Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 9 (1972)

Artikel: Théorie des équivalences: Fondements et applications au calcul des dalles et des coques

Autor: Absi, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9631

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie des équivalences
Fondements et applications au calcul des dalles et des coques

Theorie der Gleichwertigkeiten
Grundlagen und Anwendung bei der Berechnung von Platten und Schalen

Theory of the Equivalences
Fundamentals and Applications of the Calculation of Plates and Shells

E. ABSI
Délégué Général Scientifique du Centre Expérimental
de Recherches et d'Etudes du Bâtiment et des Travaux Publics
Paris, France

La Théorie des équivalences constitue une approche générale permettant de substituer à l'étude d'un corps chargé celle d'un corps fictif plus accessible au calcul. Ce corps fictif peut avoir des caractéristiques et des lois de comportement qui n'ont aucun sens physique. Cette théorie, que nous développons depuis une dizaine d'années, s'applique à tous les problèmes qui dérivent d'un champ et se prête aisément au traitement sur ordinateur. Elle nous a permis d'aborder avec succès l'étude de divers ouvrages d'art complexes. L'équivalence peut être réalisée entre un corps continu et un corps discret, entre deux corps continus ou entre deux corps discrets. Dans la présente étude nous illustrerons, en particulier, son application au calcul des dalles et des coques.

I) EXPOSE GENERAL.

Considérons un corps déformable soumis à un chargement dérivant d'un potentiel $\emptyset$. Le potentiel total π du système (corps + charges), supposé conservatif, s'écrit :

$$\pi = \int_V U_o \, dV + \emptyset \qquad (1)$$

où U_o est la densité d'énergie de déformation dans le corps chargé.

La résolution de ce système revient à rechercher un champ de déformation compatible avec les liaisons du corps et minimisant la fonction π ($\delta\pi = 0$).

Soit un deuxième corps occupant le même espace V que le premier et soumis au même chargement. Désignons par U'_o sa densité d'énergie de déformation. Le potentiel total π' du système s'écrit alors :

$$\pi' = \int_V U'_o \, dV + \emptyset \qquad (2)$$

De même, la résolution de ce système revient à trouver le champ de déformation minimisant π' ($\delta\pi' = 0$).

Supposons qu'on ait ($\delta\pi = \delta\pi'$). Dans ce cas, les deux systèmes sont dits <u>équivalents</u>. Ils admettent le même champ de déformation. En effet, tout champ de déformation minimisant π minimise aussi π' ($\delta\pi = \delta\pi' = 0$).

Il y a, en particulier, équivalence si les deux densités d'énergie de déformation sont égales ($U_o = U'_o$) ou si elles diffèrent d'une certaine

quantité u_o ($U_o = U'_o + u_o$) telle que l'on ait

$$\delta \int_V u_o \, dV = 0 \tag{3}$$

Dans ce cas on a aussi ($\delta\pi = \delta\pi'$).

II) PROBLEMES DE CONTRAINTES PLANES

Soit une plaque mince chargée dans son plan moyen (x_1, x_2) et d'épaisseur h (fig.1). Le tenseur de déformation e_{ij} est donné en fonction des composantes u_1 et u_2 du déplacement u par la relation :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i}\right) \tag{4}$$

La densité d'énergie de déformation U_o par unité de surface s'écrit, d'après la théorie de l'élasticité :

$$U_o = \frac{Eh}{2(1-\vartheta^2)}\left[(e_{11})^2 + (e_{22})^2 + 2\vartheta\, e_{11}e_{22} + 2(1-\vartheta)(e_{12})^2\right] \tag{5}$$

On peut trouver des corps équivalents formés par des modèles élémentaires supposés suffisamment petits pour que le tenseur e_{ij} reste uniforme au sein de chacun d'eux. Les modèles envisagés sont constitués par des éléments travaillant à la flexion composée. Calculons leur énergie de déformation.

