Beitrag zur Elastizitätstheorie der Schalen

Autor(en): **Kuhelj, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **4 (1952)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5028

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

AII 1

Beitrag zur Elastizitätstheorie der Schalen

Contribution to the theory of elasticity of shells

Contribution à la théorie de l'élasticité des voûtes minces

A. KUHELJ
Ljubljana, Jugoslawien

Einleitung

Die Ausgangsgleichungen der Biegetheorie dünner Schalen sind auch bei Benutzung der Bernoulli'schen Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte noch immer ziemlich undurchsichtig (vgl. z.B. Schrifttum 7). Auch haben sich bei erneuter anschaulicher Ableitung dieser Gleichungen einige Unstimmigkeiten ergeben (Schrifttum 8), so dass das Auftreten einiger Glieder daselbst nicht vollkommen begründet erscheint. In diesem Beitrage wird versucht, einen neuen Rechnungsgang bei der Aufstellung der Grundgleichungen anzudeuten, welcher von bekannten Formeln der elementaren Differentialgeometrie der Flächen ausgeht und verhältnismässig schnell und sicher zu eindeutigen Resultaten, ähnlich wie sie in neuerer Zeit für spezielle Schalenformen aufgestellt wurden, führt. Weiter werden auch einige Vereinfachungen vorgeschlagen, welche bei allgemeinen Schalenformen und Parametern zwar noch immer zu ziemlich verwickelten Formeln führen, welche aber z.B. bei Anwendung auf zylindrische Schalen beliebigen Querschnittes verhältnismässig einfache Resultate ergeben.

Zusammenstellung einiger Resultate der elementaren Flächentheorie

Die für die Verzerrung der ganzen Schale massgebende Mittelfläche soll durch zwei krummlinige Gauss'sche Koordinaten gegeben sein, die wir hier in Anlehnung an A. E. H. Love (Schrifttum 7) mit α und β bezeichnen, und zwar sollen die beiden Scharen der Koordinatenlinien (α-Linie bei konstantem β, β-Linie bei konstantem α) der Einfachheit halber Krümmungslinien der Mittelfläche sein. Wir verwenden als Hilfsmittel durchwegs die Vektorrechnung und benutzen dabei die im Lehrbuche von R. S. Burington und C. C. Torrance (Schrifttum 3) angewandten Bezeichnungen mit dem Unterschied, dass wir die Vektoren einfachheitshalber nur mit einem Querstriche bzw. Querpfeile andeuten. Die Hauptsätze der elementaren Differentialgeometrie entnehmen wir dem Lehrbuche von W. Blaschke (Schrifttum 2, vgl. auch

das entsprechende Kapitel in Schrifttum 3), dessen Bezeichnungen sich übrigens von unsrigen nur wenig unterscheiden.

Der Ortsvektor zu einem beliebigen Punkte P der Schalenmittelfläche sei als Funktion von α und β durch

$$\vec{r}=x(\alpha, \beta)i+y(\alpha, \beta)j+z(\alpha, \beta)k \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

gegeben, wobei x, y, z Kartesische Koordinaten von P bedeuten, während i, j, k die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen sind. Alle im folgenden gebrauchte Ableitungen von $\vec{r}$ bzw. x, y, z nach α, bzw. β seien überall endlich und stetig. Um die Uebersichtlichkeit auch in verwickelten Ausdrücken möglichst zu wahren, wollen wir weiter verabreden, dass unten angesetzte Zeichen α bzw. β ausschliesslich Ableitungen nach diesen Parametern bedeuten sollen, so dass z.B.

$$\vec{r}_\alpha \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \quad \vec{r}_\beta \equiv \frac{\partial r}{\partial \beta}, \quad r_{\alpha\alpha} \equiv \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^2} \text{ usw.} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

sein soll.

Die in (2) angegebenen Ableitungen $\vec{r}_\alpha$ und $\vec{r}_\beta$ bedeuten bekanntlich Vektoren in Richtung der Tangenten zu beiden Koordinatenlinien. Um zu Einheitsvektoren e_1 bzw. e_2 in diesen Richtungen zu kommen, führen wir nach A. E. H. Love (Schrifttum 7) die positiv genommenen Wurzeln der beiden Koeffizienten E und G der ersten Fundamentalform ein

$$A={}^{+}\sqrt{E}={}^{+}\sqrt{\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha}, \quad B={}^{+}\sqrt{G}={}^{+}\sqrt{\vec{r}_\beta \cdot \vec{r}_\beta} \quad \ldots \quad (3)$$

und erhalten

$$e_1=\frac{\vec{r}_\alpha}{A}, \quad e_2=\frac{\vec{r}_\beta}{B} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

während der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormale durch

$$e_3=e_1 \times e_2 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

gegeben ist.

Die Ableitungen dieser Einheitsvektoren nach α und β sind im wesentlichen durch die Ableitungsgleichungen nach Gauss und Weingarten (Schrifttum 2, S. 108 und 114) gegeben; es ist z.B.

$$e_{1\alpha}=\frac{r_{\alpha\alpha}}{A}-\vec{r}_\alpha \frac{A_\alpha}{A^2}$$

Alle Ausdrücke vereinfachen sich wegen der Benutzung der Krümmungslinien als Koordinatenlinien sehr, weil dann bekanntlich

$$F=\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta=0 \quad \text{und} \quad M=\vec{r}_{\alpha\beta} \cdot e_3=0$$

ist. Unter Benutzung der Ableitungsgleichungen erhält man dann

$$e_{1\alpha}=-\frac{A_\beta}{B}e_2+\frac{A}{R_1}e_3, \quad e_{2\alpha}=\frac{A_\beta}{B}e_1, \quad e_{3\alpha}=-\frac{A}{R_1}e_1 \quad \ldots \quad (6a\text{–}c)$$

$$e_{1\beta}=\frac{B_\alpha}{A}e_2, \quad e_{2\beta}=-\frac{B_\alpha}{A}e_1+\frac{B}{R_2}e_3, \quad e_{3\beta}=-\frac{B}{R_2}e_2 \quad \ldots \quad (7a\text{–}c)$$

wobei statt der Koeffizienten L, M, N der zweiten Fundamentalform die beiden Hauptkrümmungshalbmesser R_1 und R_2 mit

$$\frac{1}{R_1}=\frac{L}{E}=\frac{L}{A^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_2}=\frac{N}{G}=\frac{N}{B^2} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

eingeführt worden sind. Dabei ist zu beachten, dass R_1 und R_2 als positiv zu nehmen

sind, wenn die Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien auf der positiven Seite des Einheitsvektors e_3 liegen.

