Berechnung prismatischer Scheibenwerke

Autor(en): **Gruber, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **1 (1932)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-718

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

BERECHNUNG PRISMATISCHER SCHEIBENWERKE

CALCUL DES CONSTRUCTIONS PRISMATIQUES A PAROIS MINCES

CALCULATION OF THIN-WALLED PRISMATIC STRUCTURES

Dr. Ing. ERNST GRUBER,
Wien.

A. Einleitung.

Im Eisenbetonbau finden Schalenkonstruktionen in den letzten Jahren in steigendem Maße Verwendung. Während nun die stetig gekrümmten Schalen in ihrer Theorie schon weitgehend erforscht sind, wurden über die sogenannten Scheibenwerke — das sind Schalen, welche aus ebenflächigen Teilen zusammengesetzt sind — bisher nur wenige Untersuchungen angestellt. Eine gründliche Kenntnis der Statik dieser neuartigen Gebilde ist jedoch sehr erwünscht, da diese Tragwerksformen bei der Lösung verschiedenster Bauaufgaben mit Vorteil verwendet werden können. Abb. 1 und 2 zeigen zwei einfache Beispiele.

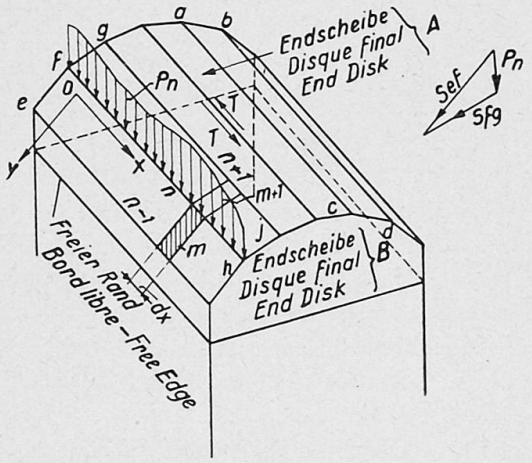

Fig. 1.

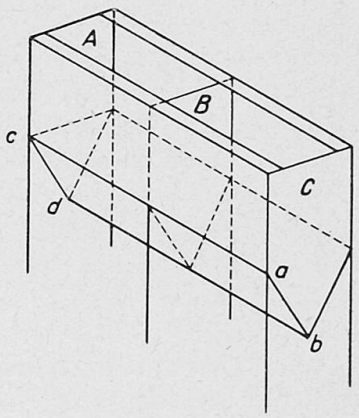

Fig. 2.

Der erste Versuch einer Berechnung von Scheibenwerken wurde m. W. von EHLERS unternommen (siehe „Der Bauingenieur" 1930, Seite 125). Nach seiner Auffassung, und diese ist auch grundsätzlich richtig, wirken die einzelnen Scheiben *a b c d* als Träger, die in den Querscheiben *A, B, C* u. s. w. gestützt und längs der Kanten miteinander unverschieblich verbunden sind. EHLERS nahm nun an, daß die Verbindung längs der Kanten gelenkig sei, so daß von einer Scheibe zur anderen nur Schubkräfte T (siehe Abb. 1) übertragen werden können. Eine Überleitung von Biegemomenten X_n, deren Drehachsen in den jeweiligen Kanten liegen und von Querkräften Q_z, deren Richtungen normal zu den jeweiligen Scheibenebenen stehen, wäre sonach unmöglich.

Wir nehmen nun vorerst an, daß die äußeren Kräfte nur in den Kanten angreifen (Abb. 1), dann kann jede Last P_n durch Kräfte S_{ef} und S_{fg}, welche in den angrenzenden Scheiben ef und fg wirken, ersetzt werden.[1]) Betrachtet man nun eine aus dem Verbande losgelöste Scheibe $f\,g\,h\,j$ und bringt man an dieser die freiwerdenden Schnittkräfte T und die äußeren Lasten S_{fg} an, so erkennt man, daß jede einzelne Scheibe nur von Kräften, die in ihrer Ebene wirken, ergriffen wird. Das Flächenwerk zerfällt daher in lauter ebene Tragwerke. Die einzelnen Scheiben stellen die ebenen Träger dar.

Aus konstruktiven Gründen verbindet man jedoch die einzelnen Scheiben längs der Kanten nicht gelenkig, sondern steif. Die Folge davon ist, daß Momente X_n und Querkräfte Q_z auftreten werden. Die Spannungen, die durch X_n und Q_z entstehen, hat man bisher stillschweigend vernachlässigt, in der Meinung, sie seien ähnlich wie die Nebenspannungen in einem steifknotigen Fachwerk nur von sekundärer Bedeutung. Die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen werden jedoch das Gegenteil zeigen. Berechnet man nämlich ein Scheibenwerk das eine Mal unter der Annahme

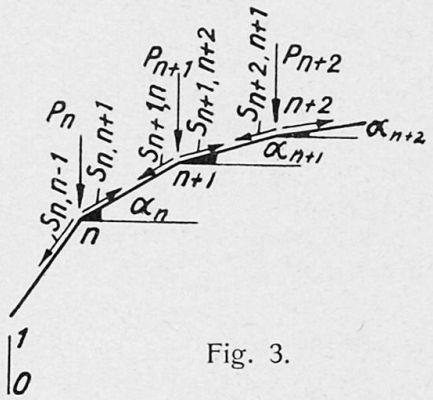

Fig. 3.

von gelenkigen, das andere Mal unter der Annahme von steifen Scheibenverbindungen, so ergibt sich Folgendes: 1. Die größten Durchbiegungen beim gelenkigen Scheibenwerk sind oft drei- bis viermal so groß wie beim steif verbundenen Tragwerk. 2. Die Spannungen in den gefährlichen Querschnitten unterscheiden sich in beiden Fällen oft bis zu 100 %. Zugspannungen für den einen Fall verwandeln sich in Druckspannungen für den anderen Fall. Ein der Wirklichkeit entsprechendes Berechnungsverfahren darf daher die Größen X_n und Q_z nicht unterdrücken. Wir werden nun im Folgenden eine Theorie der prismatischen Scheibenwerke unter Berücksichtigung der steifen Scheibenverbindungen entwickeln.

Für die Berechnung dieses vielfach statisch unbestimmten Tragwerkes wählen wir das längs der Kanten gelenkig verbundene Scheibenwerk — von nun an kurz Gelenkscheibenwerk genannt — als Grundsystem. Wir müssen uns daher zuerst mit diesem befassen.

B. Das gelenkige Scheibenwerk.

Wir nehmen nun an, daß die äußeren Lasten nicht nur in den Kanten angreifen, sondern auch in Zwischenpunkten. In Abb. 3 ist der Querschnitt durch das Tragwerk dargestellt. Die Knotenlasten P_n erhält man, indem man die Scheiben $n-1, n$ und $n, n+1$ als in den Punkten $\ldots n-1, n, n+1 \ldots$ lotrecht gestützt auffaßt. P_n ist dann der statisch bestimmte Auflagerdruck der Scheiben $n-1, n$ und $n, n+1$ in n. Der Einfluß der auftretenden

[1]) Zu diesem Zwecke müssen nur die Lasten in S_{ef} und S_{fg} zerlegt werden.

