Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 4 (1952)

Artikel: L'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages-poids: théorie et solution numérique

Autor: Lardy, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5039

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AII 3

L'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages-poids

(Théorie et solution numérique)

The influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams

(Theory and numerical method)

Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand von Gewichtsstaumauern

(Theorie und numerische Methode)

PROF. DR. P. LARDY

Secrétaire général de l'A.I.P.C., Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

INTRODUCTION

Généralités

La prise en compte de l'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages signifie un progrès dans leur investigation par le calcul. Les études effectuées aussi bien sur les barrages arqués que sur les barrages-poids démontrent suffisamment l'importance de la coaction du barrage et du sol de fondation.

Il s'agit là d'un problème éminemment difficile de la théorie mathématique de l'élasticité.

Ce travail donne avant tout un aperçu très succinct sur une méthode appropriée de calcul numérique. L'exemple calculé montre avec suffisamment de clarté l'influence remarquable de l'élasticité du sol sur les contraintes, qui se trouvent grandement altérées à la base et le long des parements amont et aval des barrages-poids.

Position du problème

Nous nous bornons au cas le plus simple et ne considérons, comme forces extérieures, que l'action du poids-propre et de la pression latérale de l'eau (bassin rempli) sur le barrage-poids de section triangulaire sur sol élastique, en négligeant les effets de la sous-pression et de la température.

Le mur est défini par:

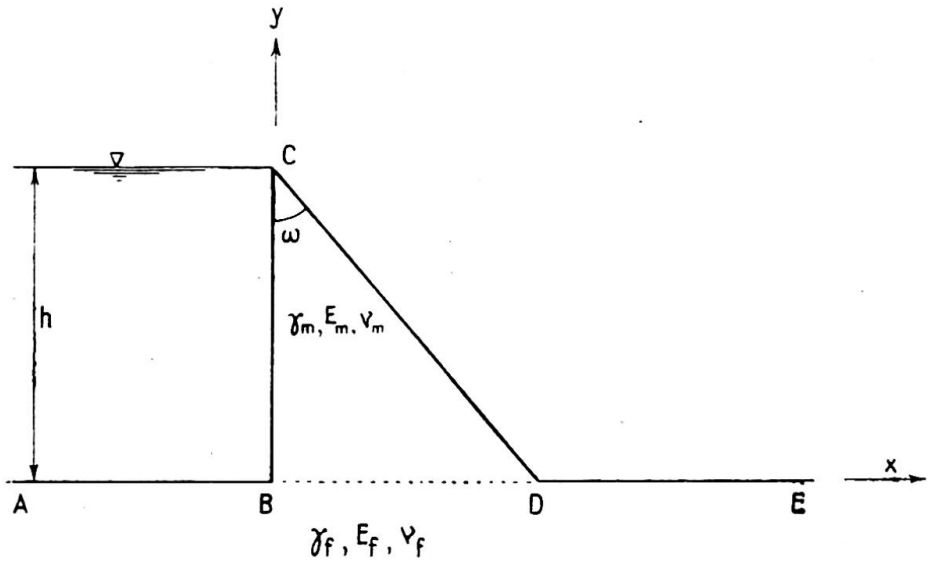

Fig. 1.

Le parement amont est supposé vertical

h=hauteur du barrage
λ=tg ω (ω=angle d'ouverture du mur)
$b=\lambda \,.\, h$=largeur du barrage
γ_m=poids spécifique du mur
E_m=module d'élasticité du mur
ν_m=coefficient de contraction du mur

Le sol de fondation est assimilé à un demi-plan, défini par les constantes:

γ_f=poids spécifique du sol
E_f=module d'élasticité du sol
ν_f=coefficient de contraction du sol

Les contraintes sont désignées par:

σ=contraintes normales
τ=contraintes de cisaillement

Les déplacements sont:

u=déplacements horizontaux
v=déplacements verticaux.

Le sol de fondation est supposé élastique, homogène et isotrope. Le mur sera calculé en état de contraintes planes (tranche isolée), le sol par contre en état de déformations planes (étendue indéfinie du sol).