Mit diesen Formeln lassen sich, wie im folgenden gezeigt wird, verhältnismässig einfach alle Resultate der Biegetheorie der Schalen ableiten. Zur Vereinfachung der Gleichungen brauchen wir nur noch folgende Beziehungen zwischen obigen Grössen, die sich durch Vergleich der auf verschiedenen Wegen erhaltenen gemischten Ableitungen von $\vec{r}_\alpha$ bzw. $\vec{r}_\beta$ ergeben. Aus Gaussens Theorema egregium (Schrifttum 2, S. 117) erhält man

$$\left(\frac{A_\beta}{B}\right)_\beta+\left(\frac{B_\alpha}{A}\right)_\alpha=-\frac{AB}{R_1R_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

während die beiden Mainardi-Codazzischen (Schrifttum 2, *l.c.*) Gleichungen in unserem Falle folgende einfache Form annehmen

$$\left(\frac{A}{R_1}\right)_\beta=\frac{A_\beta}{R_2}, \quad \left(\frac{B}{R_2}\right)_\alpha=\frac{B_\alpha}{R_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10a, b)$$

VERFORMUNG DER SCHALENMITTELFLÄCHE

Die bei der Belastung der Schale entstehenden Verschiebungskomponenten eines beliebigen Punktes P der Schalenmittelfläche in Richtung der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 seien mit u, v, w bezeichnet; der Ortsvektor $\vec{r}'$ zum Punkte P', wohin der Punkt P nach der Belastung verschoben wird, ist also durch

$$\vec{r}'=\vec{r}+\vec{\rho}=\vec{r}+ue_1+ve_2+we_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

gegeben. Unter Benutzung der Gleichungen (4), (6) und (7) erhält man sehr leicht die Ableitungen von $\vec{r}'$ nach α und β, die natürlich wieder Vektoren in Richtung der Tangenten zu den Koordinatenlinien auf der verformten Mittelfläche darstellen. So erhält man z.B.

$$\vec{r}'_\alpha=\vec{r}_\alpha+u_\alpha e_1+v_\alpha e_2+w_\alpha e_3+ue_{1\alpha}+ve_{2\alpha}+we_{3\alpha}$$

oder nach (6) und (7)

$$\vec{r}'_\alpha=\left(A+u_\alpha+v\frac{A_\beta}{B}-w\frac{A}{R_1}\right)e_1+\left(v_\alpha-u\frac{A_\beta}{B}\right)e_2+\left(w_\alpha+u\frac{A}{R_1}\right)e_3 \quad . \quad (12a)$$

und ähnlich

$$\vec{r}'_\beta=\left(u_\beta-v\frac{B_\alpha}{A}\right)e_1+\left(B+v_\beta+u\frac{B_\alpha}{A}-w\frac{B}{R_2}\right)e_2+\left(w_\beta+v\frac{B}{R_2}\right)e_3 \quad . \quad (12b)$$

Durch abermalige Anwendung dieser Regeln lassen sich verhältnismässig leicht auch Ausdrücke für die zweiten Ableitungen von $\vec{r}'$ berechnen, auf deren Wiedergabe wir aber verzichten, weil wir sie im folgenden nicht brauchen werden. Aus Gleichungen für $\vec{r}'_\alpha$ und $\vec{r}'_\beta$ erhält man natürlich auch sehr leicht entsprechende Ableitungen des Verschiebungsvektors $\vec{\rho}$, indem man von obigen Ausdrücken die Ableitungen von $\vec{r}$ abzieht.

Die Verzerrungen in der Schalenmittelfläche lassen sich nun mit Hilfe der ersten Ableitungen von $\vec{r}'$ sofort berechnen und zwar auch bis zu den Gliedern höherer Ordnung in den Verschiebungen. Da wir aber auf Stabilitätsprobleme an dieser Stelle nicht eingehen können, wollen wir uns im folgenden nur auf die Glieder erster Ordnung beschränken. Die Dehnung ϵ_1 in Richtung der α-Linie ist z.B. bekanntlich durch

$$\epsilon_1=\frac{ds'-ds}{ds}=\frac{A'-A}{A} \quad \text{mit} \quad A'=+\sqrt{\vec{r}'_\alpha\cdot\vec{r}'_\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (13a)$$

gegeben, wobei $ds'=A'.d\alpha$ das Bogenelement dieser Linie nach der Verzerrung bedeutet. Für die Scherung γ_{12} des Flächenelementes mit den Längen $Ad\alpha$, $Bd\beta$ erhält man (vgl. Schrifttum 1, 4, 5, 9 und 10)

$$\gamma_{12}=\frac{\vec{r}'_\alpha \cdot \vec{r}'_\beta}{AB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13b)$$

und durch Einsetzen entsprechender Ausdrücke aus (12a, b) erhält man endgültig für die Komponenten des Verzerrungstensors bis auf die Grössen von höherer Ordnung in den Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1&=\frac{u_\alpha}{A}+v\frac{A_\beta}{AB}-\frac{w}{R_1}\\ \epsilon_2&=\frac{v_\beta}{B}+u\frac{B_\alpha}{AB}-\frac{w}{R_2}\\ \gamma_{12}&=\frac{u_\beta}{B}-u\frac{A_\beta}{AB}+\frac{v_\alpha}{A}-v\frac{B_\alpha}{AB}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a\text{–}c)$$

Ausserdem werden wir bei folgenden Ausführungen noch Ausdrücke für die Einheitsvektoren e'_1, e'_2 in Richtung der Tangenten zu den beiden Koordinatenlinien nach der Verformung, sowie den Einheitsvektor e'_3 in Richtung der Flächennormale brauchen. Es ist bis auf die Glieder höherer Ordnung

$$\left.\begin{aligned} e'_1&=\frac{\vec{r}'_\alpha}{A'}=e_1+\left(\frac{v_\alpha}{A}-u\frac{A_\beta}{AB}\right)e_2+\left(\frac{w_\alpha}{A}+\frac{u}{R_1}\right)e_3\\ e'_2&=\frac{\vec{r}'_\beta}{B'}=\left(\frac{u_\beta}{B}-v\frac{B_\alpha}{AB}\right)e_1+e_2+\left(\frac{w_\beta}{B}+\frac{v}{R_2}\right)e_3\\ e'_3&=(\vec{r}'_\alpha\times\vec{r}'_\beta)/\sqrt{E'G'-F'^2}=-\left(\frac{w_\alpha}{A}+\frac{u}{R_1}\right)e_1-\left(\frac{w_\beta}{B}+\frac{v}{R_2}\right)e_2+e_3\end{aligned}\right\} (15a\text{–}c)$$