Biegungen muß erst später in die Rechnung eingeführt werden. Die so erhaltenen P_n werden nun durch Kräfte ersetzt, welche in den Scheibenebenen wirken. Zu diesem Zwecke zerlegen wir P_n in

$$S_{n,n+1} = P_n \cdot \frac{\cos \alpha_{n-1}}{\sin(\alpha_{n-1} - \alpha_n)} = P_n \cdot a_{n,n+1} \tag{1}$$

$$S_{n,n-1} = P_n \cdot \frac{\cos \alpha_n}{\sin(\alpha_{n-1} - \alpha_n)} = P_n \cdot a_{n,n-1} \tag{2}$$

Analog ergibt sich die Zerlegung für P_{n+1} und P_{n-1}, indem in den Gl. (1) und (2) der Zeiger n um 1 vermehrt bezw. vermindert wird. In jeder Scheibe

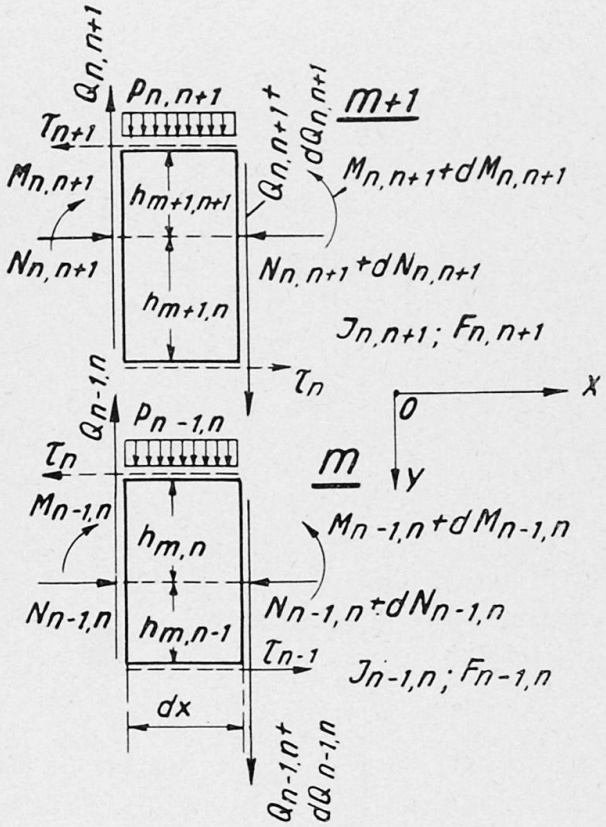

Fig. 4.

wirken nun zwei Kräfte, die sich algebraisch addieren und zwar in der Scheibe $n, n+1$

$$p_{n,n+1} = S_{n+1,n} - S_{n,n+1} = P_{n+1} \cdot a_{n+1,n} - P_n \cdot a_{n,n+1} \tag{3}$$

und in der Scheibe $n-1, n$

$$p_{n-1,n} = S_{n,n-1} - S_{n-1,n} = P_n \cdot a_{n,n-1} - P_{n-1} \cdot a_{n-1,n} \tag{4}$$

Führt man diese Rechnung für alle P_n durch, so ergibt sich für jede Scheibe eine in ihr wirkende Belastung $p_{n,n+1}$. Um die Vorzeichen zu regeln, sei in jeder Scheibe ein rechtwinkeliges Koordinatensystem xy angenommen. Die y-Richtung entspricht der Richtung $n, n-1$. Blickt man entgegengesetzt der Richtung der x-Achse, so läuft die Zählung der n im Sinne des Uhrzeigers (siehe Abb. 1).

Wir schneiden nun, wie aus Abb. 1 ersichtlich, aus zwei benachbarten Scheiben $n-1, n$ und $n, n+1$ zwei Scheibenelemente m und $m+1$ heraus und bringen an den Schnittstellen die freiwerdenden Schnittkräfte und Be-

lastungen an. In Abb. 4 sind die beiden Elemente in eine Ebene geklappt zur Darstellung gebracht. Da die Scheiben als ebene Träger wirken, so haben

$$M_{n+1,n},\ N_{n+1,n},\ Q_{n+1,n} \text{ u. } p_{n,n+1}$$

und

$$M_{n,n-1},\ N_{n,n-1},\ Q_{n,n-1} \text{ u. } p_{n,n-1}$$

je eine gemeinsame Wirkungsebene. Alle auftretenden Wirkungsgrößen sind Funktionen von x.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für jedes der beiden Elemente folgen die Beziehungen:

$$\frac{d\,Q_{n,n-1}}{dx} = -p_{n-1,n} \tag{6}$$

$$\frac{d\,N_{n,n-1}}{dx} = \tau_{n-1} - \tau_n \tag{7}$$

$$\frac{d\,M_{n,n-1}}{dx} = -\tau_n \cdot h_{m,n} - \tau_{n-1} \cdot h_{m,n-1} + Q_{n,n-1} \tag{8}$$

und

$$\frac{d\,Q_{n+1,n}}{dx} = -p_{n,n+1} \tag{6'}$$

$$\frac{d\,N_{n+1,n}}{dx} = \tau_n - \tau_{n+1} \tag{7'}$$

$$\frac{d\,M_{n+1,n}}{dx} = -\tau_n \cdot h_{m+1,n} - \tau_{n+1} \cdot h_{m+1,n+1} + Q_{n+1,n} \tag{8'}$$

Außerdem müssen längs der Kante n die bezogenen Dehnungen in beiden Elementen in jedem Punkte x übereinstimmen, da ja längs n beide Scheiben unverschieblich verbunden sein sollen, das heißt

$$\varepsilon_{m,n} = \varepsilon_{m+1,n} \tag{9}$$

oder

$$\frac{1}{E}\left[\frac{M_{n,n-1}}{J_{n,n-1}} \cdot h_{m,n} + \frac{N_{n,n-1}}{F_{n,n-1}}\right] = \frac{1}{E}\left[-\frac{M_{n+1,n}}{J_{n+1,n}} \cdot h_{m+1,n} + \frac{N_{n+1,n}}{F_{n+1,n}}\right] \tag{10}$$

Unter der Annahme, daß bei jeder Scheibe für sich F und J konstant sind, ergibt die Differentiation von (10) nach x

$$\frac{d\,M_{n,n-1}}{dx} \cdot \frac{h_{m,n}}{J_{n,n-1}} + \frac{d\,M_{n+1,n}}{dx} \cdot \frac{h_{m+1,n}}{J_{n+1,n}} + \frac{d\,N_{n,n-1}}{dx} \cdot \frac{1}{F_{n,n-1}} - \frac{d\,N_{n+1,n}}{dx} \cdot \frac{1}{F_{n+1,n}} = 0. \tag{11}$$