Le problème est défini par les trois groupes de conditions suivants:

(1) Conditions d'équilibre et de compatibilité, données par la théorie de l'élasticité, dans le triangle (mur) d'une part et dans le demi-plan (sol) d'autre part.
(2) Conditions aux limites pour les efforts normaux σ et les efforts tranchants τ sur le contour ABCDE.
(3) Conditions de continuité des contraintes et des déplacements sur le bord BD, commun au mur et au sol.

Difficultés principales

La difficulté principale du problème réside dans l'établissement de la connexion entre le mur et le sol, c'est-à-dire dans l'expression de la continuité des contraintes et des déplacements le long du bord commun BD. Cette difficulté se trouve accrue du fait que les deux éléments en coaction, le mur et le sol, ont des caractéristiques différentes:

Le mur: forme triangulaire, avec E_m et ν_m,
Le sol: demi-plan, avec E_f et ν_f.

Chacun des deux domaines est caractérisé par une fonction d'Airy (fonction "potentielle" des contraintes), dont l'expression mathématique diffère essentiellement d'un domaine à l'autre, d'où la difficulté de la connexion sur le bord commun BD.

Une autre difficulté apparaît quand on exprime les conditions aux limites sur les parements, où les efforts tranchants τ, ainsi que les efforts normaux σ sur le parement aval s'annullent. On est conduit à un problème de "valeurs propres" défini par des arguments complexes et donnant lieu à des familles de "fonctions propres" dont l'établissement est singulièrement laborieux.

Ce sont là les deux difficultés essentielles et *caractéristiques* du problème.

Solutions analytiques

Tölke* a donné une solution analytique rigoureuse du problème. Cependant, cette solution est présentée de manière à décourager le lecteur, tant les grandes lignes de sa démonstration sont enfouies dans un fatras analytique inutile. Deux autres critiques seront formulées ultérieurement.

Tölke décompose le problème en deux parties et procède en principe de façon analogue à celle utilisée dans le calcul des systèmes hyperstatiques en statique appliquée.

Une coupure effectuée à la base BD permet de calculer le mur comme système "isostatique," ce qui conduit à la règle du trapèze généralisée, c'est-à-dire à une répartition linéaires des contraintes. La coupure entre le mur et le sol, ouverte dans le système isostatique, doit être, pour satisfaire aux conditions d'élasticité, refermée au moyen d'un système de contraintes "hyperstatiques" (contraintes "propres"). Il faut donc exprimer que les déplacements relatifs effectifs u et v sont nuls en chaque point de la base du mur.

Les calculs, extraordinairement laborieux, conduisent à des séries qui ne convergent que lentement. La détermination des constantes d'intégration d'après la méthode de Ritz n'est pas effectuée de manière correcte dans le mémoire de Tölke.

On peut envisager d'autres solutions analytiques par un choix différent des systèmes de coordonnées, par exemple, mais l'ampleur des calculs reste immense.

Pour ces différentes raisons, nous avons envisagé une solution pratique au moyen du *calcul aux différences* qui conduit, en principe, toujours à une solution numérique. Cet avantage reste, bien entendu, lié à l'inconvénient qu'un tel résultat ne peut prétendre à une solution de caractère général.

Dans notre problème, le calcul aux différences s'est révélé extrêmement fertile, grâce au fait qu'il a été combiné avec la "méthode de relaxation" pour la résolution des équations linéaires.

Quelques indications sur le principe de cette méthode numérique, ainsi que sur les conclusions d'ordre pratique qui découlent de l'exemple traité, forment l'objet principal de cet exposé.

* Tölke: *Wasserkraftanlagen*, Handbibliothek für Bauingenieure, Verlag Springer, Berlin, 1938.

Calcul aux différences et méthode de relaxation

Remarques générales

Le calcul aux différences transforme les expressions différentielles en "différences finies," dont la forme et la structure sont celles avant le passage à la limite (intervalle de base tendant vers zéro), qui caractérise le calcul différentiel.