Mit diesen Gleichungen und unter Benutzung von (6) und (7) lassen sich leicht auch Ableitungen dieser Vektoren nach α und β berechnen. So erhält man z.B.

$$\left.\begin{aligned} e'_{2\beta}=&\left[-\frac{B_\alpha}{A}+\left(\frac{u_\beta}{B}\right)_\beta-\left(v\frac{B_\alpha}{AB}\right)_\beta\right]e_1+\left[u_\beta\frac{B_\alpha}{AB}-v\frac{B_\alpha{}^2}{A^2B}-v\frac{B}{R^2{}_2}-\frac{w_\beta}{R_2}\right]e_2\\ &+\left[\frac{B}{R_2}+\left(\frac{v}{R_2}\right)_\beta+\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\beta\right]e_3\\ e'_{3\alpha}=&-\left[\frac{A}{R_1}+\left(\frac{u}{R_1}\right)_\alpha+\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\alpha+v\frac{A_\beta}{BR_2}+w_\beta\frac{A_\beta}{B^2}\right]e_1\\ &-\left[\left(\frac{v}{R_2}\right)_\alpha+\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\alpha-u\frac{A_\beta}{BR_1}-w_\alpha\frac{A_\beta}{AB}\right]e_2-\left[u\frac{A}{R_1{}_2}+\frac{w_\alpha}{R_1}\right]e_3\end{aligned}\right\} (16a, b)$$

und ganz ähnliche Ausdrücke würde man auch für die übrigen Ableitungen erhalten.

Verformung eines beliebigen Schalenelementes

Aehnlich wie bei der Plattentheorie beschränkt man sich auch bei Untersuchung der Schalen auf die Verzerrungen parallel zur Tangentialebene der Schalenmittelfläche. Wir nehmen daher auf dem Normalenvektor e_3 durch den Punkt P der Schalenmittelfläche (Abb. 1) einen Punkt P_z an und legen durch diesen im konstanten Abstand z von der Schalenmittelfläche eine neue Fläche. Alle Grössen in bezug

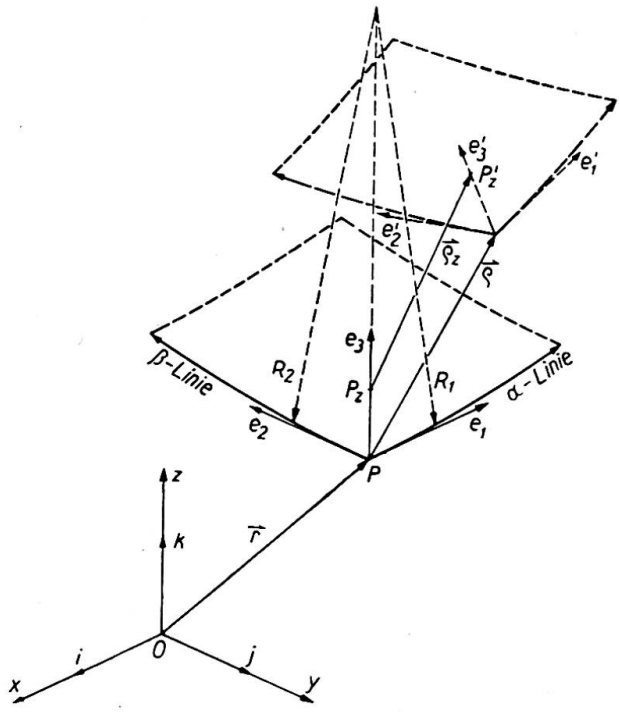

Abb. 1. Verschiebungen der Schale

auf diese Fläche wollen wir mit demselben Zeichen wie entsprechende Grössen der Mittelfläche bezeichnen, versehen sie aber noch mit dem Index $_z$.

Aus der Gleichung dieser Fläche

$$\vec{r}_z = \vec{r} + z e_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

liesse sich nun nach allgemeinen Regeln der Differentialgeometrie leicht beweisen, dass auch hier die Koordinatenlinien α=const. und β=const. Krümmungslinien sind und dass die Flächengrössen folgende Werte haben

$$A_z = A \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} = A\left(1 - \frac{z}{R_1}\right), \quad B_z = B\left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad (18a, b)$$

$$R_{1z} = R_1 - z = R_1\left(1 - \frac{z}{R_1}\right), \quad R_{2z} = R_2\left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad (19a, b)$$

was übrigens anschaulich auch unmittelbar einleuchtet (Abb. 1). Weiter sind die Einheitsvektoren dieser Fläche zu Vektoren e_1, e_2, e_3 der Schalenmittelfläche parallel und man kann deshalb die Formeln für die Verzerrungen in der Mittelfläche unverändert auf unsere neue Fläche übertragen, wenn wir nur die Verschiebungen u_z, v_z, w_z eines beliebigen Punktes P_z unserer Fläche kennen.

