER BRÜCKE

Beschreibung der Konstruktion

Zunächst soll an Hand der Systemskizze Abb. 3 der Gedanke der Dämpfung erläutert werden. Unter dem Brückentragwerk I befindet sich ein Träger II, der

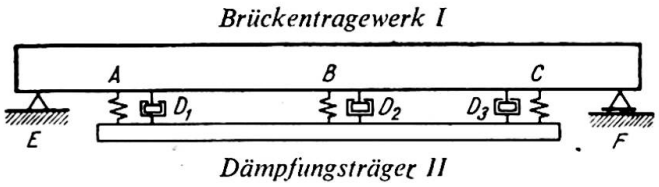


Abb. 3

Dämpfungsträger genannt wird. Dieser Dämpfungsträger II ist an drei Federn A, B, C mit dem Hauptträger verbunden. Zwischen den beiden Trägern sind ausserdem Flüssigkeitsdämpfer D eingebaut. Natürlich befindet sich der Dämpfungsträger II mit den Einbauten bei dem tatsächlichen Bauwerk nicht unterhalb des Hauptträgers, sondern zwischen den Hauptträgern und ist nicht sichtbar. Der Dämpfungsträger hat $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers.

* Arthur Lämmlein, "Schwingungsmessungen an Strassenbrücken verschiedener Bauarten," *Beton und Stahlbeton*, Heft 5, 1951.

Die Wirkungsweise des Einbaues des Dämpfungsträgers zeigt Abb. 4. Als Ordinate ist die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ und als Abszisse das Verhältnis der aufgezwungenen Schwingung zur Eigenschwingung aufgetragen. Die Vergrösserungsfunktion nimmt höchstens den Wert 4,6 an. Bis zu einer Vergrösserungsfunktion

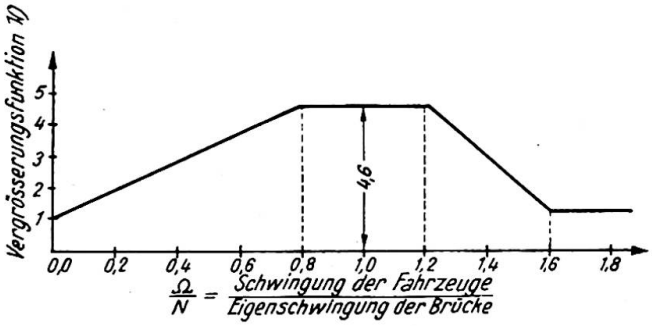


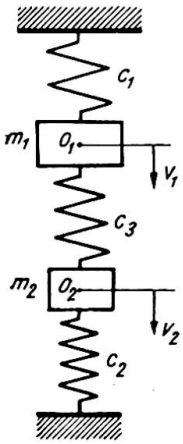
Abb. 4

von 5 kann man im allgemeinen damit rechnen, dass die dadurch hervorgerufenen Spannungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben. Die Flüssigkeitsdämpfer D_1, D_2, D_3 und die Federn sind leicht konstruierbar. Die nun beschriebene Wirkungsweise und der Zusammenhang zwischen den einzelnen Grössen soll nun erörtert werden.

*Ableitung der Gleichung**

Die Ableitung der Differentialgleichung ist in mehreren Schritten möglich. An Stelle des wirklichen Systems wird das Ersatzschwingsystem untersucht.