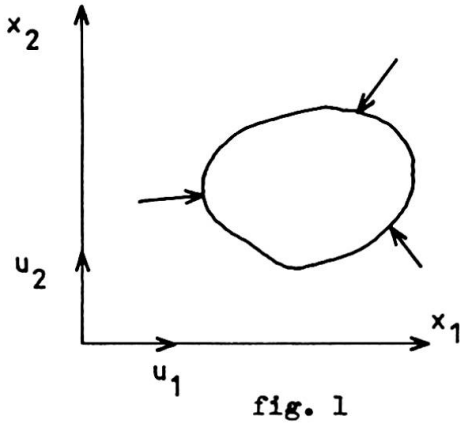

fig. 1

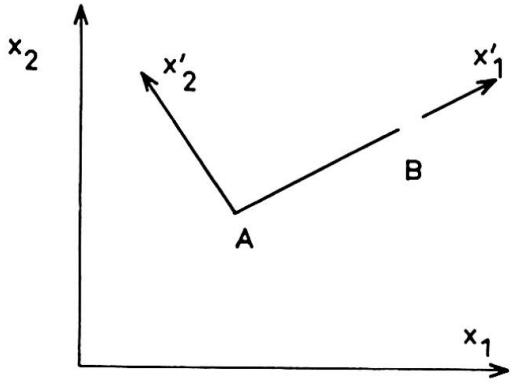

fig. 2

Soit une barre AB de faible longueur l. On lui associe un système de référence propre x'_k tel que x'_1 soit dirigé suivant AB (fig.2). Désignons par u'_k la composante de $\vec{u}$ suivant x'_k et par α_i les cosinus directeurs de x'_1 (ou de AB). On a alors :

$$u'_1 = \alpha_i \, u_i \tag{6}$$

L'allongement unitaire ε de AB s'écrit donc :

$$\varepsilon = \frac{\delta u'_1}{\delta x'_1} = \alpha_i \frac{\delta u_i}{\delta x_j}\frac{\delta x'_j}{\delta x'_1} = \alpha_i \alpha_j \frac{\delta u_i}{\delta x_j} = \alpha_i \alpha_j \, e_{ij} \tag{7}$$

De même, en désignant par β_i les cosinus directeurs de x'_2, on a :

$$u'_2 = \beta_i \, u_i \tag{8}$$

$$\frac{\delta u'_2}{\delta x'_1} = \beta_i \frac{\delta u_i}{\delta x_j} \frac{\delta x_j}{\delta x'_1} = \beta_i \alpha_j \frac{\delta u_i}{\delta x_j} \tag{9}$$

L'effort normal N dans AB est évidemment

$$N = E\,S \cdot \varepsilon = ES.\alpha_i \alpha_j e_{ij} \tag{10}$$

et l'énergie de déformation correspondante est donc :

$$W' = \frac{1}{2} N \cdot \varepsilon l = \frac{1}{2} E\,S\,l\,\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\rho(\alpha_i \alpha_j e_{ij})^2 \qquad (\rho = E.S.l) \tag{11}$$

Supposons qu'on applique à l'extrémité libre B une force transversale F et que l'extrémité A subisse une certaine rotation θ (fig.3). La longueur l étant petite, le déplacement BB' s'écrit, compte tenu de la relation (11)

$$BB' = \Delta + l\,\theta = \frac{\delta u'_2}{\delta x'_1} l = \beta_i \alpha_j \frac{\delta u_i}{\delta x_j} l \tag{12}$$

D'après les lois de la résistance des matériaux, on a

$$F = \frac{3EI}{l^3} \Delta \tag{13}$$

L'énergie de déformation correspondante s'écrit :

$$W'' = \frac{1}{2} F.\Delta = \frac{3}{2} \frac{EI}{l} \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 \qquad (\eta = 3\,\frac{EI}{l}) \tag{14}$$

Si au noeud A, supposé rigide, aboutissent divers éléments (AB, AC, .. AN), l'équilibre des moments pris par rapport à A donne (fig.3)

$$(l.F)_{AB} + (l.F)_{AC} + \ldots + (l.F)_{AN} = 0 \tag{15}$$

En combinant les diverses équations (12) à (15), écrites pour l'ensemble des éléments (AB, AC, ..., AN), il est possible d'éliminer la rotation θ du noeud A et d'avoir l'expression (14) de W" en fonction des $\frac{\delta u_i}{\delta x_j}$ uniquement.

$$W'' = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 = f\left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j}\right) \tag{16}$$

Divers modèles équivalents sont possibles. Examinons en particulier les modèles rectangulaires et en losange.