Setzt man die Gl. (7), (8), (7'), (8') in Gl. (11) ein, ordnet um und differentiert nachher nochmals nach x, so ergibt sich unter Bedachtnahme auf Gl. (6) und (6')

$$\begin{aligned}
&\frac{d\,\tau_{n-1}}{dx}\left(\frac{h_{m,n} \cdot h_{m,n-1}}{J_{n,n-1}} - \frac{1}{F_{n-1,n}}\right) + \\
&\quad + \frac{d\,\tau_n}{dx}\left(\frac{h^2_{m,n}}{J_{n,n-1}} + \frac{h^2_{m+1,n}}{J_{n+1,n}} + \frac{1}{F_{n,n-1}} + \frac{1}{F_{n+1,n}}\right) + \\
&\quad + \frac{d\,\tau_{n+1}}{dx}\left(\frac{h_{m+1,n} \cdot h_{m+1,n+1}}{J_{n+1,n}} - \frac{1}{F_{n,n+1}}\right) =
\end{aligned}$$

$$= -p_{n,n-1} \cdot \frac{h_{m,n}}{J_{n,n-1}} - p_{n+1,n} \cdot \frac{h_{m+1,n}}{J_{n+1,n}} \text{ [2]} \tag{12}$$

Da für jede Kante n eine solche Beziehung aufgestellt werden kann, so gewinnt man ebensoviele Gleichungen, als Unbekannte $\frac{d\tau_n}{dx}$ vorhanden sind. Bei der Bildung dieses Gleichungssystems ist zu berücksichtigen, daß für einen freien Scheibenrand (siehe Abb. 1) $\frac{d\tau_n}{dx} = 0$ ist. Da die rechten Seiten bekannte Funktionen von x sind, so ergibt die Auflösung der Gl. (12) die $\frac{d\tau_n}{dx}$ als Funktionen von x. τ_n selbst erhält man aus $\frac{d\tau_n}{dx}$ durch Integration. Es ergibt sich also

$$\tau_n = \int \frac{d\tau_n}{dx} \cdot dx + C_n = \tau_n^0 + C_n \tag{13}$$

Bei der Herleitung der Gl. (12) mußten wir über die Art der Belastung des Tragwerkes und über den statischen Charakter der einzelnen Scheiben als ebene Träger keine Voraussetzungen treffen. Sie gelten daher sowohl für stetige Belastung als auch für Einzellasten, als auch für den Fall, daß die einzelnen Scheiben Balkenträger, Durchlaufträger, Riegel eines Rahmens oder stetig unterstützte Träger sind. Während nun die eben erwähnten Umstände für die Herleitung der Gleichungen (12) unwesentlich sind, liefern sie jedoch für die Berechnung der Integrationskonstanten C_n in jedem der angeführten Fälle die nötigen Randbedingungen. Um nun den Leser rascher zu dem wesentlichen Endergebnis der Untersuchung zu führen, wird hier die Ermittlung der C_n nur für den Fall der Abb. 1, also für das Balkenscheibenwerk unter stetiger Belastung durchgeführt.

Die Bedingung des Gleichgewichtes gegen wagrechtes Verschieben in jeder Scheibe ergibt für den einfachen Balken

$$\int_0^L \tau_n^0 \, dx + C_n \cdot L = \int_0^L \tau_{n+1}^0 \cdot dx + C_{n+1} \cdot L. \tag{14}$$

Für jede Scheibe gilt eine solche Gleichung. Beachtet man nun, daß $\tau^0{}_0 = 0$ ist, subtrahiert die erste Gleichung von der zweiten, die Differenz der ersten und zweiten von der dritten u. s. w., so ergibt sich schließlich

$$C_n = -\frac{1}{L} \int_0^L \tau_n^0 \, dx, \tag{15}$$

also ebensoviel Gleichungen als Kanten, somit ebensoviele, als Unbekannte vorhanden sind.

Wir können nun mit den Formeln

$$N_{n,n+1} = \int_0^x (\tau_n - \tau_{n+1}) \, dx \tag{16}$$

$$M_{n,n+1} = \mathfrak{M}_{p_{n,n+1}} - \int_0^x (\tau_n h_{m+1,n} + \tau_{n+1} \cdot h_{m+1,n+1}) \, dx \tag{17}$$

---

[2]) Stoßen mehr als zwei Scheiben in einer Kante zusammen, so gelten ähnliche Gleichungen, die jedoch nicht mehr dreigliederig, sondern nach Art des Viermomentensatzes viergliederig sind. Es wäre zu weitläufig, dies hier näher auszuführen.

die Momente und Normalkräfte jeder Scheibe in jedem Punkte x bestimmen. Hernach ergeben sich mittels

$$\sigma = \frac{N_{n,n+1}}{F_{n+1,n}} - \frac{M_{n,n+1}}{J_{n,n+1}} \cdot h_{m+1,n} \tag{18}$$

die Randspannungen der einzelnen Scheiben.

Wir geben bei dieser Gelegenheit eine durchgreifende Rechnungskontrolle an. Bestimmt man die Randspannungen in der Kante n der benachbarten Scheiben $n-1, n$ und $n, n+1$ einmal als Randspannung der Scheibe $n, n+1$ und das andere Mal als Randspannung der Scheibe $n-1, n$, so müssen dieselben Werte herauskommen.

Wir haben nun das Gelenkwerk soweit untersucht, daß wir zur Theorie des steifknotigen Scheibenwerkes übergehen können.

C. Das steifknotige Scheibenwerk.

Schneidet man wieder aus einer Scheibe ein Element heraus, so müssen an diesem außer den bereits erörterten Wirkungen M, N, Q, X, Q_z und τ noch

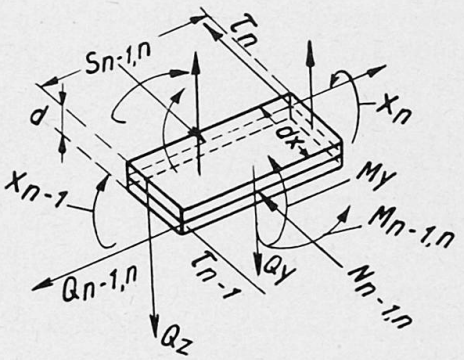

Fig. 5.

die neu hinzukommenden Größen M_y und Q_y als Schnittkräfte angebracht werden (siehe Abb. 5). Wir können aber aus folgenden Gründen M_y und Q_y praktisch genügend genau gleich 0 setzen.

a) Die Dicke der Scheibe ist wohl in Bezug auf deren Länge L immer sehr klein.

b) Jede Scheibe $n, n-1$ ist eine Platte, welche in den Endscheiben A und B fest und in den Kanten n und $n-1$ nachgiebig gelagert ist. Da nun jede Scheibe ein schmales Rechteck ist, kann man die Wirkung über die große Spannweite L gegenüber der Wirkung über die kleine Spannweite s vernachlässigen. Selbstverständlich werden aber an den beiden Endscheiben die M_y mehr oder weniger endliche Werte M'_y annehmen. Dieses Nichtzutreffen der obigen Näherungsannahme bleibt jedoch örtlich begrenzt, da die Rückwirkung der M'_y auf das Gesamttragwerk fast Null ist. Man bedenke, daß Wirkungsgrößen, die nur an den Auflagern eines Trägers angreifen, auf seine Mitte nahezu keinen Einfluß besitzen.