Um nun diese Grössen zu bestimmen, gehen wir auch hier wie bei der Biegung dünner Balken und Platten von der Bernoulli'schen Annahme aus, dass ebene Querschnitte auch nach der Verformung eben bleiben und senkrecht zur verformten Mittelfläche stehen. Für die Verschiebung $\vec{\rho}_z$ erhält man dann (vgl. Abb. 1) folgende Gleichung

$$\vec{PP'}_z = z \cdot e_3 + \vec{\rho}_z = \vec{\rho} + z \cdot e'_3$$

oder

$$\vec{\rho}_z = \vec{\rho} + z(e'_3 - e_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

oder in Komponentenform und unter Beachtung der Gleichungen (11) und (15c) geschrieben

$$\left.\begin{aligned} u_z &= u - z\left(\frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1}\right) \\ v_z &= v - z\left(\frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2}\right) \\ w_z &= w \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21a\text{–}c)$$

Zur Berechnung der Verzerrungskomponenten in der Tangentialebene wendet man Gl. (14a–c) auf die neue Fläche an und erhält z.B.

$$\epsilon_{1z} = \frac{u_{z\alpha}}{A_z} + v_z \frac{A_{z\beta}}{A_z B_z} - \frac{w_z}{R_{1z}}$$

Wenn man nun für Grössen rechts die Werte (18), (19) und (21) einsetzt und dazu noch Gl. (10a) beachtet, erhält man für ϵ_{1z}

$$\epsilon_{1z} = \frac{\epsilon_1 - z\kappa_1}{1 - \dfrac{z}{R_1}} \quad \ldots\ldots \quad (22a)$$

wobei ϵ_1 durch (14a) gegeben ist, während man für die erste Krümmungsänderung κ_1 automatisch

$$\kappa_1 = \frac{1}{A}\left(\frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1}\right)_\alpha + \frac{A_\beta}{AB}\left(\frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (23a)$$

bekommt. Auf dieselbe Weise erhält man für die Dehnung ϵ_{2z} in Richtung der zweiten Koordinatenlinie

$$\epsilon_{2z} = \frac{\epsilon_2 - z\kappa_2}{1 - \dfrac{z}{R_2}} \quad \ldots\ldots \quad (22b)$$

mit

$$\kappa_2 = \frac{1}{B}\left(\frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2}\right)_\beta + \frac{B_\alpha}{AB}\left(\frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (23b)$$

Aehnlich verfährt man auch bei der Berechnung der Scherung γ_{12z}. Hier erweist es sich am einfachsten, wenn man die mit dem Faktor z behafteten Glieder in zwei Anteile zerlegt und man erhält

$$\gamma_{12z} = \gamma_{12} - \frac{z \,.\, \lambda_1}{1 - \dfrac{z}{R_1}} - \frac{z \,.\, \lambda_2}{1 - \dfrac{z}{R_2}} \quad \ldots\ldots \quad (22c)$$

wobei die zweiten Krümmungsänderungen durch

$$\lambda_1 = \frac{1}{A}\left(\frac{w_\beta}{B} + \frac{v}{R_2}\right)_\alpha - \frac{v_\alpha}{AR_1} - w_\alpha \cdot \frac{A_\beta}{A^2 B} \quad \ldots\ldots \quad (23c)$$

und

$$\lambda_2 = \frac{1}{B}\left(\frac{w_\alpha}{A} + \frac{u}{R_1}\right)_\beta - \frac{u_\beta}{BR_2} - w_\beta \cdot \frac{B_\alpha}{AB^2} \quad \ldots\ldots \quad (23d)$$

gegeben sind. Gleichungen (22) und (23) stimmen vollkommen mit entsprechenden Gleichungen von Love (Schrifttum 7, Gl. 26 und 30, S. 524 bzw. 527) überein. Unsere Krümmungsänderung λ_1 ist bei Love mit τ bezeichnet, während λ_2 durch λ_1 und γ_{12}

ausgedrückt wird, weil, wie sich leicht mit Hilfe der Mainardi-Codazzischen Gleichungen (10) direkt beweisen lässt,

$$\lambda_1-\lambda_2=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\gamma_{12}$$

ist. Trotz der neuerdings erhobenen Zweifel (vgl. Schrifttum 8, Gl. 6 und 7) ergeben sich also obige Gleichungen zwangsläufig aus der Bernoulli'schen Annahme. Etwas anders gebaute Ausdrücke erhält man, wenn man bei ihrer Ableitung von den Loveschen Gleichungen für die Drehungen (Schrifttum 7, Gl. 24 und 25 auf S. 523) ausgeht, wobei aber dort bei q'_2 und r'_2 augenscheinlich Versehen unterlaufen sind, wie man sich leicht durch Vergleich von q'_2 mit p'_1 und r'_2 mit r'_1 überzeugt. Aus unseren Ausdrücken (16a, b) und ähnlich gebauten Gleichungen für andere Ableitungen der Einheitsvektoren auf der verformten Mittelfläche könnte man übrigens auf Grund von bekannten Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten bei Drehung verhältnismässig leicht Ausdrücke für alle sechs Drehungskomponenten erhalten, die vollkommen symmetrisch gebaut sind und von denen wir glauben, dass sie bis auf die Glieder zweiter Ordnung in den Verschiebungen u, v, w korrekt sind. Der Kürze halber aber wollen wir darauf nicht näher eingehen.

Schnittkräfte und Schnittmomente. Gleichgewichtsbedingungen

Wir gehen nun zur Berechnung der den Verformungen ϵ_{1z}, ϵ_{2z}, γ_{12z} entsprechenden Spannungen über. Wir vernachlässigen die Normalspannung σ_{3z} in Richtung von e_3 und erhalten dann bekanntlich aus dem Hooke'schen Gesetze

$$\sigma_{1z}=\frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{1z}+\nu\epsilon_{2z}),\quad \sigma_{2z}=\frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{2z}+\nu\epsilon_{1z}),\quad \tau_{12z}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{12z}\quad . \; . \; . \quad (24a\text{–}c)$$

wobei mit E der Elastizitätsmodul und mit $\nu=1/m$ die Poissonsche Konstante bezeichnet ist. Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen erweist sich weiter die Einführung der resultierenden Kraft und des resultierenden Momentes der Spannungen über die Schalendicke als vorteilhaft, wenn man sie auf die Längeneinheit der α- bzw. der β-Linie bezieht. Der Kürze halber benennen wir diese Grössen einfach als Schnittkräfte bzw. Schnittmomente und erhalten für diese Grössen in der Schnittfläche $\alpha=\text{const.}$ (Abb. 2) in der von Flügge (Schrifttum 4) herrührenden Bezeichnung folgende Gleichungen (alle Integrale sind zwischen $-h/2$ und $+h/2$ zu nehmen)

$$N_1=\int\sigma_{1z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

$$N_{12}=\int\tau_{12z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

$$Q_1=\int\tau_{13z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

$$M_1=\int z\,.\,\sigma_{1z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

$$M_{12}=\int z\,.\,\tau_{12z}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz$$