Abb. 5



1. *Schritt.* Zwei Massen m_1 und m_2 sind mit zwei Federn c_1 und c_2 mit der Decke und Fussboden verbunden (Abb. 5). Zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 befindet sich eine Feder c_3. Die Ruhelage sei durch die beiden Punkte O_1 und O_2 gekennzeichnet. Die Bewegungsgleichung ist aufzustellen. Wenn die Masse m_1 sich nach unten bewegt, zieht die Kraft $c_1 v_1$ die Masse zurück. Die Zusammendrückung der mittleren Feder ist $v_1 - v_2$. Die Kraft, die dadurch ausgeübt wird, ist $c_3(v_1 - v_2)$. Die Bewegungsgleichung lautet (Abb. 6)

$$m\ddot{v}_1 = -c_1 v_1 - c_3(v_1 - v_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ebenso kann man eine entsprechende Gleichung für die Masse m_2 aufstellen. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{v}_1 + (c_1 + c_3)v_1 - c_3 v_2 = 0 \\ m_2\ddot{v}_2 + (c_2 + c_3)v_2 - c_3 v_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

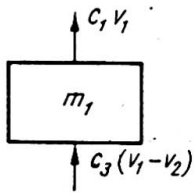


Abb. 6

Wir stellen uns nun folgende Frage: Gibt es eine harmonische Bewegung dieses Systems und wie gross sind die Ausschläge a_1 und a_2 der Massen m_1 bzw. m_2? Welche Schwingungszahl liefert eine harmonische Bewegung?

Wir machen also für die Bewegung die Ansätze:

$$\left.\begin{aligned} v_1 = a_1 \sin \omega t \\ v_2 = a_2 \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

* Den Hartog, Seite 77.

und bestimmen die Ableitungen nach der Zeit. Setzt man diese Werte in die Bewegungsgleichung (13) ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} a_1(-m_1\omega^2+c_1+c_3)-a_2c_3&=0 \\ -a_1c_3+a_2(-m_2\omega^2+c_2+c_3)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Aus der ersten Gleichung von (15) kann man den Wert a_1/a_2 und aus der zweiten Gleichung kann man ebenfalls das Verhältnis ausrechnen. Wenn es eine Lösung gibt, müssen beide Werte einander gleich sein. Man erhält auf diese Weise eine Gleichung für die Eigenschwingungszahl ω, die lautet:

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{c_1+c_3}{m_1}+\frac{c_2+c_3}{m_2}\right]+\frac{c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3}{m_1m_2}=0 \quad \ldots \quad (16)$$

Es gibt zwei Lösungen $\omega_1{}^2$ und $\omega_2{}^2$ für die eine harmonische Bewegung möglich ist.

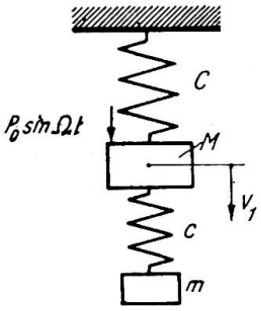


Abb. 7

2. *Schritt.* Nun soll die Aufgabestellung etwas abgeändert werden. Auf die Brücke mit der Masse M (Abb. 7) soll durch die Verkehrsbelastung eine harmonische Kraft $P=P_0 \sin \Omega t$ aufgebracht werden. An der Brücke sei ein zweiter Träger mit der Masse m und der Federkonstante c befestigt. Die Frage lautet: welche Schwingung führt dieses System aus? Man bekommt die Bewegungsgleichungen, indem man in den Gleichungen (13) den Wert $c_2=0$ setzt und in der ersten Gleichung die aufgezwungene Schwingung berücksichtigt.

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{v}_1+(C+c)v_1-cv_2&=P_0 \sin \Omega t \\ m\ddot{v}_2+c(v_2-v_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

Setzen wir $v_1=a_1 \sin \Omega t$ und $v_2=a_2 \sin \Omega t$ ein, so erhält man für jene aufgezwungene Schwingungszahl Ω eine harmonische Schwingung, für die folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} a_1(-M\Omega^2+C+c)-ca_2&=P_0 \\ -a_1c+a_2(-m\Omega^2+c)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Man setzt in dieser Gleichungsgruppe die Eigenschwingungszahl der Brücke $N=\sqrt{C/M}$, die Eigenschwingungszahl des Dämpfers $\nu=\sqrt{c/m}$ und das Verhältnis der Masse des Dämpfers zu der der Brücke, $\mu=m/M$, ein. Die Durchbiegung der Brücke unter der Last P_0 sei $\delta_{st}=P_0/C$.