Die Querdehnungszahl m setzen wir, wie es bei Betontragwerken üblich ist, gleich ∞. In Wirklichkeit ist $m \triangleq 10$. Der in der Plattentheorie auftretende, die Querdehnungen berücksichtigende Faktor $\frac{m^2}{m^2-1}$ ergibt sich dann zu $\frac{100}{99} \triangleq 1$. Die Näherung ist daher sehr gut erfüllt.

Wir können uns nach diesen Erläuterungen die Wirkungsweise des Tragwerkes so vorstellen, daß wir uns jede Scheibe in unendlich viele Elemente von der Breite dx zerlegt denken. Diese Elemente müssen aber längs der Schnitte so verbunden sein, daß zwar die Größen M, N, Q, X, τ und Q_z, nicht aber die M_y und Q_y von einem Element zum anderen übertragen werden können. Man denke sich daher zwischen zwei Scheiben nach Abb. 6 ein unendlich schmales Fachwerk eingebaut. Längs der Kanten n sind jedoch die beiden Elemente zweier benachbarter Scheiben steif verbunden.

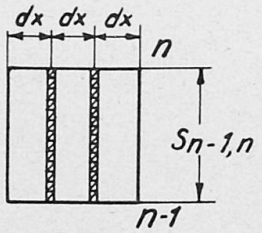

Fig. 6.

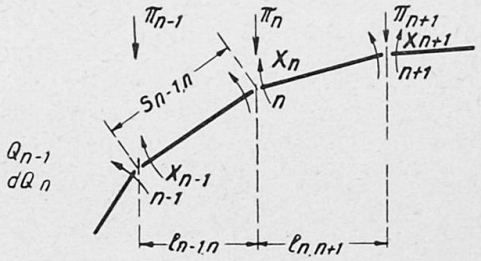

Fig. 7.

Als Unbekannte des statisch unbestimmten Systems wählen wir die Momente $X_n(x)$ und bringen diese an dem Gelenkwerk — das wir ja als Grundsystem gewählt haben — neben den gegebenen Lasten P_n als äußere Kräfte an. Halten wir für die X_n den in Abb. 7 angedeuteten Drehsinn fest, so ergeben sich die von X_n herrührenden Knotenlasten π_n zu

$$\pi_n = \frac{X_{n-1}}{l_{n,n-1}} - X_n \frac{l_{n,n+1} + l_{n,n-1}}{l_{n,n-1} \cdot l_{n,n+1}} + \frac{X_{n+1}}{l_{n,n+1}} \tag{20}$$

Es wirkt nun in jedem Knoten die Gesamtlast

$$\overline{P_n} = \pi_n + P_n \tag{21}$$

Diese ersetzen wir durch Kräfte, welche in den Scheiben wirken. Für diese gilt

$$\bar{p}_{n,n+1} = (P_{n+1} + \pi_{n+1}) \cdot \alpha_{n+1,n} - (P_n + \pi_n)\, \alpha_{n,n+1} =$$
$$= p_{n,n+1} + \sum_{\nu=n-2}^{\nu=n+1} b_\nu \cdot X_\nu \tag{22}$$

Bei diesen Gleichungen ist das erste Glied von den äußeren Lasten P_n und das zweite von den unbekannten X_n herrührend. Wir lösen nun für die Belastungen $\overline{P_n}$ das Gelenkwerk auf. Zu diesem Zwecke wird das Gleichungssystem (12) aufgestellt. Die rechten Seiten desselben werden gewonnen, indem die $\bar{p}_{n,n+1}$ an Stelle der $p_{n,n+1}$ gesetzt werden. Die Auflösung des so erhaltenen Systems ergibt

$$\frac{d\bar{\tau}_n}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\nu=r-1} \beta_\nu \cdot p_{\nu,\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\nu=r} c_\nu \cdot X_\nu \tag{23}$$

Wir müssen uns nun den Formänderungen des Tragwerkes (siehe Abb. 8) zuwenden. Denkt man sich das Gelenkwerk längs der Kante n aufgeschnitten, so könnte sich jede Scheibe $n-1, n$ in ihrer Ebene um $y_{n-1,n}$ durchbiegen. Es könnte sich also der Punkt n als Punkt der Scheibe $n-1, n$ nach n' und als Punkt der Scheibe $n, n+1$ nach n'' bewegen. Der Zusammenhang der beiden Scheiben bei n wird so hergestellt, daß sich n'' normal auf $n, n+1$

und n' normal auf $n-1, n$ bewegt. Wir erhalten im Schnitt der beiden Bewegungsrichtungen den Punkt $\bar{n}$, in welchem sich n nach der Deformation befinden wird. Eine Auflösung des Viereckes $n\,n'\,\bar{n}\,n''$ ergibt (siehe Abb. 8)

$$\begin{aligned} \eta_{n,n+1} &= \left(\frac{y_{n-1,n}}{\cos(\alpha_{n-1}-\alpha_n)} - y_{n,n+1}\right) \operatorname{cotg}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ \eta_{n,n-1} &= \left(y_{n-1,n} - \frac{y_{n,n+1}}{\cos(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}\right) \cdot \operatorname{cotg}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \end{aligned} \tag{24}$$

und analog ergeben sich für die Kanten $n+1$ die Werte $\eta_{n+1,\,n+2}$ und $\eta_{n+1,n}$, indem man in Gl. (24) den Index n um 1 vermehrt.

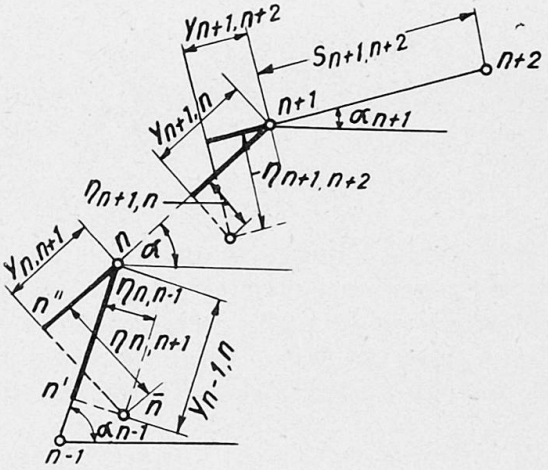

Fig. 8.

