Calcul du coefficient de sécurité

Autor(en): **Torroja, E. / Paez, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **4 (1952)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5025

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

AI 4

Calcul du coefficient de sécurité

Safety factor calculation

Die Berechnung des Sicherheitsbeiwertes

PROF. DR. h.c. E. TORROJA et ING. A. PAEZ
Madrid Madrid

Dans le domaine de la construction, peu de problèmes peuvent présenter autant d'intérêt économique et théorique que celui du juste établissement des coefficients de sécurité. Leur importance justifie par elle-même la nécessité de quelques principes fondamentaux et d'un processus mathématique qui conduisent à l'établissement logique des valeurs de ces coefficients, avec l'approximation suffisante compatible avec les exigences pratiques et avec l'inéluctable variabilité des données du problème.

Il existe, sans aucun doute, une discontinuité accusée dans la rigueur avec laquelle se développe le calcul d'une structure. Après une étude mécanique minutieuse et une déduction détaillée des régimes de contraintes à l'intérieur des divers éléments résistants, on adopte un coefficient de sécurité empirique qui, sans justification préalable, s'applique comme facteur à une étude fonctionnelle scrupuleuse et précise.

L'opportunité de lier les résultats définitifs à des considérations économiques objectives empêche de développer l'étude sur des valeurs et des erreurs moyennes. Elle oblige à calculer la probabilité pour chaque variable d'atteindre une valeur déterminée, c'est-à-dire de produire une certaine réduction des caractéristiques de résistance des matériaux employés, ou une augmentation déterminée des sollicitations prévues, comme dans le cas des surcharges accidentelles. D'autre part, si l'on fait abstraction d'une corrélation explicite entre le coefficient de sécurité et la probabilité d'effondrement, ce coefficient ne peut être déterminé que lorsque cette probabilité a été fixée au préalable, ce qui enlève toute objectivité au résultat puisqu'il est lié à une probabilité qui, suivant ce critérium, est arbitraire.

Il est certain qu'à chaque système de charges qui sollicite un ouvrage correspond toujours une répartition déterminée des contraintes dans chacune des diverses sections des différents éléments qui la composent. Si le taux maximum dans une section est inférieur au taux de rupture du matériau, cette section ne subira de rupture dans aucune de ses fibres.

Le champ d'application de la présente étude est limité au cas le plus fréquent où l'effondrement de l'ouvrage est dû au fait que la contrainte maximum résultante

dépasse la charge limite du matériau. L'effondrement peut se produire quand il intervient simultanément une combinaison malencontreuse de causes en quelque sorte imprévisibles.

Ces causes dérivent de l'ensemble de phénomènes fortuits et ne répondent à d'autre loi qu'à celles du hasard. L'une d'entre elles est la présence d'une surcharge exceptionnelle capable par elle-même, ou bien de détruire l'ouvrage, ou bien de contribuer indirectement à son effondrement.

D'autres causes qui peuvent être à l'origine de la ruine d'un ouvrage parfaitement conçu sont, l'existence d'un défaut grave dans le matériau (vides du béton, bulles ou soufflures de l'acier, etc.) ou dans l'exécution même en chantier (mise en place défectueuse des éléments, mauvaise disposition des armatures ou dosage inadéquat du béton).

D'autre part, le calcul réalisé peut ne pas correspondre à la réalité, soit que l'on ignore les lois qui régularisent le comportement réel de l'ouvrage, soit que la complication qui résulte de leur application soit trop grande et rende impossible leur développement.

En dernier lieu, le processus de calcul lui-même est exposé, comme toute œuvre humaine, à des erreurs ou à des fautes de calcul, d'autant plus susceptibles de surgir et de passer inaperçues que sera plus grande la complication de ce calcul.

En définitive, les différentes variables qui interviennent dans le phénomène peuvent être classées en cinq groupes:

(1) Dépassement des surcharges prévues (variable x),
(2) Défauts dans les bases théoriques du calcul (variable y),
(3) Erreurs numériques dans le calcul (variable z),
(4) Insuffisance de résistance des matériaux (variable u),
(5) Défauts d'exécution (variable t).

Chacune de ces variables aléatoires doit être représentée sous forme de fonction statistique déduite des expériences réalisées.

Dans le but de simplifier dans la mesure du possible les opérations ultérieures, il convient d'affecter à ces variables la forme de coefficients de correction.

S'il était possible de connaître la réalité des faits, on pourrait calculer les erreurs unitaires commises dans les cinq points énumérés. Par exemple, on saurait qu'au cours de la période de service de l'ouvrage, l'effort maximum appliqué à une section déterminée, produit par la présence d'une surcharge maximum S_x, devrait être s_v au lieu de l'effort s_p théoriquement déduit de la surcharge S'_x admise.