Man erhält aus der Gleichungsgruppe (18)

$$\left.\begin{aligned} a_1\left(1+\frac{c}{C}-\frac{\Omega^2}{N^2}\right)-\frac{c}{C}a_2&=\delta_{st} \\ a_1=a_2\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)& \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{\delta_{st}}&=\frac{1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}}{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\dfrac{c}{C}-\dfrac{\Omega^2}{N^2}\right)-\dfrac{c}{C}} \\ \frac{a_2}{\delta_{st}}&=\frac{1}{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\dfrac{c}{C}-\dfrac{\Omega^2}{N^2}\right)-\dfrac{c}{C}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Aus der ersten Gleichung bekommt man $a_1=0$, wenn $\Omega=\nu$ wird. Die Brücke bleibt dann in Ruhe, wenn die Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers gleich der aufgezwungenen Schwingung Ω wird. Die Schwingung des Dämpfungsträgers wird

$$a_2=-\delta_{st}\frac{C}{c}=-\frac{P_0}{C}\cdot\frac{C}{c}=-\frac{P_0}{c}$$

Setzt man noch $\nu=N$, d.h. die Eigenschwingungszahl der Brücke gleich der Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers, so wird

$$\frac{c}{m}=\frac{C}{M} \text{ oder } \frac{c}{C}=\frac{m}{M}=\mu$$

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\delta_{st}\,.\,\sin(\Omega t)\frac{1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}}{\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu}\\ v_2&=\delta_{st}\,.\,\sin(\Omega t)\frac{1}{\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(21)$$

Fragen wir noch, ob es eine Resonanzschwingung gibt. Resonanz ist dann vorhanden, wenn die beiden Werte v_1 und v_2 für eine bestimmte aufgezwungene Schwingung unendlich werden. Dies ist der Fall, wenn der Nenner in den beiden Gleichungen (21) null wird.

$$\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)-\mu=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(22)$$

Setzt man $\frac{\Omega^2}{\nu^2}=\Phi$, so wird: $\Phi^2-2\Phi\left(1+\frac{\mu}{2}\right)+1=0$

Woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=1+\frac{\mu}{2}+\sqrt{\mu+\frac{\mu^2}{4}}\\ \Phi_2&=1+\frac{\mu}{2}-\sqrt{\mu+\frac{\mu^2}{4}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(23)$$

Wenn $\mu=0{,}10$ angenommen wird, so erhält man folgendes Ergebnis:

$$\Phi_1=1{,}38,\qquad \Phi_2=0{,}73$$

Durch den Dämpfungsträger wurde also folgendes erreicht:

(*a*) Bei einer aufgezwungenen Schwingung, die der Eigenschwingung der Brücke gleich ist, bleibt die Brücke in Ruhe. Für diesen Fall hat der Dämpfungsträger eine Bedeutung.

(*b*) Dafür ist aber bei einer Schwingung, die 27% unter und 38% über der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers liegt, eine Resonanz vorhanden.

Hätte man nur eine einzige Schwingungszahl, so könnte man in einfacher Weise durch den Dämpfungsträger erreichen, dass der Brückenträger in Ruhe bleibt. Da aber die Schwingungszahl der aufgebrachten Schwingung sehr veränderlich ist, muss noch eine Dämpfung eingebaut werden, wodurch die in Abb. 4 dargestellte Wirkung erreicht wird.