Der Sehnendrehwinkel $\vartheta_{n,\,n+1}$ ergibt sich zu

$$\vartheta_{n,n+1} = \frac{\eta_{n+1,n} - \eta_{n,n+1}}{s_{n,n+1}} = \sum_{\nu=-1}^{\nu=1} d_\nu y_{n+\nu,n+\nu+1} \tag{25}$$

Die Durchbiegungen $y_{n,\,n+1}$ müssen nun der Differentialgleichung

$$EJ_{n,n+1} \cdot y''_{n,n+1} = -M_{n,n+1} \tag{26}$$

genügen. Differentieren wir Gl. (26) zweimal nach x, so ergibt sich unter Bedachtnahme auf Gl. (8') und (6')

$$EJ_{n,n+1} \cdot y^{\mathrm{IV}}_{n,n+1} = \frac{d\bar{\tau}_n}{dx} \cdot h_{m+1,n} + \frac{d\bar{\tau}_{n-1}}{dx} \cdot h_{m+1,n+1} - \bar{p}_{n,n+1} \tag{27}$$

Setzt man in Gl. (27) die Ergebnisse der Gl. (23) und (22) ein, so ergibt sich

$$EJ_{n,n+1} \cdot y^{\mathrm{IV}}_{n,n+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=r-1} \gamma_\nu p_{\nu,\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\nu=r} e_\nu X_\nu. \tag{28}$$

In dieser Gleichung rührt das erste Glied wieder von der Belastung P_n her. Wir erhalten nun aus Gl. (25)

$$\begin{aligned} \vartheta_{n-1,n} - \vartheta_{n,n+1} &= \sum_{\nu=-2}^{\nu=0} d_\nu y_{n+\nu,n+\nu+1} - \sum_{\nu=-0}^{\nu=+1} d_\nu y_{n+\nu,n+\nu+1} = \\ &= \sum_{\nu=-2}^{\nu=+1} f_{\nu,} y_{n+\nu,n+\nu+1} \end{aligned} \tag{29}$$

Differentiert man Gl. (29) viermal nach x, so ergibt sich

$$\vartheta^{\mathrm{IV}}_{n-1,n} - \vartheta^{\mathrm{IV}}_{n,n+1} = \sum_{\nu=-2}^{\nu=+1} f_\nu \cdot y^{\mathrm{IV}}_{n+\nu,n+\nu+1}. \tag{30}$$

Gl. (28) in Gl. (30) eingesetzt, liefert

$$\vartheta^{\mathrm{IV}}_{n-1,n} - \vartheta^{\mathrm{IV}}_{n,n+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=r-1} \delta_\nu \cdot p_{\nu,\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\nu=r} g_\nu \cdot X_\nu. \tag{31}$$

Solche Gleichungen gibt es bloß n. Sie reichen daher für die Bestimmung der Unbekannten ϑ und X_n noch nicht aus. Wir benötigen daher noch weitere Beziehungen zwischen ϑ und X_n. Diese erhalten wir, indem wir für jede Kante, in der ein X_n vorkommt, den Viermomentensatz anwenden[3]). Also

$$\begin{aligned} s'_{n-1,n} X_{n-1} + 2(s'_{n-1,n} + s'_{n,n+1}) X_n + s_{n,n+1} \cdot X_{n+1} - \\ - 6EJ\,\vartheta_{n-1,n} - \vartheta_{n,n+1}) = N_{n,n-1} + N_{n,n+1} \end{aligned} \tag{32}$$

Differentieren wir Gl. (32) viermal nach x, so können wir aus Gl. (31) und (32) die ϑ eliminieren. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} s'_{n-1,n} \cdot X^{\mathrm{IV}}_{n-1} + 2(s'_{n-1,n} + s'_{n,n+1}) X^{\mathrm{IV}}_n + s'_{n,n+1} \cdot X^{\mathrm{IV}}_{n+1} - \\ - 6EJ \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=r-1} \delta_\nu p_{\nu,\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\nu=r} g_\nu \cdot X_\nu \right] = N^{\mathrm{IV}}_{n,n-1} + N^{\mathrm{IV}}_{n,n+1} \end{aligned} \tag{33}$$

und wir haben damit die Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Funktionen $X_n(x)$ erhalten.

Es sind r simultane Differentialgleichungen 4. Ordnung, genau so wie beim elastisch gebetteten Träger, da es sich ja auch bei diesem Problem um Träger handelt, die sich gegenseitig elastisch stützen. Die normale Integration dieses Gleichungssystems ist nun ziffernmäßig nahezu undurchführbar, denn bei r Gleichungen ist schon die dazugehörige charakteristische Gleichung von der Ordnung $4r$ und die Zahl der Integrationskonstanten ebenfalls $4r$. Wir beschreiten daher, indem wir die Lasten und die Belastungsglieder in eine Reihe von „Normalfunktionen" (Fourier'sche Reihen) entwickeln, einen Näherungsweg, der bis zu beliebiger Genauigkeit getrieben werden kann[4]). Wir werden bei der Ausrechnung eines besondern Beispiels sehen, daß infolge der raschen Konvergenz dieses Verfahrens bereits die Berücksichtigung des ersten Gliedes der Fourier'schen Reihe genügt.

---

[3]) Siehe Dr. Ing. Friedrich Bleich, Der Viermomentensatz u. s. w., Verlag Julius Springer, Berlin.

[4]) Für eine Einzellast P, welche im Abstand ξ vom Auflager wirkt, lautet die Reihenentwicklung $\frac{2P}{L} \sum_1^\infty \sin \frac{k\pi\xi}{L} \cdot \sin \frac{k\pi x}{L}$. Durch Integration dieser gleichmäßig konvergenten Reihe erhalten wir für eine stetige Belastung $p(\xi)$ die Entwicklung $\frac{2}{L} \sum_1^\infty \int_0^L p(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{L} d\xi \cdot \sin \frac{k\pi x}{L}$. Ist $p(\xi)$ abteilungsweise stetig, so ist $\int_0^L$ in die entsprechenden Intervalle zu zerlegen. Handelt es sich um eine endliche Zahl von Einzellasten P, so genügt an Stelle der Integration eine schlichte Summierung über alle P. Die Entwicklung in einer Sinusreihe stellt die gegebenen Funktionen in unmittelbarer Nähe der Auflage nicht richtig dar, da $\sin \frac{k\pi}{L} x$ für $x = 0$ und $x = L$ immer 0 gibt. Dieser Umstand ist jedoch nur von geringem Belang, da, wie schon einige Male erwähnt, das Versagen einer Näherung bei den Auflagern von nur sehr geringem Einfluß ist.

Um den Weg der Lösung erläutern zu können, müssen wir uns zuerst mit den Randbedingungen des Problems beschäftigen. Wir wollen die Bilanz zwischen der Anzahl der Integrationskonstanten und deren Bedingungen für den Fall eines Balkenscheibenwerkes mit $r+1$ Scheiben vorführen. Es ergeben sich r unbekannte Funktionen X_n, also $4r$ Integrationskonstanten. Setzt man das allgemeine Integral in Gl. (23) ein und integriert, so ergeben sich die $\bar{\tau}$. Es kommen dadurch r Konstanten neu hinzu. Man kann nun mit Hilfe der Gl. (16) und (17) M und N durch τ ausdrücken. Setzt man M in Gl. (26) ein und integriert zweimal nach x, so erhält man die Durchbiegungen $y_{n,n+1}$. Es kommen dadurch aber neuerdings $2r+2$ Konstante dazu. Im gesamten liegen $4r+r+2r+2=7r+2$ Konstante vor.