L'effort calculé s_p aussi bien que l'effort réel s_v différeront à leur tour de l'effort s_R nécessaire pour rompre une fibre de la section considérée. En général, les trois sollicitations appliquées s_v, s_R et s_p seront inégales, le fait que

$$s_v < s_R \qquad (1)$$

étant la condition nécessaire pour qu'aucune des fibres ne se rompent pas.

La relation

$$C_v = \frac{s_R}{s_v} \qquad (2)$$

a été appelée coefficient de sécurité efficace réel et le quotient

$$C = \frac{s_R\, s_r}{s_p} \qquad (3)$$

coefficient de sécurité efficace prévu, ou simplement coefficient de sécurité efficace. Dans cette expression, s_r représente l'effort maximum qui, appliqué à la section,

pourrait être supporté par celle-ci si les matériaux employés avaient les mêmes caractéristiques et les mêmes propriétés que l'on a supposé dans le calcul et qui, en général, sera différent de leur valeur réelle s_R.

Suivant ces principes, si S_x représente le train réel de charges le plus lourd ou le système de forces maximum appliqué extérieurement à la pièce et S'_x est la surcharge admise dans le projet, l'erreur relative en supposant connue la réalité, serait:

$$\epsilon_x = \frac{S_x - S'_x}{S'_x}$$

positive ou négative selon que le critérium établi est insuffisant ou excessivement conservateur.

En conséquence, pour corriger les résultats théoriques, il serait nécessaire de commencer par appliquer, pour cette seule raison, un coefficient de correction:

$$x = 1 + \epsilon_x = \frac{S_x}{S'_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

qui, appliqué à la surcharge admise comme probable, donnerait comme produit le système réel des efforts qui agissent sur la pièce ou sur l'ouvrage que l'on considère.

Les divergences naturelles entre le comportement réel de l'ouvrage et son comportement théorique font que, même en partant d'un même système final de forces extérieures S'_x, les efforts s'_y déterminés par le calcul dans une section déterminée de la pièce que l'on étudie diffèrent des s_y que l'on obtiendrait réellement pour la même surcharge S'_x. Pour que le premier s'identifie avec le résultat véritable, il est nécessaire d'appliquer un deuxième coefficient de correction:

$$y = \frac{s_y}{s'_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Enfin, les erreurs numériques sont la cause de nouvelles erreurs qui, pour être éliminées, exigent l'introduction d'un troisième coefficient:

$$z = \frac{s_z}{s'_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Par conséquent si s_p est la sollicitation propre d'une pièce, déterminée par le calcul suivant un certain processus numérique, basé sur certaines surcharges et hypothèses approximatives, la sollicitation que l'on devrait faire intervenir dans ce calcul pour obtenir des résultats en accord avec la réalité est

$$s_v = xyzs_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

De même, si s_r est la sollicitation de rupture assignée aux matériaux et s_R leur véritable sollicitation limite, on peut écrire:

$$s_R = \frac{s_r}{u \,.\, t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

où u et t sont les deux facteurs de correction à faire intervenir, le premier pour compenser les divergences entre les caractéristiques mécaniques réelles des matériaux et celles qui ont été adoptées dans le calcul et le second pour tenir compte des anomalies ou défauts introduits sur le chantier. En divisant (8) par (7), on obtient:

$$\frac{s_R}{s_v} = \frac{s_r}{u \,.\, t} \cdot \frac{1}{xyzs_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Selon les égalités (2) et (3), l'expression (9) se transforme en:

$$C_v = \frac{C}{x \,.\, y \,.\, z \,.\, t \,.\, u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

ce qui, écrit de la façon suivante:

$$\frac{C}{C_v} = x \,.\, y \,.\, z \,.\, t \,.\, u = \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

suggère un concept plus ample et plus rigoureux de la signification de ces facteurs de correction, en ce sens que chacun de ces facteurs représente la relation entre les coefficients de sécurité prévu et le réel, se rapportant à n'importe lequel des cinq concepts de base, lorsque les autres sont satisfaits d'une manière complète et parfaite, c'est-à-dire si les quatre autres coefficients correspondants sont égaux à l'unité.

Quant au produit

$$\gamma = x \,.\, y \,.\, z \,.\, t \,.\, u, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

sa signification est immédiate, chaque fois qu'il représente la relation entre les coefficients C et C_v à la suite de l'intervention globale de toutes les causes d'erreur.

Etant donné que la condition de permanence ou de non-rupture de l'ouvrage s'exprime par l'inégalité:

$$C_v > 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

on en déduit que la valeur du coefficient de sécurité adopté doit être:

$$C > \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

On comprend logiquement que les valeurs des cinq facteurs de correction soient essentiellement inconnus. Toutefois, à l'aide d'une statistique adéquate on peut relier à chaque fluctuation de ces facteurs, entre deux limites établies arbitrairement, la probabilité d'occurrence d'un fait semblable.