Les fonctions inconnues dépendent ici des deux variables indépendantes x et y et sont définies, dans notre problème, par des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre (équations biharmoniques) ainsi que par d'autres équations aux dérivées partielles aux limites et sur la coupure entre le mur et le sol.

L'exactitude de la solution augmente en principe quand on diminue l'intervalle de base, donc quand on augmente le nombre des points du réseau de base, mais le nombre des équations linéaires à résoudre augmente, lui aussi, rapidement; l'ampleur des calculs numériques peut devenir prohibitive et l'exactitude finale peut en souffrir. Il existe en quelque sorte un optimum dans le choix de l'intervalle de base.

C'est pourquoi, les avantages du calcul aux différences ne peuvent être jugés de manière absolue, mais uniquement en relation avec la méthode de résolution des équations linéaires choisie dans chaque cas.

Ayant à résoudre, dans notre problème, quelques centaines d'équations linéaires, nous avons renoncé aux méthodes classiques de résolution. D'autre part, il serait illusoire de calculer les solutions des équations linéaires avec une exactitude exagérée, alors que l'erreur provenant du fait que les intervalles de base sont finis, peut être non négligeable.

Nous avons donc adopté une méthode de résolution par approximation successive, dite *méthode de relaxation.*

Méthode de relaxation

Cette méthode, due à Southwell, possède des avantages marqués sur les autres méthodes procédant par approximation successive.

En désignant par L_i ($i=1, 2, \ldots n$) les membres de gauche d'un système de n équations linéaires, on nomme "résidu" de l'équation la valeur de L_i quand on assigne aux inconnues des valeurs quelconques. La solution du système correspond à $L_i=0$ pour chaque équation.

Si dès lors on commence par un système de valeurs approchées pour les inconnues (ce qui est toujours possible), les L_i seront différents de zéro. La méthode de relaxation consiste à réduire, par opérations successives sur les inconnues, tous les résidus à zéro.

La manière d'opérer cette réduction forme précisément la technique de la méthode de relaxation. Ces opérations peuvent être effectuées aisément sur la base de schémas géométriques, appelés "Relaxation pattern"; ceux-ci sont caractéristiques de la structure des équations et contiennent de manière simple et claire le principe des calculs numériques à effectuer.

Le Prof. Stiefel de l'Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich a généralisé cette technique de la relaxation pour les équations biharmoniques de notre problème en appliquant le principe de réduction par variation simultanée de plusieurs inconnues et en établissant des méthodes appropriées pour accélérer la convergence de l'itération.

L'avantage principal de la méthode de relaxation réside dans le fait que le calcul numérique est limité au calcul des résidus, ceci sans l'obligation de calculer directement les valeurs intermédiaires des inconnues, comme c'est le cas pour les méthodes ordinaires d'itération.

Les calculs effectués ont démontré le grand avantage de la méthode de relaxation, adaptée de manière appropriée aux problèmes du genre traités ici.

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Données

Les données sont celles de la fig. 1 avec les valeurs numériques suivantes:

$$h=1 \text{ (normée)}$$
$$b=0{,}8$$
$$\gamma_m=\gamma_f=2{,}5 \text{ t./m.}^3$$
$$E_m=4\,E_f, \quad \nu_m=\frac{1}{6}, \quad \nu_f=\frac{1}{4}$$

Le mur est soumis au poids-propre et à la pression latérale de l'eau, le sol aux réactions du mur et à la pression verticale de l'eau.

Conditions

Les trois groupes de conditions (voir, Introduction, Position du probléme) sont à remplir:

(1) Conditions générales d'équilibre et de compatibilité (équations biharmoniques):

Dans le mur (triangle): $\Delta\Delta w_m=0$

Dans le sol (demi-plan): $\Delta\Delta w_f=0$

w_m, w_f=fonctions d'Airy pour les domaines respectifs

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$=opérateur laplacien

(2) Conditions aux limites sur le contour ABCDE:

Exprimées par les charges extérieures au moyen des grandeurs w_m, $\frac{\partial w_m}{\partial n}$; w_f, $\frac{\partial w_f}{\partial n}$

n=direction de la normale

(3) Continuité des contraintes et des déplacements le long de la coupure BD:

$$w_f=w_m, \quad \frac{\partial w_f}{\partial y}=\frac{\partial w_m}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w_f}{\partial y^2}=\frac{4}{15}\cdot\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}+\frac{13}{45}\cdot\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 w_f}{\partial y^3}=\frac{4}{15}\cdot\frac{\partial^3 w_m}{\partial y^3}-\frac{79}{45}\cdot\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2\partial y}+\frac{13}{18}$$

La forme de ces deux dernières équations, due à des considérations sur l'énergie du système, se prête particulièrement bien au calcul de relaxation.