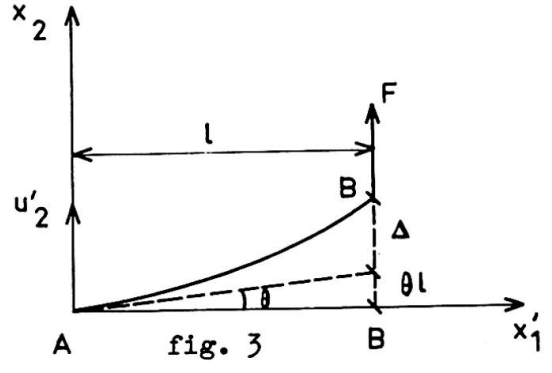

fig. 3

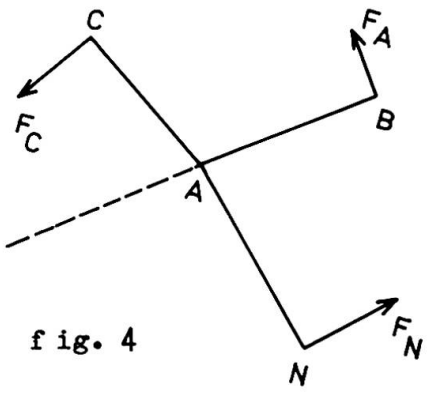

fig. 4

a) Modèle rectangulaire : Les noeuds situés aux sommets du rectangle ABCD sont articulés et le centre H est un noeud rigide (fig.5). En conséquence, les barres situées sur le contour ABCD travaillent uniquement à la compression. Par contre, les éléments diagonaux (HA, HB, HC et HD) travaillent à la flexion composée.

Désignons par A l'élément de surface délimité par le contour ABCD et par W l'énergie de déformation susceptible d'emmagasiner. Exprimons la condition d'équivalence en écrivant l'égalité des énergies de déformation. On a des équations (5), (11) et (14) :

$$W = AU_0 = W'_{AB} + W'_{BC} + W'_{CD} + W'_{DA} + W''_{HA} + W''_{HB} + W''_{HC} + W''_{HD} \qquad (17)$$

Remplaçons chaque terme par sa valeur en fonction des termes $\frac{\delta u_i}{\delta x_j}$ ou des e_{ij}. On trouve par identification :

$$\left.\begin{aligned} \rho_{AB} &= \frac{Ah}{2}(2\lambda+\mu-\mu\cot g^2\alpha) & \rho_{AC} &= \frac{Ah}{2}(2\lambda+\mu-\mu\, tg^2\alpha) \\ \rho_{HA} &= \frac{Ah}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} & \eta_{HA} &= \frac{Ah(\mu-\lambda)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

b) Modèle en losange : Les quatre sommets du losange ABCD sont articulés et le centre H est, par contre, un noeud rigide (fig.6). En suivant le même raisonnement que précédemment, on trouve tout calcul fait

$$\left.\begin{aligned} \rho_{AD} &= \frac{Ah\lambda}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} & \rho_{HA} &= \frac{Ah}{2}(\lambda+2\mu-\mu\cot g^2\alpha) \\ \rho_{HD} &= \frac{Ah}{2}\left[\lambda+2\mu-\lambda\, tg^2\alpha\right] & \frac{\eta_{HB}\ \eta_{HD}}{\eta_{HB}+\eta_{HD}} &= \frac{Ah(\mu-\lambda)}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

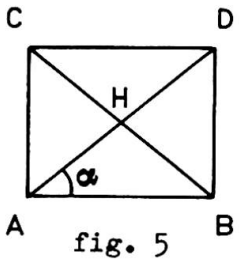

fig. 5

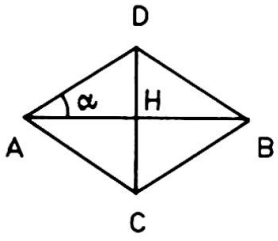

fig. 6

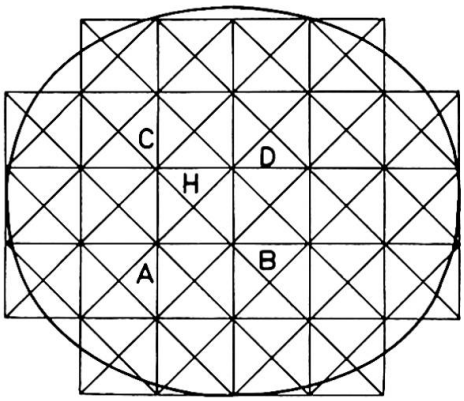

fig. 7

On voit des équations (18) et (19) que les paramètres η de divers éléments diagonaux s'annulent si $\lambda = \mu$. Dans ce cas, les modèles précités deviennent à barres articulées. On peut démontrer que cette propriété est tout à fait générale.

La figure (7) donne un schéma de maillage possible.

III) ETUDE DES DALLES.