Dem gegenüber stehen nun die folgenden Randbedingungen:

I. Die in Gl. (15) festgehaltenen Bedingungen, das sind	r	Gleichungen.
II. Die Durchbiegungen $y_{n,n+1}$ bei den Endscheiben A und B müssen gleich Null sein, das sind	$2r+2$	„
III. Setzt man die $y_{n,n+1}$ in Gl. (29) ein, so erhält man die $\vartheta_{n-1,n}-\vartheta_{n,n+1}$, welche bei den Endscheiben A und B Null sein müssen, das sind	$2r$	„
IV. Führt man in die Gl. (32) die X_n ein und berücksichtigt, daß die $\vartheta_{n-1,n}-\vartheta_{n,n+1}$ bei den Endscheiben A und B gleich Null sein müssen, so erhält man	$2r$	„
Im Gesamten ergeben sich daher	$7r+2$	Gleichungen

für die Bestimmung der Integrationskonstanten.

Die Störungsfunktionen der Differentialgleichungen haben nun die Form

$$S_n = 6EJ\sum_{\nu=0}^{\nu=r-1}\delta_\nu p_{\nu,\nu+1} + N^{\mathrm{IV}}_{n.n-1} + N^{\mathrm{IV}}_{n,n+1}$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots r$$

Man kann also durch endliche Summation und viermalige Differentiation aus den Entwicklungen für die Belastung $p_{n,n+1}$ und der Belastungsglieder $N_{n,n-1}$, $N_{n,n+1}$ die Entwicklung der Störungsfunktion S_n jeder der n Differentialgleichungen erhalten. S_n ergibt sich daher in der Form

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_{kn}\sin\frac{k\pi}{L}x + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_{kn}\left(\frac{\pi k}{L}\right)^4 \sin\frac{k\pi}{L}x = \sum_{k=1}^{k=\infty} D_{kn}\sin\frac{k\pi}{L}x \qquad (34)$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots r$$

In dieser Gleichung rührt der erste Summand von der Belastung $p_{n,n+1}$ und das zweite Glied von den Belastungsgliedern $N_{n,n-1}$, $N_{n,n+1}$ her.

Bestehen nun die Störungsfunktionen nur aus einem Glied

$$D_{kn}\cdot\sin\frac{k\pi}{L}x, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots r$$

so lautet die Lösung des Gleichungssystems

$$\eta_{nk} = \varphi_{nk}\sin\frac{k\pi}{L}x. \qquad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots r \qquad (35)$$

Setzt man Gl. (35) in Gl. (33) ein, so erkennt man, daß Gl. (33) dann befriedigt wird, wenn

$$\begin{gathered} s'_{n-1,n}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \varphi_{n-1,k} + 2\left(s'_{n-1,n} + s'_{n,n+1}\right)\left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \varphi_{n,k} + \\ + s'_{n,n+1}\cdot\left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \varphi_{n+1,k} - 6EJ\left[D_{kn} + \sum_{\nu=1}^{\nu=r} g_\nu \cdot \varphi_{\nu,k}\right) = 0 \\ n = 1, 2, 3 \ldots\ldots r \end{gathered} \tag{35'}$$

erfüllt ist. Die Gl. (35') sind n lineare Gleichungen, welche zur Bestimmung der n unbekannten Koeffizienten φ_{nk}, hinreichen. Diese Gleichungen genügen aber dann auch den Randbedingungen I, II, III, IV des Problems. Setzen wir nämlich Gl. (35) in Gl. (32) ein, so ergibt sich

$$\vartheta_{n-1,n} - \vartheta_{n,n+1}\Big|_{\substack{x=0\\x=L}} = 0, \tag{36}$$

da ja allgemein

$$N = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_{kn} \sin\frac{k\pi}{L}x\Big|_{\substack{x=0\\x=L}} = 0; \qquad X_n\Big|_{\substack{x=0\\x=L}} = 0 \tag{36a) (36b}$$

besteht. Nach Einführung der Gl. (36) in Gl. (29) können alle $y_{n,n+1}$ ($\varkappa = 0$, $\varkappa = L$) durch eine dieser Größen linear ausgedrückt werden. Ist daher eine von den Größen Null, so sind es auch die anderen. Das Nullwerden eines jeden der $y_{n,n+1}\Big|_{\substack{x=0\\x=L}}$ steht aber mit Gl. (35) nicht im Widerspruch. Die durch Gl. (15) bedingten Konstanten sind alle gleich Null, da Gl. (35) in Bezug auf $x = \frac{L}{2}$ symmetrisch ist. Aus diesen Darlegungen ergibt sich, daß die Bedingungen I, II, III und IV erfüllt sind, Gl. (35) stellt somit die exakte Lösung dar, wenn die Störungsfunktion nur aus einem Sinus besteht. Entwickelt man nun die Störungsfunktionen in

$$S = \sum_{k=1}^{k=\infty} D_{kn} \sin\frac{\pi k}{L}x$$
$$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots r$$

so folgt nach einem bekannten Satz über nicht homogene lineare Differentialgleichungen, daß dann das vollständige Integral

$$X_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi_{nk} \sin\frac{k\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots r$$

lautet. Um die Lösung ziffernmäßig durchführen zu können, muß für jedes Glied der Sinusreihe, das berücksichtigt werden soll, ein lineares Gleichungssystem Gl. (35') für φ_{nk} aufgelöst werden. Wir können nun zur Durchführung eines besonderen Beispiels übergehen.

D. Praktische Anwendung.

Wir führen die Berechnung eines Balkentonnendaches für symmetrische Belastung durch. In Abb. 9 ist der Querschnitt des Tragwerkes dargestellt, aus welchem sämtliche Abmessungen ersichtlich sind. Die Stützweite beträgt $L = 18$ m.

Belastung:	Betonplatte 7 cm	0,168 t/m²
	Pappe	0,022 t/m²
		0,190 t/m²

Dachrinne 0,022 t/m.