Ce concept qui interprète les facteurs de correction, non comme un nombre plus ou moins certain, mais comme une fonction de probabilité, pose le problème de l'établissement d'un critérium mathématique à l'aide duquel on puisse développer les opérations qu'il est nécessaire de réaliser avec ces variables aléatoires.

Dans les grandes lignes, si $X(x)$ et $Y(y)$ sont deux fonctions de probabilité, il devient nécessaire d'établir un procédé opératoire à l'aide duquel on puisse obtenir la loi de probabilité d'une nouvelle variable w liée aux variables antérieures par la relation

$$w = f(x, y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

ou ce qui revient au même, au moyen de l'équation:

$$y = \phi(x, w) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

A cet effet, (fig. 1), considérons un système d'axes cartésiens rectangulaires.

En prenant comme origine des coordonnées le point O, on peut représenter, sur le premier quadrant, la fonction

$$y = \phi(x, w_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

qui relie la variable x à la y, au moyen de la fonction ϕ qui doit être uniforme pour les différentes valeurs w_i que la variable w peut prendre.

En supposant que la variable x varie entre une limite inférieure $x = a$ et une limite supérieure $x = A$ et que, de même, la variable y soit comprise entre deux limites $b < y < B$ on peut dessiner sur les quadrants II et III, les fonctions $X(x)$, $Y(y)$ représentatives respectivement, de la probabilité pour x d'atteindre une valeur comprise entre a et x et pour y de prendre une valeur comprise entre b et y.

Etant donné que la probabilité de $x_2 > x > a$ est toujours plus grande que celle de $x_1 > x > a$ quand $x_2 > x_1$ et que

$$dX = X'(x)dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

a toujours et seulement une solution, dans tout l'intervalle compris entre a et A, la fonction $X = X(x)$ est non seulement monotone, mais aussi continue, de même que sa dérivée première dans cet intervalle; on peut en dire autant de la fonction analogue $Y = Y(y)$ dans l'intervalle de b à B.

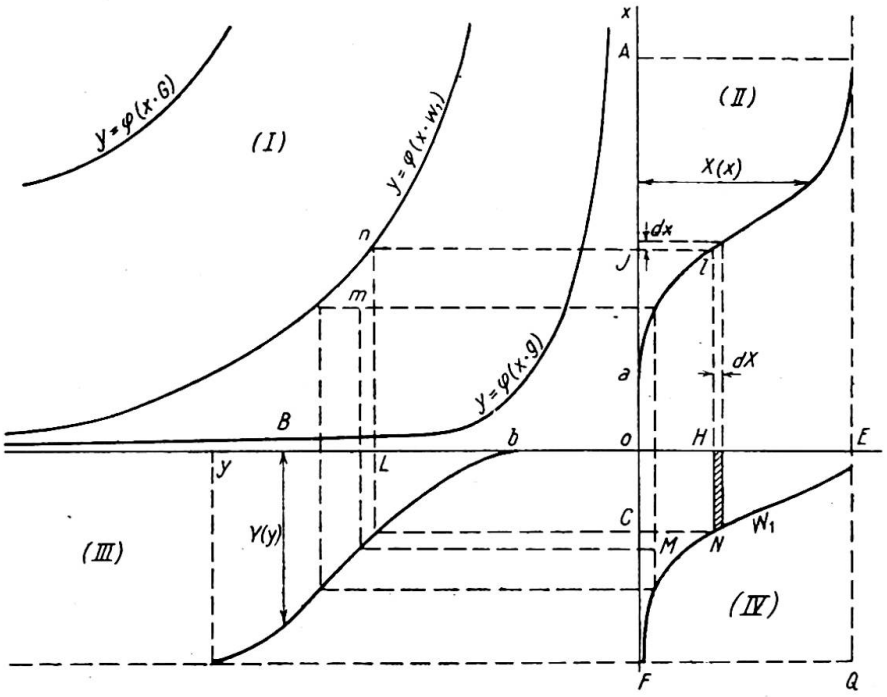

Fig. 1

Selon ce qui a été exposé antérieurement, à tout valeur OJ arbitraire de x, correspondra toujours une seule valeur OH de la fonction $X(x)$.

D'autre part, en vertu de l'hypothèse admise sur l'uniformité de la fonction $y = \phi(x)$, à toute valeur OJ de x correspondra aussi une seule valeur OL de y, telle que

$$y = \phi(x, w_1)$$

et par conséquent, une valeur

$$OC = Y(y)_{y=\phi} = \Phi(x, w_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

qui jointe à OH, définit le point N dans le quadrant IV, établissant ainsi une correspondance univoque, entre chacun des points n de la courbe $y = \phi(x, w_1)$ et chacun des points N de la courbe W_1.

En vertu de la propriété commune aux fonctions X et Y d'être monotones dans tout l'intervalle considéré, tout point générique m, du système I, situé entre la courbe $y = \phi(x, w_1)$ et les axes coordonnés, aura toujours un point réciproque M et seulement un, dans le système IV, entre la courbe W_1 et les axes OE et OF.