Considérons une dalle d'épaisseur variable h(x, y) dont le feuillet moyen est contenu dans le plan (x, y). L'énergie de déformation emmagasinée par unité de surface est donnée par la relation :

$$U_o = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}\,\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} - \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}\right)^2\right]\right\} \qquad (20)$$

où w est la flèche prise par la dalle et D est sa rigidité :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

On se propose de trouver un système équivalent constitué par des poutres travaillant à la flexion et à la torsion. L'étude générale des éléments triangulaires permet d'obtenir divers types d'éléments équivalents et qui sont intéressants pour les applications.

Soit un élément triangulaire constitué par les trois poutres ij, jk, ki (fig.8). L'énergie de déformation W_{ij} emmagasinée par une de ces poutres ij s'écrit dans son système de référence propre (X, Y) :

$$W_{ij} = \frac{1}{2} (EIl)_{ij} \left(\frac{\delta^2 w}{\delta Y^2}\right)^2 + \frac{1}{2} (\mu Jl)_{ij} \left(\frac{\delta^2 w}{\delta X\, \delta Y}\right)^2 \qquad (21)$$

où EI et μJ caractérisent respectivement les rigidités à la flexion et à la torsion des barres considérées.

On a évidemment des expressions similaires pour les deux autres poutres jk et ki. On peut réduire toutes ces expressions, par un changement de variable, au système de référence général (x, y). En désignant par A la surface du triangle ijk, l'égalité des potentiels s'écrit :

$$W_{ij} + W_{jk} + W_{ki} = AU_o \qquad (22)$$

Par identification, on trouve tout calcul fait :

$$(EIl)_{ij} = A\,(1+\nu)\,\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha \sin\beta} \qquad (23)$$

$$(\mu Jl)_{ij} = (EIl)_{ij} + 4\nu A \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\alpha \sin 2\beta} \qquad (24)$$

Pour les autres poutres on obtient des expressions similaires.

a) Approximation de la théorie des dalles : La théorie classique des dalles admet que le feuillet moyen est inextensible. Ceci revient à considérer que la courbure totale de la déformée de ce feuillet, qui se produit par flexion après chargement, reste quasi nulle. Par conséquent :

$$u_o = \frac{D}{2}\left[\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x\, \delta y}\right)^2\right] \neq 0 \qquad (25)$$

La densité d'énergie de déformation U'_o dans le corps équivalent peut donc s'écrire :

$$U'_o = U_o \not{=} \frac{D}{2}\left[\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x\, \delta y}\right)^2 \right] \qquad (26)$$

L'expression précitée de U'_o devient une égalité parfaite si le coefficient de Poisson est nul ou si la dalle est parfaitement encastrée sur son contour. En effet, S étant la surface de la dalle, on peut démontrer aisément que dans ce dernier cas

$$\delta \int_S u_o \, dS = 0 \qquad (27)$$

Ce développement est à rapprocher de l'équation (3).

b) Modèle équivalent formé par un grillage orthogonal de poutres :

En adoptant l'expression (26) de U'_o, on peut obtenir un modèle équivalent constitué par un grillage orthogonal de poutres dont l'utilisation est très commode dans la pratique (fig.9). Déterminons les caractéristiques des divers éléments (ij, kl, ...). Par analogie avec l'équation (22), on a :

$$AU'_o = W_{ij} + W_{kl} \qquad (28)$$

où A est la surface du rectangle (ij x kl). En remplaçant chaque terme par sa valeur, on obtient :

$$AD\left[\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x\, \delta y}\right)^2 \right] =$$

$$(EIl)_{ij} \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}\right)^2 + \left[(\mu Jl)_{ij} + (\mu Jl)_{kl} \right] \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y}\right)^2 + (EIl)_{kl} \left(\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}\right)^2$$

Par identification on trouve immédiatement

$$(EIl)_{ij} = (EIl)_{kl} = \frac{1}{2}\left[(\mu Jl)_{ij} + (\mu Jl)_{kl} \right] = AD \qquad (29)$$

On voit que les rigidités à la flexion du modèle équivalent sont bien définies. Par contre, les rigidités à la torsion sont arbitraires pourvu que la condition (29) soit réalisée.