3. *Schritt.* Wenn nun zwischen Brückentragwerk und Dämpfungsträger ein Flüssigkeitsdämpfer eingeschaltet wird, lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} M\,.\,\ddot{v}_1+Cv_1+c(v_1-v_2)+k(\dot{v}_1-\dot{v}_2)&=P_0\,.\,\sin\Omega t \\ m\ddot{v}_2+c(v_2-v_1)+k(\dot{v}_2-\dot{v}_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

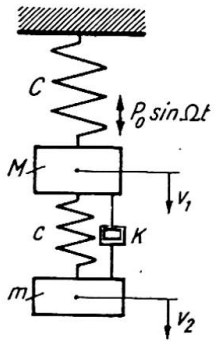


Abb. 8

Versucht man nun die Lösung mit dem Ansatz:

$$v_1=a_1\,.\,e^{i\Omega t} \qquad v_2=a_2\,.\,e^{i\Omega t}$$

so erhält man:

$$\dot{v}_1=a_1\,.\,i\Omega\,.\,e^{i\Omega t} \qquad \ddot{v}_1=-a_1\,.\,\Omega^2\,.\,e^{i\Omega t}$$

$$\dot{v}_2=a_2\,.\,i\Omega\,.\,e^{i\Omega t} \qquad \ddot{v}_2=-a_2\,.\,\Omega^2\,.\,e^{i\Omega t}$$

Diese Werte in die Gleichung (24) eingesetzt ergeben

$$\left.\begin{aligned} -Ma_1\Omega^2+Ca_1+c(a_1-a_2)+ik\Omega(a_1-a_2)&=P_0 \\ -m\Omega^2a_2+c(a_2-a_1)+ik\Omega(a_2-a_1)&=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (25)$$

In den Gleichungen (25) sind a_1 und a_2 unbekannt. Rechnet man sich den Wert a_1 aus, so erhält man:

$$a_1=P_0\frac{(c-m\Omega^2)+i\Omega k}{[(-M\Omega^2+C)(-m\Omega^2+c)-m\Omega^2c]+i\Omega k[-M\Omega^2+C-m\Omega^2]} \quad . \; . \quad (26)$$

Nun kann man hier die komplexen Grössen durch die reellen Werte ausrechnen:

$$a_1{}^2=P_0{}^2\frac{(c-m\Omega^2)^2+\Omega^2k^2}{[(-M\Omega^2+C)(-m\Omega^2+c)-m\Omega^2c]^2+\Omega^2k^2[-M\Omega^2+C-m\Omega^2]^2} \quad . \quad (27)$$

Setzt man noch die Eigenschwingungszahl der Brücke $N^2=C/M$, die Eigenschwingungszahl des Dämpfungsträgers $\nu^2=c/m$, die Durchbiegung der Brücke unter der Last P_0 gleich δ_{st}, sodass $\delta_{st}=P_0/C$ wird, ferner das Verhältnis der Eigenfrequenz des Dämpfungsträgers zu dem der Brücke $\psi=\nu/N$ und die Dämpfungszahl $D=k/2mN$, das Verhältnis der Masse des Dämpfungsträgers zu der der Brücke $\mu=m/M$ und das Verhältnis der Schwingungszahl der aufgezwungenen Schwingung zur Eigenschwingungszahl der Brücke $\zeta=\Omega/N$, so wird:

$$a_1=\delta_{st}\,.\sqrt{\frac{(2D\zeta)^2+(\zeta^2-\psi^2)^2}{(2D\zeta)^2(\zeta^2-1+\mu\zeta^2)^2+[\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)]^2}} \quad . \; . \quad (28)$$

Dies ist die Gleichung, die die Vergrösserungsfunktion für die statische Auslenkung angibt:

$$\mathfrak{V}=\pm\sqrt{\frac{(2D\zeta)^2+(\zeta^2-\psi^2)^2}{(2D\zeta)^2(\zeta^2-1+\mu\zeta^2)^2+[\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)]^2}} \quad . \; . \; . \quad (29)$$

In der beifolgenden Tafel III sind die Zahlenwerte für verschiedene Dämpfungen D angegeben. Die Abb. 9 zeigt das Ergebnis. Setzt man die Dämpfung $D=0$, so erhält man

$$\mathfrak{V}=\pm\frac{\zeta^2-\psi^2}{\mu\psi^2\zeta^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