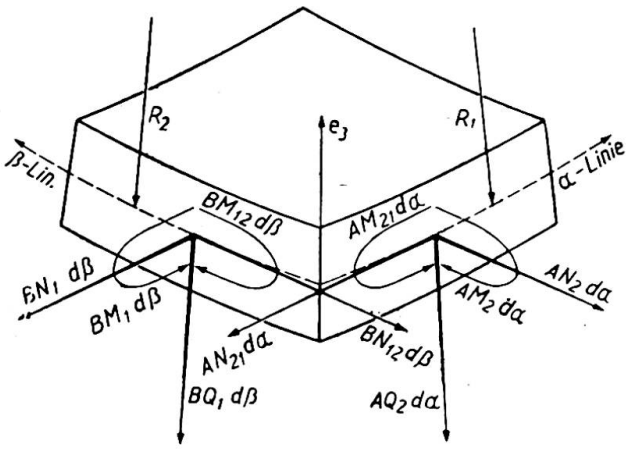

Abb. 2. Schnittkräfte und Momente

In diesen und in ähnlich gebauten Gleichungen für den Schnitt β=const. müsste man statt R_1 bzw. R_2 eigentlich die Werte der Krümmungshalbmesser R'_1 und R'_2 nach der Verformung einsetzen. Ebenso müsste man später auch die Gleichgewichtsbedingungen eigentlich für das verformte Schalenelement aufstellen und deshalb statt der ursprünglichen Grössen A, B die nach der Verformung enstandenen Werte A', B' usw. benützen. Wenn wir von Stabilitätsuntersuchungen absehen, können wir sowohl die auf die Längeneinheit der unverformten Schalenmittelfläche bezogenen Schnittkräfte und Momente als auch die für das unverformte Schalenelement angesetzten Gleichgewichtsbedingungen in erster Näherung als richtig ansehen. Durch Entwicklung von $(1-z/R_1)^{-1}$ bzw. $(1-z/R_2)^{-1}$ in eine Potenzreihe und Vernachlässigung aller höherer Potenzen von der dritten ab erhält man für die Kräfte und Momente folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
N_1&=D(\epsilon_1+\nu\epsilon_2)+K\left(\epsilon_1\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1{}^2R_2}+\kappa_1\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}\right)\\
N_2&=D(\epsilon_2+\nu\epsilon_1)+K\left(\epsilon_2\cdot\frac{R_1-R_2}{R_1R_2{}^2}+\kappa_2\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)\\
N_{12}&=\frac{1-\nu}{2}D\gamma_{12}+\frac{1-\nu}{2}K\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}\lambda_1\\
N_{21}&=\frac{1-\nu}{2}D\gamma_{12}+\frac{1-\nu}{2}K\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\lambda_2\\
M_1&=-K\left(\kappa_1+\nu\kappa_2+\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}\epsilon_1\right)\\
M_2&=-K\left(\kappa_2+\nu\kappa_1+\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\epsilon_2\right)\\
M_{12}&=-\frac{1-\nu}{2}K\left(\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma_{12}}{R_2}\right)\\
M_{21}&=-\frac{1-\nu}{2}K\left(\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma_{12}}{R_1}\right)
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(25\text{a–h})$$

mit
$$D=\frac{Eh}{1-\nu^2},\quad K=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad k^2=\frac{K}{D}=\frac{h^2}{12}\quad\ldots\ldots\quad(26)$$

Die verhältnismässig kleinen Einheitskräfte Q_1 und Q_2 berechnen wir ähnlich wie bei Platten nicht aus den Formänderungen, sondern erst später aus den Gleichgewichtsbedingungen.

Auf die bei Flügge (Schrifttum 4) auftretenden Sonderfälle angewandt, stimmen obige Ausdrücke vollkommen mit den Flüggeschen überein. Gegenüber den Loveschen Gleichungen (Schrifttum 7, Gl. 39, 42 und 44 auf S. 531, 532 bzw. 533) bestehen Unterschiede, die aber zum Teil darauf hinzuführen sind, dass bei Love auch die für das Verschwinden von ϵ_{3z} notwendige Normalspannung σ_{3z} in Betracht genommen wurde.

Mit den Schnittkräften und Momenten lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement verhältnismässig einfach ausdrücken. Wenn man—wie erwähnt—einfachheitshalber die Gleichgewichtsbedingungen am unverzerrten Schalenelement annimmt, die Aussenkraftkomponenten je Flächeneinheit der Mittelfläche in Richtung der Vektoren e_1, e_2, e_3 mit X_1, X_2, X_3 bezeichnet und die Momente der Aussenkraft um die drei Achsen durch den Mittelpunkt des Schalenelementes ver-

nachlässigt, dann lautet in vektorieller Form die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschiebung

$$[B(N_1e_1+N_{12}e_2+Q_1e_3)]_\alpha+[A(N_{21}e_1+N_2e_2+Q_2e_3)]_\beta +AB(X_1e_1+X_2e_2+X_3e_3)=0 \quad . \quad (27a)$$

und die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung

$$AB[e_1\times(N_{12}e_2+Q_1e_3)+e_2\times(N_{21}e_1+Q_2e_3)]+[B(-M_{12}e_1+M_1e_2)]_\alpha +[A(-M_2e_1+M_{21}e_2)]_\beta=0 \quad . \quad (27b)$$

Unter Benutzung der Gl. (6a–c) und (7a–c) erhält man daraus sechs Gleichungen in skalarer Form

$$\left.\begin{aligned}
&(BN_1)_\alpha+(AN_{21})_\beta+A_\beta N_{12}-B_\alpha N_2-\frac{AB}{R_1}Q_1+ABX_1=0\\
&(BN_{12})_\alpha+(AN_2)_\beta-A_\beta N_1+B_\alpha N_{21}-\frac{AB}{R_2}Q_2+ABX_2=0\\
&(BQ_1)_\alpha+(AQ_2)_\beta+AB\left(\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}\right)+ABX_3=0\\
&-(BM_{12})_\alpha-(AM_2)_\beta+A_\beta M_1-B_\alpha M_{21}+ABQ_2=0\\
&(BM_1)_\alpha+(AM_{21})_\beta+A_\beta M_{12}-B_\alpha M_2-ABQ_1=0\\
&-\frac{M_{12}}{R_1}+\frac{M_{21}}{R_2}+N_{12}-N_{21}=0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (28a\text{–}f)$$