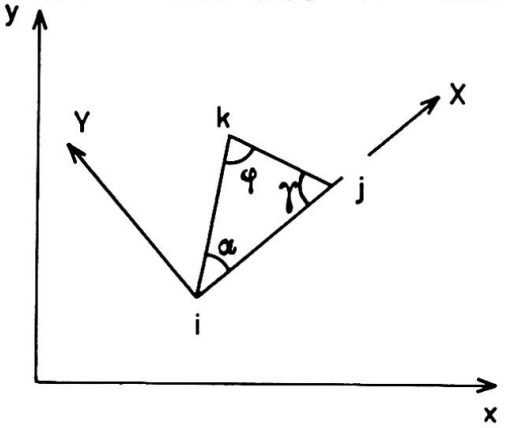

fig.8

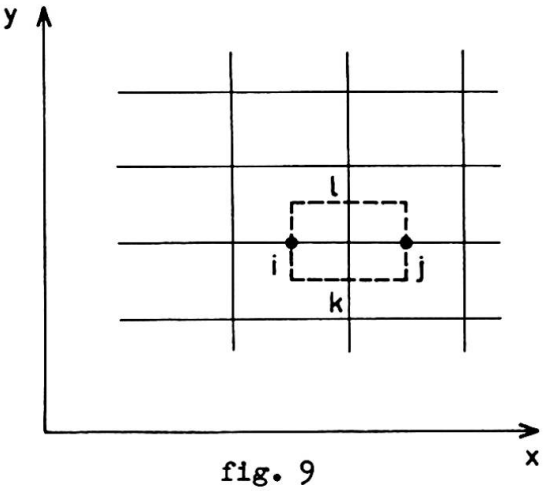

fig. 9

IV) COQUES ET VOILES MINCES.

La densité d'énergie de déformation d'une coque par unité de surface s'obtient en additionnant celle d'une plaque, équation (5), avec celle d'une dalle, équation (20). En conséquence, tout type de modèle équivalent valable simultanément pour un problème d'élasticité plane et de dalle l'est aussi pour les coques et les voiles minces.

V) COMPATIBILITE DES MODELES.

La juxtaposition de divers modèles autour d'un même noeud courant, ou sur le contour, doit satisfaire en ce noeud aux conditions d'équilibre exprimées en fonction du tenseur de déformation e_{ij}. Si ces conditions ne sont pas réalisées, les modèles sont dits incompatibles entre eux.

VI) APPLICATIONS.

La Direction des Ouvrages d'Art de la S.N.C.F. a confié au C.E.B.T.P. l'étude théorique et expérimentale des deux ponts-dalles :

- Passage Supérieur de Saint-Pol-sur-Ternoise
- Passage Inférieur de Hautepierre

Les figures (10-a, b, c et 11-a, b, c) illustrent les résultats numériques donnés par la Théorie des équivalences et ceux obtenus par mesures sur modèles réduits dans le cas d'un chargement uniforme.

VII) CONCLUSIONS.

La théorie que nous proposons constitue une approche générale pouvant servir de cadre à diverses méthodes particulières et justifier parfois leur utilisation. Son application nous a permis de retrouver, d'une manière relativement simple, certains résultats déjà connus et d'en établir de nouveaux. Le traitement d'un corps continu par équivalence avec un corps discret est très intéressant dans la pratique. C'est un procédé d'une utilisation aisée et qui s'adapte parfaitement aux ordinateurs.

Il est à noter que cette théorie reste valable que le milieu soit isotrope ou anisotrope, à comportement linéaire ou non linéaire.

RESUME

Dans la présente étude nous examinons les fondements de la Théorie des équivalences ainsi que son application aux problèmes de contraintes planes, de dalles ou de coques. Une étude comparative est donnée concernant deux ponts-dalles.

P.S. Il est à rappeler que les coefficients d'élasticité E et de Poisson sont reliés aux coefficients de Lamé λ et μ par les relations :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1+\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1 +\nu)}$$

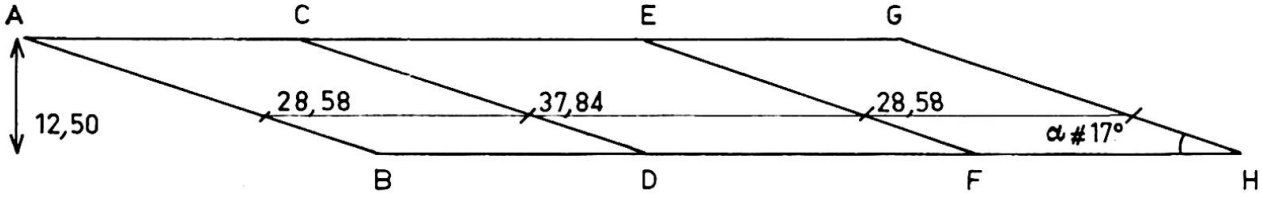

fig. 10a – Pas. sup. Saint Pol sur Ternoise.