TAFEL III

Vergrösserungsfaktor $\mathfrak{V}$

ζ	$D=0$	$D=0{,}10$	$D=0{,}16$	$D=0{,}20$	$D=\infty$
0,50	1,40	1,40	1,40	1,39	1,38
0,60	1,73	1,73	1,72	1,72	1,65
0,70	2,56	2,50	2,42	2,38	2,17
0,80	13,10	4,97	4,10	3,87	3,38
0,82	30,20	5,23	4,44	4,24	3,84
0,84	6,00	4,92	4,70	4,62	4,47
0,86	2,25	3,84	4,50	4,75	5,37
0,88	0,99	3,15	4,29	4,82	6,75
0,90	0,25	2,71	4,06	4,82	9,17
0,92	0,27	2,49	3,90	4,77	14,48
0,94	0,71	2,46	3,82	4,73	35,70
0,96	1,13	2,56	3,84	4,72	72,75
0,98	1,58	2,78	3,97	4,73	17,70
1,00	2,10	3,18	4,10	4,75	10,00
1,02	2,76	3,57	4,32	4,75	6,92
1,04	3,72	4,16	4,50	4,66	5,27
1,06	5,29	4,85	4,62	4,51	4,23
1,08	8,55	5,52	4,60	4,27	3,53
1,10	19,72	5,87	4,40	3,97	3,02
1,16	7,61	4,35	3,34	2,99	2,08
1,20	4,06	3,20	2,68	2,45	1,63
1,30	1,89	1,77	1,65	1,58	1,15

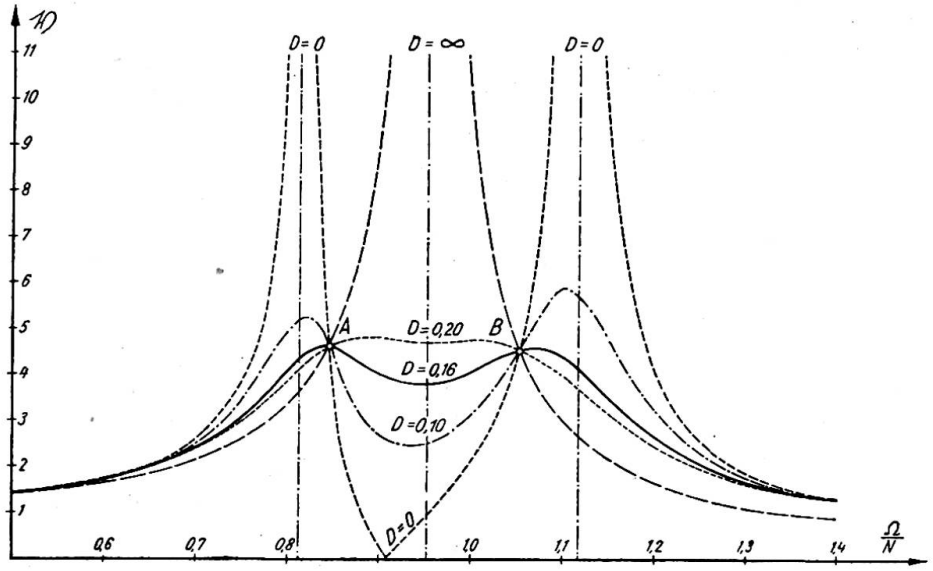


Abb. 9

Dieser Wert stimmt mit (20) inhaltlich überein. Für $D=\infty$ erhält man volle Verbindung der beiden Träger, also praktisch nur einen Träger mit der Masse $(M+m)$. In diesem Fall ist die Vergrösserungsfunktion

$$\mathfrak{V}=\frac{1}{1-(1+\mu)\zeta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Der Wert stimmt mit der Gleichung (8) überein.