Um nun die endgültigen Gleichungen für die Verschiebungen zu bekommen, drückt man aus Gl. (28d, e) die beiden Querkräfte Q_1 und Q_2 durch Momente aus und setzt sie in Gl. (28a–c) ein. Unter Benutzung von Gl. (25a–h), (14a–c) und (23a–d) erhält man daraus ein System dreier partieller Differentialgleichungen für die drei Verschiebungen u, v, w, durch deren Integration bei Berücksichtigung gegebener Randbedingungen das Problem der Verschiebungen, und damit auch das der Spannungsbestimmung, prinzipiell gelöst wird. Auf eine explizite Hinschreibung dieser Gleichungen für den allgemeinsten Fall müssen wir allerdings verzichten, weil sie ausserordentlich unübersichtlich sind und ihre Aufstellung sich nicht lohnt. Die letzte skalare Gleichgewichtsbedingung (28f) fällt weg, weil sie schon in den Grössen ϵ_1, ϵ_2, γ_{12}, κ_1, κ_2, λ_1 und λ_2 identisch befriedigt wird, wie man sich leicht durch Einsetzen der Ausdrücke aus (25c, d, g, h) überzeugt.

Näherungen bei dünnen Schalen

Aus der elementaren Elastizitätstheorie ebener Spannungs- und Dehnungszustände ist bekannt, dass die Bernoulli'sche Hypothese nur bei einigermassen dünnen Scheiben zutrifft und dass die Zusatzglieder bei Verschiebungen annäherend mit der zweiten Potenz des Verhältnisses Trägerhöhe : Trägerlänge zunehmen. Daraus können wir schliessen, dass auch bei Schalen die Bernoulli'sche Annahme nur dann zutreffen wird, wenn das oben genannte Verhältnis nicht zu gross sein wird. Wir wollen weiter annehmen, dass das Verhältnis der Schalendicke zu den beiden Hauptkrümmungshalbmessern klein gegenüber eins sei und dass man es deshalb überall vernachlässigen darf. Bei vielen praktischen Ausführungen beträgt dieses Verhältnis höchstens ein paar Prozent und ein solcher Fehler in der Spannungsberechnung ist im Hinblick auf die Unsicherheiten bei der Bestimmung der Schalendicke, des Elastizitätsmoduls und anderer Grössen sicher zulässig.

Mit der Annahme, dass die Schalendicke klein gegenüber den beiden Krümmungshalbmessern sei, vereinfachen sich aber unsere Gleichungen ziemlich stark. So sieht man z.B., dass schon in Gl. (21a–b) rechts die Verschiebungen u und v einmal mit dem Faktor eins und das andere Mal aber mit z/R_1 bzw. z/R_2 auftreten. Wir können also diese letzten Summanden streichen und erhalten für die Verschiebungen ausserhalb der Mittelfläche einfach dieselben Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_z &= u - z \cdot \frac{w_\alpha}{A} \\ v_z &= v - z \cdot \frac{w_\beta}{B} \\ w_z &= w \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29a\text{–}c)$$

wie bei Platten. In Gleichungen (18a, b), (19a, b) und (22a–c) für die Grössen A_z, B_z, R_{1z}, R_{2z} und für die Verformungen ausserhalb der Mittelfläche streichen wir ebenfalls überall die Verhältnisse z/R_1 bzw. z/R_2 und erhalten so

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_{1z} &= \epsilon_1 - z\kappa_1 \\ \epsilon_{2z} &= \epsilon_2 - z\kappa_2 \\ \gamma_{12z} &= \gamma_{12} - 2z\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30a\text{–}c)$$

mit etwas veränderten Ausdrücken für die Krümmungsänderungen

$$\left.\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A}\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\alpha + \frac{A_\beta}{AB^2} w_\beta \\ \kappa_2 &= \frac{1}{B}\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\beta + \frac{B_\alpha}{A^2B} w_\alpha \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda &= \frac{1}{A}\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\alpha - \frac{A_\beta}{A^2B} w_\alpha = \frac{1}{B}\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\beta - \frac{B_\alpha}{AB^2} w_\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (31a\text{–}c)$$

Wenn man dann weiter noch in den Gleichungen für die Schnittkräfte und Schnittmomente dieselbe Vernachlässigung zulässt, erhält man statt (25a–h)

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= D(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) & N_2 &= D(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) & N_{12} = N_{21} &= \frac{1-\nu}{2} D\gamma_{12} \\ M_1 &= -K(\kappa_1 + \nu\kappa_2) & M_2 &= -K(\kappa_2 + \nu\kappa_1) & M_{12} = M_{21} &= -(1-\nu)K\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32a\text{–}f)$$

In den Gleichungen (25a–h) sind also jetzt alle sogenannte Zusatzglieder weggefallen. Man könnte aber auch unmittelbar von Gl. (25) zu (32) gelangen unter der Voraussetzung, dass h/R_1 und h/R_2 klein sind gegen eins und dass es sich um einen Biegespannungszustand handelt, bei welchem die grössten Biegungsverformungen $\kappa_1 h$, $\kappa_2 h$ und λh von derselben Grössenordnung sind wie ϵ_1, ϵ_2 und γ_{12}. Jedes Glied in (25), welches in (32) nicht mehr auftritt, ist nämlich mit dem Verhältnis h/R_1 oder h/R_2 multipliziert gegenüber anderen, der Grössenordnung nach gleichen Gliedern, und kann deshalb vernachlässigt werden.