Puisque le système N a été construit en rapportant aux axes coordonnés OE et OF les probabilités d'occurrence de certains phénomènes, ce système correspondra à un domaine d'égale probabilité; par conséquent, la probabilité pour un point générique M d'être situé dans la zone comprise entre la courbe W_1 et les axes OE et OF sera exprimée par le rapport des aires:

$$\frac{\text{aire } OEW_1FO}{\text{aire } OEQFO}$$

x et y étant des variables qui sont comprises entre les limites extrêmes a et A, b et B, la probabilité de vérification des inégalités:

$$A>x>a \qquad B>y>b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

sera, sans aucun doute, la certitude; c'est-à-dire que l'on aura:

$$X(A)=Y(B)=OE=OF=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

et

$$\text{aire } OEQFO=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

c'est-à-dire que la probabilité pour le point M d'être à l'intérieur du contour OEW_1FO sera la valeur de cette aire qui, selon l'égalité (19), est:

$$\text{aire } OEW_1FO=\int_a^A \Phi(x,z_1)dX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Puisque la fonction $y=\phi(x)$ est, par hypothèse, une fonction uniforme pour toutes les valeurs paramétriques que peut adopter w, les valeurs extrêmes g et G de ce paramètre seront obtenues pour deux des quatre combinaisons auxquelles peuvent donner lieu les quatre limites des deux variables aléatoires x et y (a, A, b et B).

Soit, à cet effet, g la valeur extrême que peut atteindre sa valeur minimum a et soit de même G la limite extrême du paramètre w, quand x arrive à sa valeur maximum A.

Dans ces conditions, les fonctions $y=\phi(x, g)$ et $y=\phi(x, G)$ du premier quadrant représenteront les limites des valeurs possibles de w.

Etant donné la correspondance univoque entre les points M du système IV et les points M du premier système, la probabilité pour le point M d'être compris dans la zone limitée par les courbes représentatives des fonctions $\phi(x, w_1)$ et $\phi(x, g)$ et compatible avec les domaines de fluctuation des variables x et y, c'est-à-dire la probabilité pour la variable w d'être limitée par les valeurs g et w, sera la même que celle pour le point M d'être situé entre W_1 et les axes DE et OF.

Par conséquent la probabilité pour la variable w d'être limitée par la valeur g et la valeur particulière w_1, sera:

$$W=W(w_1)=\int_a^A \Phi(x, w_1)dX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

De même, pour une valeur arbitraire w de w_1,

$$W=W(w)=\int_a^A \Phi(x, w)dX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Et finalement, en différenciant sous le signe intégral, on aura la probabilité pour la variable w d'être comprise entre une valeur générique w et une valeur $w+dw$ qui sera:

$$dW=dw\int_a^A \frac{\partial\Phi}{\partial w}dX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

En dérivant, par rapport à w, la fonction (19) deviendra:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial w}=\frac{\partial\phi}{\partial w}\cdot\frac{dY}{d\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial w}\left(\frac{dY}{dy}\right)_{y=\phi(x,\,w)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

En reportant cette expression dans l'équation (26), il restera enfin:

$$dW=dw\int_a^A \frac{\partial\phi}{\partial w}\,.\,dX\left(\frac{dY}{dy}\right)_{y=\phi(x,\,w)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Dans le cas particulier auquel se réfère ce rapport, les variables w, x, y sont reliées entre elles par la relation $w=x \cdot y$; c'est-à-dire que:

$$y=\phi(x, w)=\frac{w}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

d'où l'on déduit:

$$\frac{\partial\phi}{\partial w}=\frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

D'autre part, le caractère fortuit des coefficients de correction x, y, z, t, u oblige à étendre la domaine de fluctuation de ces variables à tout le champ réel positif:

$$0<x<\infty, \qquad 0<y<\infty, \qquad 0<u<\infty$$

conditions qui, tenant compte de l'équation (30), transforment l'égalité (28) en l'expression:

$$dW=\int_0^\infty \frac{dX}{x}\left(\frac{dY}{dy}\right)_{y=w:x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

qui, comme (28), exprime la probabilité pour la variable $w=x \cdot y$ d'être comprise entre w et $w+dw$.

L'opportunité d'opérer avec les fonctions $X(x)$, $Y(y)$, . . . , déduites directement de l'expérimentation, au lieu de considérer les lois gaussiennes similaires, oblige à developper cette méthode selon des procédés graphiques, pour ne pas altérer le caractère véritable des distributions expérimentales par des simplifications additionnelles qui pourraient diminuer leur précision.

Pour cela, il suffit de dessiner à une échelle convenable les fonctions $X(x)$, $Y(y)$ ainsi que le réseau des hyperboles:

$$y=\frac{w_i}{x}$$

représentatives de la condition de lien imposée aux variables $w=x \cdot y$.