Calcul numérique

Les conditions énoncées doivent être transposées en équations aux différences.

Pour les besoins du calcul aux différences, le demi-plan doit être remplacé par un rectangle suffisamment grand. Les deux domaines, triangle et rectangle de

remplacement, sont recouverts d'un premier réseau de points (réseau caractéristique du calcul aux différences).

Il s'avéra très vite que la relaxation dans le rectangle était fort laborieuse. Cette difficulté fut résolue par le Dr. Preissmann, Zurich, qui réussit à transformer les formules de Boussinesq du demi-plan pour des fonctions d'influence en expressions appropriées au calcul aux différences et à la méthode de relaxation. Cette simplification supprime la relaxation dans le demi-plan; dès lors, la relaxation peut être limitée au domaine du triangle et aux deux bords de la coupure.

Les valeurs de départ sont celles données par la règle du trapèze.

La relaxation fut grandement facilité par l'emploi de la machine à calculer avec commandes automatiques de l'Institut de Mathématiques appliquées de l'Ecole Polytechnique Fédérale (Direction: Prof. Stiefel). Grâce aussi à l'établissement de "relaxation pattern" appropriés, l'ampleur du calcul de relaxation a pu être tenue dans des limites raisonnables.

Ce premier réseau, relativement large, a permis de résoudre le problème avec suffisamment d'exactitude dans la zone moyenne du mur et de sa base, mais s'est révélé insuffisant pour les zones des parements ainsi que pour les deux extrémités de la base qui forment des domaines singuliers.

Dès lors, un réseau de densité double fut introduit. Grâce à des procédés spéciaux pour accélérer la convergence de la relaxation, la solution numérique de ces zones particulières put être menée à bien.

Résultats

Les trois tableaux qui suivent contiennent, en comparaison, les valeurs extrêmes aux deux parements.

TABLEAU I

Contraintes normales verticales σ_y

Section	Contraintes: parement côté eaux			Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6–6 42,5 m.	5,4	6,6	22	9,0	10,6	18
7–7 32,5 m.	6,3	8,4	33	10,5	13,6	30
8–8 22,5 m.	7,3	10,4	49	12,1	17,6	46
9–9 12,5 m.	8,2	14,6	78	13,7	22,4	63
10–10 2,5 m.	9,1	18,2	100	15,2	30,0	97

Degré d'exactitude; ampleur des calculs

Les calculs ont été effectués avec cinq décimales. Les contraintes, découlant des fonctions w par l'opération de la deuxième différence, sont évidemment moins exactes que celles-ci. On arrive à une estimation de l'erreur moyenne d'environ 5%, ce qui est amplement suffisant.

Il est clair qu'à l'avenir, l'ampleur des calculs se trouvera réduite du fait que les essais et tâtonnements du début ne se répéteront plus.