Auch die Gleichgewichtsbedingungen können bei kleinen h/R_1 und h/R_2 etwas vereinfacht werden. Wenn man nämlich die durch Q_1 und Q_2 in Gl. (28a, b) eingeführten Glieder näher betrachtet, findet man dass sie in diesen Gleichungen bei Schnittkräften N_1, N_2 und N_{12} ausnahmslos vernachlässigt wurden. Man kann also in beiden ersten Gleichungen (28) auch die Summanden $(ABQ_1)/R_1$ bzw. $(ABQ_2)/R_2$

streichen und erhält so die für die Berechnung des Verschiebungs- und Spannungszustandes massgebenden fünf Gleichungen aus (28a–e)

$$\left.\begin{aligned}
&(BN_1)_\alpha+(AN_{21})_\beta+A_\beta N_{12}-B_\alpha N_2+ABX_1=0\\
&(BN_{12})_\alpha+(AN_2)_\beta-A_\beta N_1+B_\alpha N_{21}+ABX_2=0\\
&(BQ_1)_\alpha+(AQ_2)_\beta+AB\left(\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}\right)+ABX_3=0\\
&ABQ_1=(BM_1)_\alpha+(AM_{21})_\beta+A_\beta M_{12}-B_\alpha M_2\\
&ABQ_2=(BM_{12})_\alpha+(AM_2)_\beta-A_\beta M_1+B_\alpha M_{21}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (33a\text{–}e)$$

Was nun die letzte Gleichgewichtsbedingung (28f) betrifft, so erweist sie sich nicht mehr als Identität. Aber wir können doch annehmen, dass sie durch unsere Ausdrücke genügend genau befriedigt wird, weil beim Biegespannungszustand die Grössen M_{12}/R_1 und M_{21}/R_2 klein sind gegenüber $N_{12}=N_{21}$ und deshalb gestrichen werden können. Indem man nämlich für die in (28f) auftretenden Kräfte und Momente die Ausdrücke aus (32) einführt, erkennt man, dass in den beiden ersten Summanden grössenordnungsmässig gleiche Glieder wie bei den letzten zwei auftreten, die aber dort noch mit h/R_1 bzw. h/R_2 multipliziert sind.

Gleichungen (33a–e) bilden den Ausgangspunkt für die Aufstellung der Differentialgleichungen für Verschiebungen. Dazu braucht man wieder nur die Grössen Q_1 und Q_2 aus den letzten zwei Gleichungen in (33c) einzusetzen und dann alle in (33a–c) auftretenden Schnittkräfte und Schnittmomente durch Verschiebungen mittels der Gleichungen (14), (30), (31) und (32) auszudrücken. Im allgemeinen erhält man zwar auch mit allen diesen Vereinfachungen noch immer sehr unübersichtliche Gleichungen; aber durch entsprechende Wahl der Koordinaten α und β erhält man in vielen, praktisch sehr wichtigen Sonderfällen verhältnismässig einfache Ausdrücke, die sich für numerische Berechnungen viel besser eignen als die in voriger Nummer erwähnten allgemeineren Beziehungen. Wir wollen dies ganz kurz am Beispiel der Zylinderschalen zeigen, wo die Verhältnisse besonders einfach sind.

Biegespannungstheorie dünner Zylinderschalen

Bei zylindrischen Schalen nehmen wir als Gauss'sche Koordinate α die Länge der Erzeugenden auf der Schalenmittelfläche von einem gewissen Querschnitt und für β die Länge der Leitlinien von einem bestimmten Axialschnitt ab. Dann hat man

$$A=B=1, \quad \frac{1}{R_1}=0, \quad \frac{1}{R_2}=f(\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Gleichungen (14) und (31) für die Verzerrungen und Krümmungsänderungen nehmen dann eine sehr einfache Form an und ergeben für die Schnittkräfte und Momente folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
&N_1=D\left[u_\alpha+\nu\left(v_\beta-\frac{w}{R_2}\right)\right]\\
&N_2=D\left(v_\beta-\frac{w}{R_2}+\nu u_\alpha\right)\\
&N_{12}=N_{21}=\frac{1-\nu}{2}D(u_\beta+v_\alpha)\\
&M_1=-K(w_{\alpha\alpha}+\nu w_{\beta\beta})\\
&M_2=-K(w_{\beta\beta}+\nu w_{\alpha\alpha})\\
&M_{12}=M_{21}=-(1-\nu)K\,.\,w_{\alpha\beta}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35a\text{–}f)$$

während die Gleichgewichtsbedingungen (33) nun folgendermassen lauten

$$\left.\begin{aligned} N_{1\alpha}+N_{21\beta}+X_1&=0\\ N_{12\alpha}+N_{2\beta}+X_2&=0\\ Q_{1\alpha}+Q_{2\beta}+\frac{N_2}{R_2}+X_3&=0\\ Q_1&=M_{1\alpha}+M_{21\beta}\\ Q_2&=M_{12\alpha}+M_{2\beta}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (36a\text{–}e)$$

Aus den letzten zwei Gleichungen erhält man mittels (35d–e) Ausdrücke für Q_1 und Q_2 in der Verwölbung w und Gl. (36a–c), in Verschiebungen u, v, w ausgedrückt, lauten daher

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\alpha}+\frac{1-\nu}{2}u_{\beta\beta}+\frac{1+\nu}{2}v_{\alpha\beta}-\nu\frac{w_\alpha}{R_2}+\frac{X_1}{D}&=0\\ \frac{1+\nu}{2}u_{\alpha\beta}+\frac{1-\nu}{2}v_{\alpha\alpha}+v_{\beta\beta}-\left(\frac{w}{R_2}\right)_\beta+\frac{X_2}{D}&=0\\ \frac{1}{R_2}\left(\nu u_\alpha+v_\beta-\frac{w}{R_2}\right)-k^2\,.\,\Delta\Delta w+\frac{X_3}{D}&=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (37a\text{–}c)$$

mit

$$\Delta\Delta w=w_{\alpha\alpha\alpha\alpha}+2w_{\alpha\alpha\beta\beta}+w_{\beta\beta\beta\beta} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Gleichungen (37) stellen die auf Schalen beliebiger Querschnittsform ausgedehnten, etwas vereinfachten Flüggeschen Gleichungen (71) (Schrifttum 4, S. 118) dar.