Suivant la méthode indiquée dans la fig. 1, à chaque valeur particulière w_1, correspondra une courbe W_1 dans le quadrant (IV) qui délimitera un contour OEW_1F, dont l'aire

$$\Omega_1=\int_0^{w_1} dw=W(w_1)$$

définit l'ordonnée $W_1=W(w_1)$ correspondant à l'abscisse w_1. En répétant ce processus autant de fois qu'on le juge nécessaire, on peut dessiner, par points, la fonction $W=W(w)$. Une fois trouvée la fonction $W=W(w)$, représentative de la probabilité pour la variable $w=x \cdot y$ d'être comprise entre une valeur 0 et une autre valeur générique w, on peut déterminer la nouvelle distribution $W'=W'(w')$ de la variable auxiliaire w':

$$w'=w \cdot z$$

ainsi que les fonctions de probabilité $W''=W''(w'')$ et $\Gamma=\Gamma(\gamma)$ correspondant aux variables:

$$w''=w' \cdot u$$

$$\gamma=w'' \cdot t=xyztu$$

Puisque, selon l'équation (14), la probabilité de non-effondrement est conditionnée par l'inégalité $C>\gamma$, on en déduit que la probabilité pour un ouvrage calculé avec un coefficient de sécurité égal à C, de s'effondrer est:

$$\Gamma_h=1-\int_0^C d\Gamma=1-\Gamma(C),$$

chaque fois que $\Gamma(o)=0$

L'on ne prétend pas, avec ces méthodes, établir un nouveau théorème mathématique destiné à résoudre d'une façon académique le problème général de la composition des variables de probabilité. L'on essaie seulement d'établir un critérium pratique qui permette d'obtenir, d'une façon suffisamment précise et générale, la loi de distribution du produit:

$$\gamma = x \,.\, y \,.\, z \,.\, t \,.\, u,$$

ou, ce qui est équivalent, la probabilité d'effondrement:

$$\Gamma_h = 1 - \Gamma(C) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

en fonction du coefficient de sécurité C. On peut facilement comprendre que la fonction Γ_h n'est pas unique, mais qu'elle varie selon les conditions de surveillance en chantier, le type de surcharge qui agit sur la structure, la rigueur qui a présidé au développement des calculs ou le genre de matériaux employés. Bref, elle varie avec les diverses circonstances qui modifient les distributions individuelles correspondant aux cinq variables énumérées.

Dans le but de faciliter aux théoriciens la tâche fastidieuse de determiner la fonction de probabilité qui correspond aux caractéristiques particulières de l'ouvrage en projet, on a calculé, au cours d'expériences que nous décrirons plus loin, les distributions individuelles relatives aux cas de plus fréquente utilisation pratique, ainsi que les 75 différentes fonctions de probabilité Γ_h correspondant aux diverses combinaisons auxquelles donnent lieu les différentes sous-classifications (calculs rigoureux, normaux ou approximatifs, surcharges dans les maisons, les ponts ou les édifices industriels, ouvrages métalliques, ou de béton, très contrôlés, normalement ou peu contrôlés, etc.).

Au moyen d'un jeu d'abaques calculés à cet effet, on peut connaître par leur simple lecture la probabilité d'effondrement relative à un coefficient de sécurité déterminé, dans le cas concret que l'on envisage.

D'autre part, tout ouvrage implique le risque inhérent de son effondrement, origine de dommages déterminés. Si l'on considère n ouvrages identiques en tous points, avec une probabilité $1/n$ d'effondrement et dont les dommages totaux, pour cette cause improbable, seraient égaux à D pour chacun, on peut espérer que, dans un délai équivalent à la période habituelle de service de ces ouvrages, un d'entre eux s'effondrera, et que cette catastrophe donnera lieu à des pertes humaines et matérielles équivalentes à D. Si P est le coût du premier établissement dans l'ensemble des n ouvrages, chacun réalisés, la perte totale sera $P+D$. Etant donné que l'on ignore *a priori* quelle sera l'ouvrage qui s'effondrera, puisque tous ont la même probabilité, on en déduit qu'il correspond à chaque ouvrage des dommages virtuels égaux à $1/n(D+P)$; c'est-à-dire, équivalents au produit de la probabilité d'effondrement $\Gamma_h = 1/n$ par les dommages totaux occasionnés, en y incluant le coût du propre ouvrage détruit.

Dans un critérium de vaste économie nationale, la perte économique virtuellement consécutive à la destruction possible de l'ouvrage est représentée suivant le raisonnement précédent, par l'espérance mathématique de l'effondrement, c'est-à-dire, par la quantité:

$$\frac{1}{n}(D+P) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

où $1/n$ représente la probabilité d'effondrement, probabilité qui, antérieurement, a été désignée par Γ_h.