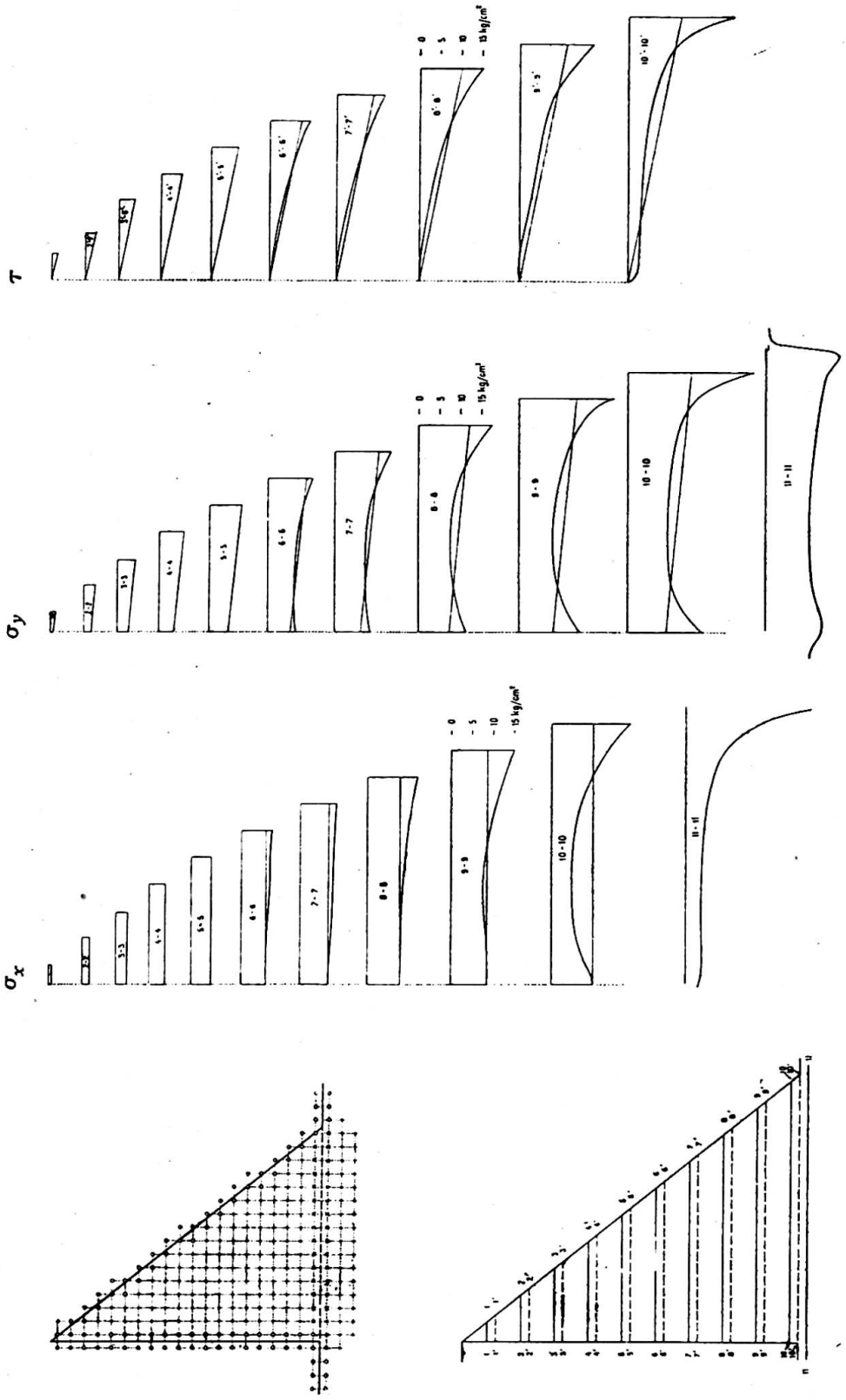

Fig. 2.

TABLEAU II

Contraintes de cisaillement τ

Section	Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6′–6′ 40 m.	7,5	9,6	28
7′–7′ 30 m.	8,8	12,0	36
8′–8′ 20 m.	10,0	14,8	48
9′–9′ 10 m.	11,2	18,2	63
10′–10′ —	12,5	25,0	100

TABLEAU III

Contraintes normales horizontales σ_x

Section	Contraintes: parement aval		
Distance de la coupure en mètres	Règle du trapèze kg./cm.²	Calcul exact kg./cm.²	Différence %
6–6 42,5 m.	5,8	7,2	24
7–7 32,5 m.	6,8	8,8	30
8–8 22,5 m.	7,8	12,0	56
9–9 12,5 m.	8,8	15,0	70
10–10 2,5 m.	9,8	19,0	94

La technique de relaxation ayant été fortement développée au cours de ces calculs, il est possible, à l'avenir, de profiter de l'expérience acquise (Etablissement de tableaux définitifs de fonctions pour la résolution de l'équation $\Delta\Delta w=0$). Remarquons également que certains résultats intermédiaires de caractère assez général, se trouvant établis une fois pour toutes (transposition des formules de Boussinesq en équations aux différences, etc.), peuvent être utilisés tels quels par la suite.