Man kann nun die Gleichung (29) noch weiter untersuchen und die Frage stellen, ob es ζ-Werte gibt, die von der Dämpfung D unabhängig sind. Von der Dämpfung unabhängig wird der Ausdruck $\mathfrak{V}$ dann, wenn die Dämpfungszahl im Zähler und Nenner von (29) gekürzt werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn

$$\left(\frac{1}{\zeta^2-1+\mu\zeta^2}\right)^2=\left(\frac{\zeta^2-\psi^2}{\mu\zeta^2\psi^2-(\zeta^2-1)(\zeta^2-\psi^2)}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Man erhält eine quadratische Gleichung

$$\zeta^4-2\zeta^2\frac{\mu\psi^2+1+\psi^2}{2+\mu}+\frac{2\psi^2}{2+\mu}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Es gibt also zwei Werte ζ_1 und ζ_2, für die die Lösung von der Dämpfung unabhängig ist. Dies sind die Punkte A und B in Abb. 9. Die Werte für A und B kann man aus der viel einfacheren Gleichung (31) berechnen. Man kann nun noch—und das ist das Ziel der Untersuchung—fragen, wie man die Eigenschwingungszahlen ν und N aufeinander abstimmen muss, um die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ in den beiden Punkten A und B gleich gross zu erhalten. Ist dies der Fall, so muss

$$\frac{1}{1-\zeta_1^2(1+\mu)}=-\frac{1}{1-\zeta_2^2(1+\mu)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass zu einem positiven Wert von A der Punkt B′ mit negativem Vorzeichen gehört. Aus der Gleichung (34) folgt

$$\zeta_1^2+\zeta_2^2=\frac{2}{1+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Andererseits muss die Gleichung (33) erfüllt sein. Da die Summe der Lösungen $\zeta_1^2+\zeta_2^2$ in jeder quadratischen Gleichung gleich dem negativen mittleren Glied ist, wird

$$\frac{2}{1+\mu}=\frac{2(\mu\psi^2+1+\psi^2)}{2+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Daraus ergibt sich

$$\psi=\frac{1}{1+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Wenn man $\mu=0{,}1$ wählt, d.h. also die Masse des Dämpfungsträgers zu $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers, wird

$$\psi=\frac{1}{1{,}1}=0{,}909091 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Dieser Wert ist in der Tafel III gewählt worden. Der Dämpfer muss eine Eigenschwingungszahl haben, die nur 0,91 der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers ist.

Die Vergrösserungsfunktion $\mathfrak{V}$ wird in diesem Fall

$$\mathfrak{V}=\sqrt{1+\frac{2}{\mu}}=\sqrt{21}=4{,}58$$

Nun wurde für $D=0{,}10$, $D=0{,}20$ und $D=0{,}16$ der Verlauf der Vergrösserungsfunktion gerechnet. Als diejenige Linie, die über die Punkte A und B nicht hinausgeht, wurde die Linie mit $D=0{,}16$ ermittelt. Das Ergebnis ist somit:

(1) Der Dämpfungsträger muss eine Eigenschwingungszahl einschliesslich der Federn, mit denen er mit dem Hauptträger verbunden ist, haben, die das 0,91-fache der Eigenschwingungszahl des Hauptträgers beträgt.
(2) Die Masse des Trägers ist $\frac{1}{10}$ der Masse des Hauptträgers.
(3) Die Dämpfung muss $D=0{,}16$ sein.

Dadurch ist der Dämpfungsträger eindeutig festgelegt. Ein Beispiel soll die Konstruktion zeigen.

Beispiel

Der Dämpfungsträger einer vorgespannten Betonbrücke ist zu entwerfen. Die Abmessungen der Brücke sind in Abb. 10 angegeben.