En ajoutant à cette partie le coût P du premier établissement, on constate que, dans le sens économique général, le débours total affectué par le propriétaire et les

sinistrés, c'est-à-dire le coût total que suppose pour la collectivité la construction de l'ouvrage précité, est:

$$P+\Gamma_h \times (D+P)=R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

où le deuxième terme du premier membre, c'est-à-dire la quantité $\Gamma_h(D+P)$, a la même signification conceptuelle et quantitative qu'une prime d'assurance de la construction pour couvrir les risques et les pertes de son effondrement improbable.

La solution la plus économique est par conséquent celle où l'expression (34) est minimum. D'une façon plus précise, on peut énoncer le principe précédent en disant que, dans le champ des solutions infinies que l'on peut imaginer en faisant varier seulement le coefficient de sécurité d'un même ouvrage en projet, la solution logique parce que la plus économique, est celle pour laquelle le coût d'ensemble de l'ouvrage en lui-même et de la prime d'assurance des dommages possibles qui peuvent être occasionnés par l'effondrement (en y incluant la reconstruction de l'ouvrage) atteint une valeur minimum.* Une fois établi ce principe économique, le processus opératoire qu'il convient de suivre pour la détermination du coefficient de sécurité résulte immédiatement, comme conséquence logique, de la condition de minimum imposée. A cet effet, on essaiera plusieurs coefficients arbitraires qui, introduits premièrement dans la fonction de probabilité Γ_h et ensuite dans la relation (34), conduiront à une série de résultats numériques représentatifs des frais totaux d'ouvrage assurés, dont la valeur minimum définira la solution la plus économique. Le coefficient de sécurité C, qui correspond à cette solution de valeur minimum, sera le coefficient qu'on devra adopter pour l'ouvrage étudié, la probabilité d'effondrement apparaissant comme une fonction dépendante de C.

Pour le développement et l'application pratique des principes et de la théorie exposée, il est nécessaire d'établir, en se conformant le plus possible à la réalité, les fonctions individuelles de probabilité correspondant aux cinq groupes précités, en partant des données statistiques. Une des difficultés qui se pose ici est celle qui résulte de la forte interférence et de la connexion étroite de certaines variables avec d'autres. Cette dépendance mutuelle fait que les résultats expérimentaux permettent rarement l'établissement direct d'une distribution déterminée. Ils sont très fréquemment troublés par des phénomènes de caractère étrange, soit qu'il soit impossible de les éliminer, soit que les données publiées ne soient pas aussi adéquates que le ferait désirer l'objet fondamental de cette étude.

Une des distributions qui peut être déterminée directement est celle qui se rapporte aux erreurs numériques qui s'infiltrent dans le calcul. En partant d'une révision méticuleuse des opérations intervenant dans le calcul des efforts et des contraintes de 116 éléments différents d'ouvrages industriels, de bâtiments, de ponts et de tribunes, on a pu tracer la loi de probabilité $Z=Z(z)$ de ces erreurs numériques qui, comme conséquence de son caractère fortuit et libre d'erreurs systématiques, affecte une forme nettement gaussienne, avec valeur la plus probable pour $z=1$.

Les lois de probabilité $U(u)$ correspondant aux coefficients de correction u dans les bétons et dans les aciers ont été déterminées à partir des séries étendues d'essais réalisés sur ces matériaux par l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics de Paris pendant la période 1935–1947. De même que dans le cas antérieur, l'expérimentation groupe directement les éléments cherchés, c'est-à-dire la concentration des résultats, autour de la valeur moyenne pour les différentes séries essayées.

Il n'en est pas de même pour la détermination de la loi de probabilité $Y(y)$ représentative des erreurs ou des défauts de précision dans les hypothèses de calcul. Un

* Ce principe a été formulé par le Professeur E. Torroja lors du IIème Congrès International des Ponts et Charpentes, à Liège, en 1948.

calcul parfaitement idéal est celui qui reproduit, avec une fidélité absolue, les déformations et les contraintes qui se manifesteraient rigoureusement dans un ouvrage construit avec des matériaux exactement identiques à ceux que l'on a envisagés dans le calcul comme éléments de départ.

Or, tout ouvrage présente certaines divergences avec les dimensions stipulées et, dans de nombreux cas, d'importants défauts de construction qui altèrent son comportement. Seuls les modèles à échelle réduite ou naturelle construits dans un laboratoire et étroitement surveillés pourraient servir de point de comparaison.

Même ainsi, il est nécessaire d'effectuer quelques corrections. Si l'on mesure des déformations ou des flèches, les résultats peuvent être affectés par le manque de concordance entre les modules d'élasticité et de déformation supposés et ceux que le matériau possède réellement. Si l'on étudie les charges de rupture, leurs écarts propres et leur hétérogénéité peuvent fausser la comparaison avec le calcul.