Die Knotenlasten ergeben sich zu

$$P_2 = P_3 = P_4 = 2{,}30 \times 0{,}190 = 0{,}437 \text{ t/m}$$
$$P_1 = 1{,}15 \times 0{,}190 + 1.00 \times 0.15 \times 2{,}4 + 0{,}022 = 0{,}600 \text{ t/m}$$

Die Beiwerte $a_{n,\,n+1}$ betragen:

$$a_{21} = 4.828;\ a_{23} = 4{,}446;\ a_{32} = 5{,}034;\ a_{34} = 4{,}828;\ a_{43} = 5{,}0335.$$

Mit Hilfe dieser Werte ergeben sich nach Gl. (1), (2), (3) und (4) die in den Scheiben wirkenden Belastungen $p_{n,\,n+1}$ zu

$$p_{10} = 0{,}600 \text{ t/m};\ p_{21} = 2{,}110 \text{ t/m};\ p_{32} = 0{,}257 \text{ t/m};\ p_{43} = 0{,}0896 \text{ t/m}.$$

Nachdem das Tragwerk 7 Kanten besitzt, ergeben sich zunächst 7 Unbekannte X. Da bezüglich der Achse 0 — 0 Symmetrie der Anlage und Be-

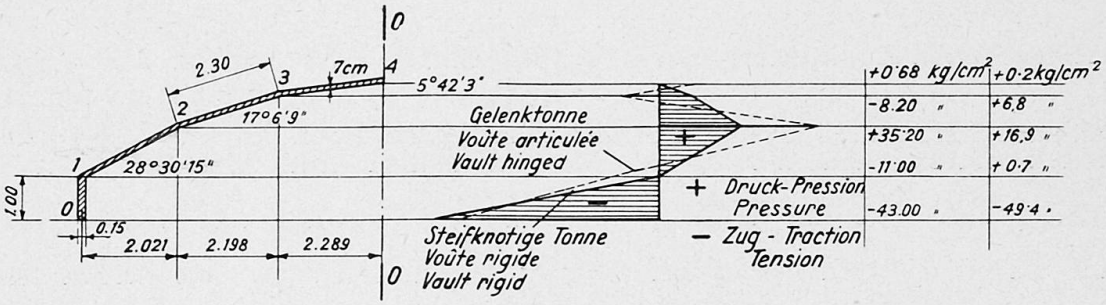

Fig. 9.

lastung besteht, sinkt die Zahl der Unbekannten zuerst auf 4. Ferner ist $X_1 = 0$, da der untere Rand der Scheibe 0 1 sich nach links und rechts frei bewegen kann. Es sind somit nur die Unbekannten X_2, X_3 und X_4 zu bestimmen.

Wir belasten nun die Gelenktonne mit X_2, X_3, X_4 und P_1, P_2, P_3, P_4. Mit Hilfe der Beiwerte $a_{n,\,n+1}$ ergibt diese Belastung die Werte für $p_{n,\,n+1}$ (siehe Gl. (20), (21), (22), 1, 2, 3, 4) zu

$$\begin{aligned} \bar{p}_{10} &= 0{,}600 + 0{,}4948\, X_2;\quad \bar{p}_{21} = 2{,}110 - 4{,}592\, X_2 + 2{,}199\, X_3 \\ \bar{p}_{32} &= 0{,}257 + 6{,}513\, X_2 - 6{,}5122\, X_3 + 2{,}199\, X_4 \\ \bar{p}_{34} &= 0{,}0896 - 2{,}1969\, X_2 + 8{,}7045\, X_3 - 6{,}5076\, X_4 \end{aligned} \tag{38}$$

Damit ist das Gleichungssystem (12) festgelegt; dieses lautet:

$$\begin{aligned} 4{,}146\, \bar{\tau}_1' + \bar{\tau}_2' &= 3{,}22\, \bar{p}_{10} + 1{,}30\, \bar{p}_{21} \\ \bar{\tau}_1' + 4\, \bar{\tau}_2' + \bar{\tau}_3' &= 1{,}30\, p_{21} + 1{,}30\, \bar{p}_{32} \\ \bar{\tau}_2' + 4\, \bar{\tau}_3' &= 1{,}30\, \bar{p}_{32} + 1{,}30\, \bar{p}_{43} \end{aligned}$$

Ersetzt man rechts die $\bar{p}$ durch Gl. (38), so erhält man für die Unbekannten $\bar{\tau}$:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1' &= 1{,}0026 - 1{,}2077\, X_2 + 1{,}1747\, X_3 - 0{,}2936\, X_4 \\ \bar{\tau}_2' &= 0{,}5245 + 0{,}6146\, X_2 - 2{,}0035\, X_3 + 1{,}2175\, X_4 \\ \bar{\tau}_3' &= -0{,}0185 + 1{,}2513\, X_2 + 1{,}2174\, X_3 - 1{,}7095\, X_4 \end{aligned} \tag{39}$$

Mit Hilfe der Gl. (24) und (25) ergeben sich die ϑ zu

$$\begin{aligned} 2{,}30\,\vartheta_{12} &= -1{,}1379\,y_{10} + 5{,}5025\,y_{12} - 5{,}0582\,y_{23} \\ 2{,}30\,\vartheta_{23} &= -5{,}0582\,y_{12} + 9{,}9190\,y_{23} - 5{,}0582\,y_{34} \\ 2{,}30\,\vartheta_{34} &= 14{,}9772\,y_{34} - 5{,}0582\,y_{23} \end{aligned} \tag{40}$$

Nach Einsetzen von Gl. (39) und (38) in Gl. (27) ergibt sich

$$\begin{aligned} EJ_{12}\,y_{01}^{\mathrm{IV}} &= 0{,}5604 + 6{,}2367\,X_2 - 3{,}3352\,X_3 + 0{,}8335\,X_4 \\ EJ_{12}\,y_{12}^{\mathrm{IV}} &= 0{,}3538 - 3{,}9099\,X_2 + 3{,}1528\,X_3 - 1{,}0625\,X_4 \\ EJ_{12}\,y_{23}^{\mathrm{IV}} &= -0{,}3249 + 4{,}3671\,X_2 - 5{,}6082\,X_3 + 2{,}7650\,X_4 \\ EJ_{12}\,y_{34}^{\mathrm{IV}} &= 0{,}1109 - 3{,}6359\,X_2 + 7{,}3045\,X_3 - 4{,}5417\,X_4 \end{aligned} \tag{41}$$

Durch viermalige Differentiation von Gl. (40) und durch Subtraktion gewinnt man mit Hilfe der Gl. (41)

$$\begin{aligned} J_{12}\,E\cdot 2{,}30\,(\vartheta_{12}^{\mathrm{IV}} - \vartheta_{23}^{\mathrm{IV}}) &= 8{,}5258 - 132{,}15\,X_2 + 159{,}03\,X_3 - 76{,}50\,X_4 \\ J_{12}\,E\cdot 2{,}30\,(\vartheta_{23}^{\mathrm{IV}} - \vartheta_{34}^{\mathrm{IV}}) &= -8{,}8792 + 158{,}03\,X_2 - 247{,}28\,X_3 + 137{,}73\,X_4 \\ J_{12}\cdot E\cdot 2{,}30\,(\vartheta_{34}^{\mathrm{IV}})\,2 &= 6{,}6118 - 153{,}09\,X_2 + 275{,}54\,X_3 - 164{,}02\,X_4 \end{aligned} \tag{42}$$