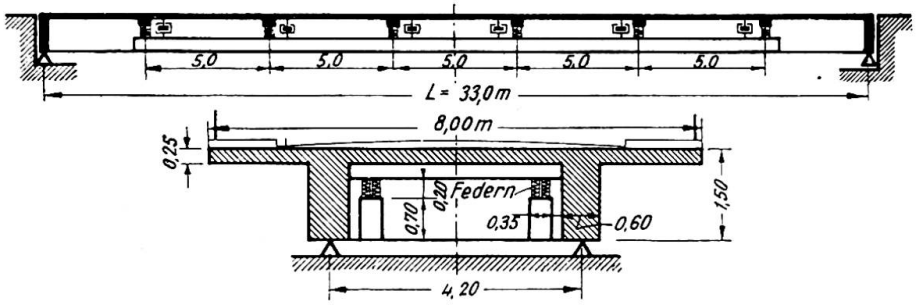


Abb. 10

Zahlenwerte:

Trägheitsmoment der Brücke: $J_I=688{,}10^5$ cm.^{4}
Masse der Brücke: $\mu_I=0{,}0956$ kg./cm.^{2} sec.^{2}
Elastizitätsmodul: $E=210\,000$ kg./cm.^{2}

Die Eigenschwingungszahl der Brücke ergibt sich aus (1) zu:

$$N=\frac{\pi}{2\,.\,3300^2}\sqrt{\frac{210\,000\,.\,688\,.\,10^5}{0{,}0965}}=1{,}76 \text{ Hertz}$$

Die erforderliche Masse des Dämpfungsträgers beträgt:

$$m=0{,}1\,.\,0{,}0956\,.\,33=0{,}316 \text{ kg./cm.}^2 \text{ sec.}^2$$

Gewählt werden zwei Dämpfungsträger mit den Abmessungen:

$$l=25 \text{ m.},\ b=35 \text{ cm.},\ d=70 \text{ cm.}$$

$$\mu_{II}=\frac{0{,}316}{25}=0{,}0126 \text{ kg./cm.}^2 \text{ sec.}^2$$

Die erforderliche Eigenschwingungszahl der Dämpfungsträger beträgt:

$$\nu=0{,}91\,.\,1{,}76=1{,}6 \text{ Hertz}$$

Bezeichnet man mit ν_1 die Eigenschwingungszahl der Dämpfungsträger mit starrer Befestigung, mit ν_2 die Eigenschwingungszahl der starr gedachten Dämpfungsträger mit elastischer Befestigung, mit J_{II} das Trägheitsmoment der Dämpfungsträger und

mit C_F das Gesamtfedermass aller Aufhängefedern, so gilt nach Dunkerley* angenähert:

$$\frac{1}{\nu^2}=\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Mit: $\nu_1=\frac{\pi}{2\left(\frac{l}{5}\right)^2}\sqrt{\frac{EJ_{II}}{\mu_{II}}}$, $\nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_F}{\mu_{II}\,.\,l}}$, $\nu=1{,}6$ Hertz, $J_{II}=\frac{70^4}{12}=20\,.\,10^5$ cm.^{4}, $l=2500$ cm.

ergibt sich aus (39) das erforderliche Gesamtfedermass aller Aufhängefedern zu: $C_F=3200$ kg./cm.

Zusammenfassung

In Zukunft muss man den dynamischen Kräften auch im Stahlbetonbrückenbau entgegnen. An einem Beispiel wird gezeigt, wie man durch den Einbau eines Dämpfungsträgers den unliebsamen Schwingungen einer Brücke bei Resonanz begegnen kann.

Summary

In future, means must be adopted to counteract the effects of dynamic forces in reinforced-concrete bridges. From an example it is shown how, in a case of resonance, the undesirable oscillations of a bridge can be obviated by adding a damping girder.

Résumé

Il sera, à l'avenir, nécessaire de faire face aux efforts dynamiques, même dans la construction des ponts en béton armé. L'auteur montre, en s'appuyant sur un exemple, comment l'on peut s'opposer aux oscillations inopportunes qui peuvent se manifester par résonance, à l'aide d'une poutre d'amortissement.

* Dunkerley, *Philosophical Transactions*, 1894.