Pour essayer d'éliminer tous ces phénomènes perturbateurs dans l'étude présente, on a corrigé par les méthodes mathématiques, de la fig. 1, les lois de variabilité des modules indiqués et des résistances antérieurement déterminées, en établissant que la loi $Y(y)$ cherchée doit être une fonction statistique telle que la loi $Y_1(y_1)$, où $y_1 = y \,.\, m$, coïncide avec la fonction de probabilité donnée par l'expérimentation quand la distribution $M(m)$ représente la loi de variation des modules d'élasticité ou des résistances.

Ces fonctions de probabilité $Y_1(y_1)$ ont été déterminées en se basant sur les effets exercés sur des poutres droites, sur des dalles et sur des ponts réalisés par l'Engineering Experiment Station de l'Université d'Illinois, sur les épreuves réalisées sur le Pont de Djedeida, sur les résultats obtenus à l'aide des modèles du Fronton Recoletos de Madrid et sur l'expérimentation effectuée sur des ouvrages déterminés, en Suisse, par le Eidgenössische Material Prüfungs-und Versuchsanstalt für Industrie und Bauwesen de Zürich.

Mais c'est dans la détermination de la distribution $T(t)$ des coefficients de correction pour des défauts introduits pendant la construction de l'ouvrage que se manifeste la plus grande complication. D'un côté, il est nécessaire de décomposer la variable t en deux facteurs, dont l'un t_2 représente les erreurs de piquetage, de mise en place des armatures, de liaisons défectueuses, etc. (c'est-à-dire, qui n'affectent pas la résistance intrinsèque du matériau); l'autre t_3 exprime la possibilité de défaut qui l'affecte, par exemple gâchage ou dosage défectueux du béton.

Pour déterminer le premier de ces facteurs, on a eu recours à l'expérimentation réalisée sur divers ouvrages et sur des ponts suisses, par le Laboratoire Fédéral de ce pays, en éliminant par les méthodes mathématiques de composition de variables antérieurement décrites, les causes d'erreurs dues aux imperfections possibles du calcul développé et aux écarts entre les modules d'élasticité réels et supposés.

Le second facteur a été déterminé en se basant sur les expériences réalisées par A. R. Collins et publiées dans le n° 3 de la Revue *Road Research* et sur les références fournies par M. Billiard, de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, sur les résultats des essais effectués sur des ouvrages contrôlés par le Bureau Securitas, dans les années 1947 et 1948.

Ces références permettent de déterminer l'importance statistique des défauts d'exécution dans des chantiers rigoureusement, normalement et faiblement contrôlés, au moyen des combinaisons opportunes entre les lois de distribution partielles.

Enfin, la variabilité des surcharges a été déterminée en se basant sur les données publiées par M. A. Freudenthal* et sur l'examen comparatif des critériums adoptés

Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs*, **112, 125, 1947.

dans les instructions des divers pays pour fixer les surcharges estimées maxima.

Lorsque ces données n'ont pas été, même de loin, aussi abondantes qu'on l'aurait désiré, elles ont été malgré tout suffisantes pour prouver qu'en tablant sur elles, la théorie exposée permet d'arriver à des résultats pratiques. Bien que les développements théoriques soient compliqués et laborieux, il a été possible d'établir des tables et des abaques auxiliaires, au moyen desquels et en fonction du prix de l'ouvrage que l'on étudie, calculé avec un coefficient de sécurité quelconque, on peut déduire les prix correspondants aux divers coefficients que l'on essaie. En classant les calculs selon des cadres-types et à l'aide des tables ou abaques précités, l'ensemble des opérations requises dans un cas concret se réduit à des additions et des multiplications qui peuvent être effectuées en peu de minutes.

Comme on devait logiquement l'espérer, les coefficients de sécurité que l'on obtient en appliquant ces procédés à des pièces différentes ou à des groupes fonctionnels d'un même ouvrage sont différents d'un élément à un autre. Leur variation dépend de la plus grande ou de la plus petite importance de la pièce considérée, de l'influence relative de la surcharge comparée avec son poids propre et de l'amplitude des dommages qui pourraient être occasionnés par la rupture possible.

De même, le coefficient de sécurité propre d'un élément déterminé ou d'un ensemble de pièces de caractéristiques égales, varie quand on modifie les conditions primitives supposées en ce qui concerne la surveillance du chantier ou quand on remplace le calcul par un autre calcul plus rigoureux.

Le critérium économique qui sert de base à la détermination de ces coefficients de sécurité et la subordination de ceux-ci au degré de surveillance prévu et à la précision avec laquelle ont été effectués les calculs du projet, permettent de poser objectivement le problème du degré de contrôle auquel doivent être soumis les travaux de bétonnage et de construction, ainsi que l'opportunité d'une étude minutieuse du bâtiment. Une surveillance étroite et un calcul précis supposent des réductions déterminées dans la valeur du coefficient de sécurité et, par conséquent, une économie dans les matériaux employés. Selon que ces économies sont supérieures ou non au surplus que l'une ou l'autre solution exige, il est nécessaire ou anti-économique de recourrir à une plus grande surveillance de l'ouvrage ou à employer un plus grand nombre d'heures à préciser les dimensions des différents éléments.