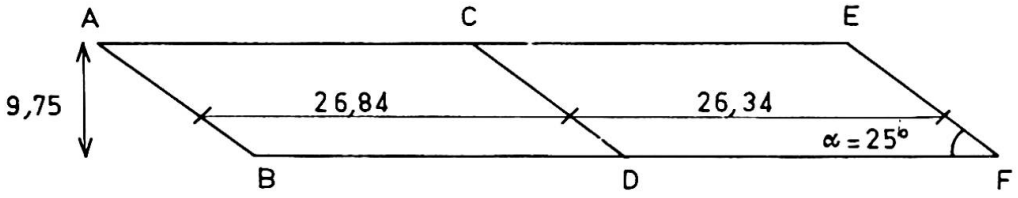

fig. 11a – Pas. sup. Hautepierre.

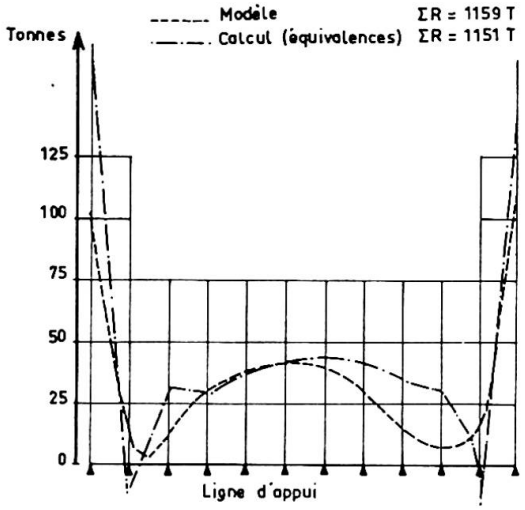

fig. 10 b – P.S. St. Pol sur Ternoise
Réactions des appuis intermédiaires.

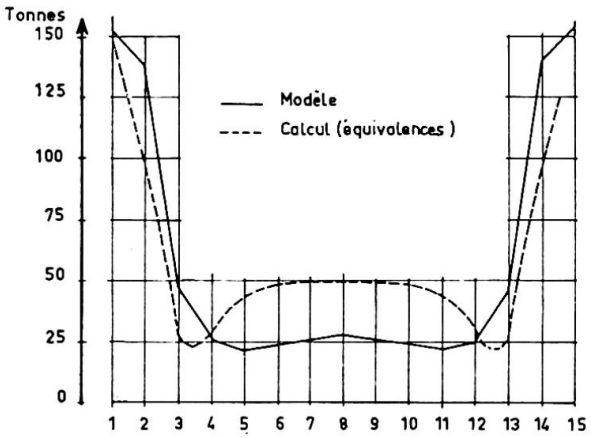

fig. 11 b – P.I. Hautepierre
Réaction de l'appui CD

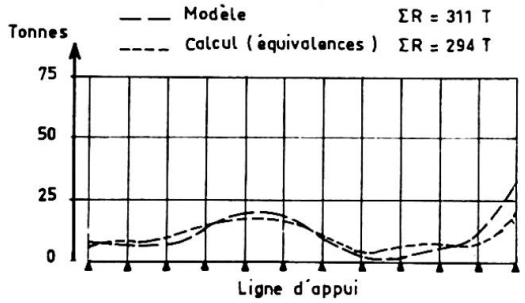

fig. 10 – P.S. St. Pol sur Ternoise
Réactions des appuis extrêmes A B.

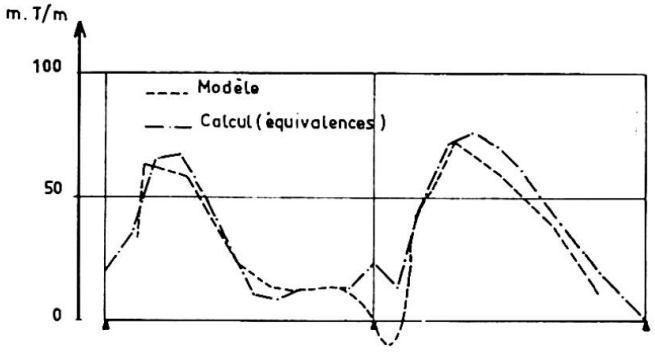

fig. 11 c – P.I. Hautepierre . Variation du moment principal maximal parallèlement sur CD.