Il reste néanmoins clair que ce genre de calculs s'adresse à des spécialistes qualifiés.

CONCLUSIONS

Les résultats obtenus prouvent qu'il est possible de traiter, sur une base numérique appropriée, des problèmes extrêmement difficiles et compliqués de la théorie de l'élasticité, ceci avec une exactitude suffisante et une ampleur de travail raisonnable, à condition de tenir compte des expériences faites.

Les résultats (voir tableaux et fig. 2) sont remarquables et montrent que les écarts

entre la solution indiquée et la règle du trapèze sont beaucoup plus importants qu'on ne pouvait s'y attendre, avant tout dans la zone de base du mur (jusqu'à 100%).

Des écarts de 10% se font sentir jusqu'à près de la mi-hauteur du mur, donc dans un domaine très grand.

Dans les zones médianes des sections horizontales, les contraintes sont plus petites que celles calculées par la règle du trapèze. Dans le sol de fondation, les contraintes σ_y s'atténuent plus rapidement que les autres.

Ces résultats soulignent la valeur de tels calculs et posent, entre autre, à nouveau la question de la sécurité et des contraintes admissibles dans le béton, puisque, dans certaines zones, les écarts conduisent à une majoration des contraintes d'environ 100% sur celles du calcul ordinaire. On peut envisager la généralisation de cette méthode pour d'autres profils que le triangle et tirer profit des résultats acquis pour simplifier et accélérer les calculs, qui peuvent être complétés, dans les zones critiques, par des développements analytiques. La prise en compte de la souspression et des effets de la température ne présente aucune difficulté.

Cet exemple démontre l'efficacité et la valeur de méthodes numériques appropriées, appliquées à des problèmes dont la solution analytique rigoureuse est, aujourd'hui encore, pratiquement inaccessible.

Résumé

Ce mémoire donne un aperçu succinct sur une méthode numérique donnant la solution du problème de "l'influence de l'élasticité du sol sur les contraintes des barrages-poids."

La transformation des équations différentielles en équations aux différences et leur résolution au moyen du calcul de "relaxation" permet de résoudre le problème avec une exactitude suffisante et remplace avantageusement la solution purement analytique pratiquement inaccessible.

Les conclusions mettent en évidence la nécessité de tels calculs en établissant l'altération profonde subie par les contraintes sous l'influence de l'élasticité du sol, ceci principalement à la base du mur.

Summary

This paper includes a comprehensive survey of a numerical method for solving the problem of the "Influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams."

The conversion of the differential equations into equations of difference, and also their solution by the "relaxation method," leads to a sufficiently accurate solution of the problem and replaces with advantage the purely analytical method, which is unusable in practice.

The conclusions emphasise the necessity of such calculations and throw a very impressive light on the important influence of the elasticity of the soil on the conditions of stress in gravity dams, particularly at the foot of the dam-wall.

Zusammenfassung

Diese Arbeit vermittelt einen gedrängten Ueberblick über eine numerische Methode zur Lösung des Problems: "Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand von Gewichtsstaumauern."

Die Verwandlung der Differentialgleichungen in Differenzengleichungen sowie ihre Auflösung nach der "Relaxationsmethode" führt zu einer genügend genauen Lösung des Problems und ersetzt mit Vorteil die praktisch unzugängliche, rein analytische Methode.

Die Schlussfolgerungen unterstreichen die Notwendigkeit solcher Berechnungen und beleuchten sehr eindrücklich den hervorragenden Einfluss der Baugrundnachgiebigkeit auf den Spannungszustand der Gewichtsstaumauern, insbesondere in der Umgebung der Fundamentfuge.