Statt die Spannungsverteilung auf dem Umwege über Verschiebungen zu berechnen, ist es manchmal vorteilhafter, unmittelbar die Schnittkräfte zu bestimmen. Indem wir in der Gleichgewichtsbedingung (36c) Q_1 und Q_2 durch w ausdrücken, bekommen wir nämlich aus (36a–c) und aus der Verträglichkeitsbedingung zwischen N_1, N_2, N_{12} und w folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} N_{1\alpha}+N_{21\beta}+X_1&=0\\ N_{12\alpha}+N_{2\beta}+X_2&=0\\ \frac{N_2}{R_2}-K\,.\,\Delta\Delta w+X_3&=0\\ N_{1\beta\beta}-\nu N_{1\alpha\alpha}+N_{2\alpha\alpha}-\nu N_{2\beta\beta}-2(1+\nu)\,.\,N_{12\alpha\beta}+\frac{Eh}{R_2}w_{\alpha\alpha}&=0\end{aligned}\right\} \quad (39a\text{–}d)$$

Bei der Integration solcher Gleichungssysteme baut man aber gewöhnlich die Lösung aus Summen von Gliedern auf, in denen alle unbekannte Grössen als Produkte gewisser Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen mit unbekannten Funktionen der anderen Veränderlichen auftreten, wobei natürlich die willkürlich gewählten Funktionen gewissen Randbedingungen genügen müssen. In solchen Fällen tritt in den übrigen Randbedingungen eine Schnittkraft nicht auf und es ist daher ratsam, sie aus (39a–d) zu eliminieren. Wenn wir z.B. die Schnittkräfte und die Verwölbung w als bekannte Funktionen von α annehmen, tritt in den Schnittebenen β=const. die Schnittkraft N_1 nicht mehr auf; wir drücken sie also aus (39a) durch andere Grössen aus und eliminieren sie dann aus (39d). Aus (39b–d) erhält man so drei Differentialgleichungen für N_2, N_{21} und w

$$\left.\begin{aligned} N_{21\alpha}+N_{2\beta}+X_2&=0\\ N_2-K\,.\,R_2\,.\,\Delta\Delta w+R_2X_3&=0\\ N_{2\alpha\alpha\alpha}-\nu N_{2\alpha\beta\beta}-N_{21\beta\beta\beta}-(2+\nu)N_{21\alpha\alpha\beta}+\frac{Eh}{R_2}w_{\alpha\alpha\alpha}+\nu X_{1\alpha\alpha}-X_{1\beta\beta}&=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad (40a\text{–}c)$$

Mit unseren Annahmen können wir aber unser Problem auch auf eine einzige Differentialgleichung für die Verwölbung w zurückführen. Aus (40a–c) eliminiert man N_2 und N_{21} und bekommt

$$\left.\begin{aligned} K\,.\,\Delta\Delta(R_2\,.\,\Delta\Delta w)+\frac{Eh}{R_2}w_{\alpha\alpha\alpha\alpha}+\nu X_{1\alpha\alpha\alpha}-X_{1\alpha\beta\beta} \\ +(2+\nu)X_{2\alpha\alpha\beta}+X_{2\beta\beta\beta}-\Delta\Delta(R_2X_3)=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (41)$$

Auf Einzelheiten bei der numerischen Durchführung der Rechnungen können wir an dieser Stelle nicht eingehen, sondern verweisen auf das Schrifttum 6.

SCHRIFTTUM

(1) BIEZENO, C. B. und GRAMMEL, R. *Technische Dynamik*. Berlin, 1939.
(2) BLASCHKE, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I. 3. Auflage. Berlin, 1930.
(3) BURINGTON, R. S. and TORRANCE, C. C. *Higher Mathematics*. New York, 1939.
(4) FLÜGGE, W. *Statik und Dynamik der Schalen*. Berlin, 1934.
(5) GIRKMANN, K. *Flächentragwerke*. Wien, 1946.
(6) KUHELJ, A. "Približný výpočet válcových skořapek (Angenäherte Berechnung der Zylinderschalen)," *Sbornik vys. šk. technické Dra Eduarda Beneše v Brne*, **17**, 67, 1948, S. 123–156.
(7) LOVE, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition. Cambridge, 1934.
(8) OSGOOD, W. R., and JOSEPH, J. A. "On the General Theory of Thin Shells," *J. Appl. Mechanics*, **17**, 4. December 1950, pp. 396–399.
(9) REISSNER, H. "Energiekriterium der Knicksicherheit," *Z.a.M.M.***5**, 6, 1925, S. 475–478.
(10) TREFFTZ, E. "Mathematische Elastizitätstheorie," *Handbuch der Physik*, herausgegeben von H. Geiger und K. Scheel, Band VI, Berlin, 1928.

Zusammenfassung

Aus Gauss'schen und Weingartenschen Ableitungsgleichungen der Flächentheorie und unter Benutzung der Bernoulli'schen Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte lassen sich sehr leicht Ausdrücke für die Verzerrungen eines beliebigen Schalenelementes ableiten. Lovesche Gleichungen für diese Grössen werden bestätigt. Zur angenäherten Behandlung dünner Schalen wird die Vernachlässigung der Schalendicke gegenüber den beiden Hauptkrümmungshalbmessern der Mittelfläche vorgeschlagen. Daraus ergeben sich vereinfachte Ausdrücke für die Krümmungsänderungen und auch der Einfluss der Querkräfte auf das Gleichgewicht in der Tangentialebene kann vernachlässigt werden. Mit dieser Annahme lassen sich bei zylindrischen Schalen verhältnismässig einfache Gleichungen sowohl für die Verschiebungen als auch für die Schnittkräfte angeben.

Summary

From the formulæ of Gauss and Weingarten for the theory of surfaces and under Bernoulli's assumption that plane sections remain plane, the expressions for the strain in the shell are derived. On the above assumption, Love's equations for the components of strain are correct. To simplify the analytical treatment of thin shells, it is proposed to neglect their thickness, when compared with the main radii of curvature of the middle surface. This assumption gives simplified expressions for the changes of curvature, and the influence of the stress-resultants normal to the middle surface in the equations of equilibrium in the tangential plane can be neglected. In the case of a cylindrical shell, comparatively simple equations are derived both for the components of displacement and for the stress-resultants.

Résumé

A partir des équations établies par Gauss et par Weingarten pour la théorie des surfaces et en utilisant l'hypothèse de Bernoulli concernant la conservation de la planéité des sections, on peut établir très aisément des expressions donnant les déformations d'un élément de voûte mince arbitraire. Les équations de Love concernant ces grandeurs sont ici confirmées. Pour traiter le problème des voûtes minces, il est proposé de négliger leur épaisseur par rapport aux deux rayons de courbure principaux. Il en résulte des expressions simplifiées pour les variations de courbure; l'influence des efforts de cisaillement sur les conditions de l'équilibre dans le plan tangentiel peut également être négligée. Dans ces conditions, on obtient des équations relativement simples pour les voûtes cylindriques, tant en ce qui concerne les déformations que les efforts dans les sections.