Enfin, il convient de signaler le fait que les résultats définitifs auxquels on arrive par l'application de cette méthode coïncident avec ceux auxquels l'humanité est parvenue lentement jusqu'à l'époque actuelle, peut-être sans raison apparente.

On pourrait penser que cette coïncidence enlève un intérêt à ce thème, puisque son étude semble servir seulement de justification à des coutumes établies selon un critérium purement subjectif. Néanmoins, cette même conclusion sert à mettre en valeur les résultats; en effet d'une part, elle apporte garantie à la méthode elle-même et d'autre part, elle indique, dans l'ordre, des chiffres que les techniciens utilisent, l'opportunité d'introduire des variations bien définies d'un cas à l'autre, en fonction des différentes variables. Ces modifications n'avaient pu être appréciées et mises en valeur jusqu'à présent et on ne pouvait seulement qu'en avoir une intuition vague, sans possibilité de les libérer de dangereux critériums personnels, ni de les utiliser avec la précision raisonnée que l'économie et la sécurité des ouvrages exigent en même temps.

Il ne convient pas ici et nous ne disposons pas de la place suffisante, d'exposer le développement complet de la théorie, ni les résultats numériques que l'on peut obtenir, puisqu'ils sont différents pour chaque cas concret, avec des variations qui atteignent aisément par exemple $\pm 20\%$ et même plus et aussi parce que les auteurs espèrent pouvoir présenter bientôt un mémoire assez long en anglais.

Ils ne prétendent pas que la présente étude épuise la question ou lui apporte une solution définitive. Ils estiment seulement avoir établi un processus permettant de déterminer le coefficient de sécurité sur des bases objectives et de résoudre ainsi le problème en fournissant des résultats d'intérêt pratique. On peut en déduire des directives susceptibles d'orienter les recherches ultérieures, dans les multiples aspects du problème. Les auteurs attirent enfin l'attention sur l'intérêt qu'il y a à pousser l'étude statistique de tous les facteurs qui interviennent ici, c'est-à-dire de toutes les causes d'erreurs, de défauts ou d'autres, dont la conjonction est susceptible de produire l'effondrement des ouvrages.

Résumé

Le but principal de cette étude est l'établissement d'une méthode de calcul générale qui permette d'arriver à connaître la valeur numérique du coefficient de sécurité dans un cas déterminé. Ce résultat doit être complètement dégagé de toute subjectivité et doit dépendre exclusivement des données concrètes qui caractérisent l'ouvrage projeté.

Le développement du problème a été établi sur des principes mathématiques. Les lois de la probabilité, déterminées sur la base de l'expérimentation existante, sont combinées en vue de la détermination de la probabilité d'effondrement.

La condition de prix minimum de l'ouvrage assuré suppose une nouvelle équation qui, associée à la précédente, permette de déterminer la valeur la plus appropriée du coefficient de sécurité, compatible avec la sécurité nécessaire et exprimée par la probabilité d'effondrement qui est ainsi également définie.

Summary

The main purpose of this investigation is to establish a general method of calculation which, in any particular case, will enable the determination of the numerical value of the factor of safety. The calculated value obtained must be free from arbitrary or subjective factors. It should be entirely derived from the factual circumstances appropriate to the particular work or design.

The problem has been approached mathematically. Laws of probability, based on existing experimental data, have been suitably applied and manipulated to work out the probability of a structural failure.

A further equation can be formulated from the condition that the insured cost of the work shall be a minimum. This condition, in conjunction with accident probability, enables the most appropriate value for the design safety factor to be calculated, compatible with a suitable margin of safety. This safety margin will be expressed by the accident probability, which, by this procedure, will become automatically defined.

Zusammenfassung

Die vorliegende Studie macht sich zur Aufgabe eine allgemeine Berechnungsweise aufzustellen, die zu einer ziffernmässigen Festsetzung des Sicherheitsbeiwertes für einen gegebenen Fall führt. Diese Festsetzung muss in jeder Hinsicht objektiv sein und darf sich nur auf konkrete Angaben stützen, die den Besonderheiten des fraglichen Entwurfes oder Bauvorhabens entsprechen.

Diese Aufgabe wird auf mathematischer Grundlage entwickelt. Die aus vorhandenen Erfahrungen und Versuchen abgeleiteten Gesetze der Wahrscheinlichkeit werden miteinander in Verbindung gebracht und zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Versagens eines Bauwerks herangezogen.

Die notwendige Festsetzung eines Mindestgestehungspreises für ein versichertes Bauwerk bedingt eine weitere Gleichung, welche zusammen mit der vorangehenden, die Bestimmung des geeignetsten Sicherheitsbeiwertes im Einklang mit der erforderlichen Sicherheit ermöglicht, der somit gewissermassen automatisch zum Ausdruck kommt.