Wir haben nun für die Kanten 2, 3, 4 je eine Viermomentengleichung aufzustellen. Diese lauten:

$$\begin{aligned} 4\,s\,X_2 + s\,X_3 \qquad\qquad - 6\,EJ(\vartheta_{12} - \vartheta_{23}) &= N_{21} + N_{23} \\ s\,X_2 + 4\,s\,X_3 + s\,X_4 \quad - 6\,EJ(\vartheta_{23} - \vartheta_{34}) &= N_{32} + N_{34} \\ s\,X_3 + 2\,s\,X_4 - 6\,EJ\,\vartheta_{34} \qquad &= N_{43} \end{aligned} \tag{43}$$

Differentieren wir Gl. (43) viermal nach x, multiplizieren jede von ihnen mit

$$\frac{2{,}30\,J_{12}}{6\,J} = 951{,}89$$

so gelangen wir zu

$$\begin{aligned} &8757{,}436\,X_2^{\mathrm{IV}} + 2189{,}359\,X_3^{\mathrm{IV}} + 132{,}1512\,X_2 - 159{,}0255\,X_3 + \\ &\qquad + 76{,}5027\,X_4 = 8{,}5258 + (N_{21}^{\mathrm{IV}} + N_{23}^{\mathrm{IV}})\,951{,}89 \\ &2189{,}359\,X_2^{\mathrm{IV}} + 8757{,}436\,X_3^{\mathrm{IV}} + 2189{,}359\,X_4^{\mathrm{IV}} - 158{,}0310\,X_2 + \\ &\qquad + 247{,}2831\,X_3 - 137{,}7298\,X_4 = -8{,}8792 + (N_{32}^{\mathrm{IV}} + N_{34}^{\mathrm{IV}})\,951{,}89 \\ &2189{,}359\,X_3^{\mathrm{IV}} + 4378{,}718\,X_4^{\mathrm{IV}} + 76{,}5453\,X_2 - 137{,}7684\,X_3 + \\ &\qquad + 82{,}0078\,X_4 = 3{,}3059 + N_{53}^{\mathrm{IV}}\,951{,}89. \end{aligned} \tag{44}$$

Die Störungsfunktionen bestehen aus zwei Teilen, wovon der erste von den Knotenlasten P_1, P_2, P_3, P_4 und der zweite von dem Umstand herrührt, daß die Scheiben zwischen den Kanten auf Biegung beansprucht werden. Wir wollen beide Einflüsse getrennt voneinander untersuchen und daher vorerst die $N_{IV} = 0$ setzen. Die sin-Entwicklung der Störungsfunktionen S lauten somit

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 8{,}5258 \times \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{L} + 8{,}5258\,\frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{L}\,x + \cdots \\ \varrho_2 &= -8{,}8792 \quad \text{„} \quad -8{,}8792 \quad \text{„} \quad + \cdots \\ \varrho_3 &= 3{,}3059 \quad \text{„} \quad +3{,}3059 \quad \text{„} \quad + \cdots \end{aligned}$$

Die den ersten Gliedern entsprechenden Integrale von Gl. (44) lauten somit

$$\eta_{11} = \varphi_{11}\sin\frac{\pi}{L}\,x; \quad \eta_{12} = \varphi_{12}\sin\frac{\pi}{L}\,x; \quad \eta_{13} = \varphi_{13}\sin\frac{\pi}{L}\,x.$$

Die vierten Ableitungen derselben ergeben sich zu

$$\eta_{11}^{\mathrm{IV}} = \varphi_{11}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin\frac{\pi}{L}; \quad \eta_{12}^{\mathrm{IV}} = \varphi_{12}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin\frac{\pi}{L}; \quad \eta_{13}^{\mathrm{IV}} = \varphi_{13}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin\frac{\pi}{L}\,x.$$

Dies in Gl. (44) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} 140{,}276\,\varphi_{11} - 156{,}9943\,\varphi_{12} + 76{,}5027\,\varphi_{13} &= 8{,}5258\,\frac{4}{\pi} \\ -156{,}000\,\varphi_{11} + 255{,}4081\,\varphi_{12} - 135{,}6985\,\varphi_{13} &= -8{,}8792\,\frac{4}{\pi} \\ 76{,}5453\,\varphi_{11} - 135{,}7371\,\varphi_{12} + 86{,}00704\,\varphi_{13} &= 3{,}3059\,\frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Systems lautet

$$\varphi_{11} = +0{,}07295; \quad \varphi_{12} = -0{,}0507; \quad \varphi_{13} = -0{,}09586 \tag{45}$$

Die den zweiten Gliedern entsprechenden Integrale sind

$$\eta_{21} = \varphi_{21}\sin\frac{3\pi}{L}x; \quad \eta_{22} = \varphi_{22}\sin\frac{3\pi}{L}x; \quad \eta_{23} = \varphi_{23}\sin\frac{3\pi}{L}x.$$

Bildet man wieder die vierten Ableitungen derselben, setzt diese in Gl. (44) ein und löst das entstehende Gleichungssystem auf, so erhält man

$$\varphi_{21} = +0{,}0043; \quad \varphi_{22} = -0{,}0042; \quad \varphi_{23} = +0{,}00256 \tag{45'}$$

Wir gehen nun zur Berücksichtigung der Belastungsglieder N über. Diese lauten allgemein

$$N_{n,n-1} = -0{,}190\,\frac{s^3}{4}\cdot\cos\alpha_{n-1}$$

Daraus folgen die Werte

$$N_{21} + N_{23} = -0{,}347\,\frac{s^3}{4}; \quad N_{32} + N_{34} = -0{,}359\,\frac{s^3}{4}; \quad N_{43} = -0{,}179\,\frac{s^3}{4}.$$

Entwickelt man diese Ausdrücke wieder in einer Sinusreihe, so wird

$$\begin{aligned} N_{21} + N_{23} &= -0{,}347\,\frac{s^3}{\pi}\sin\frac{\pi}{L}x \\ N_{32} + N_{34} &= -0{,}359 \quad \text{„} \\ N_{43} &= -0{,}179 \quad \text{„} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen viermal differentiert, ergeben

$$\begin{aligned} N_{21}^{\mathrm{IV}} + N_{23}^{\mathrm{IV}} &= -0{,}347\,\frac{s^3}{\pi}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\sin\frac{\pi}{L}x \\ N_{32}^{\mathrm{IV}} + N_{34}^{\mathrm{IV}} &= -0{,}359 \quad \text{„} \\ N_{34}^{\mathrm{IV}} &= -0{,}179 \quad \text{„} \end{aligned}$$

Die Störungsfunktionen selbst erhalten wir, indem wir diese Werte mit $951\cdot 89$ multiplizieren.

$$\begin{aligned} N_{21}^{\mathrm{IV}} + N_{23}^{\mathrm{IV}} &= -1{,}189\sin\frac{\pi}{L}x \\ N_{32}^{\mathrm{IV}} + N_{34}^{\mathrm{IV}} &= -1{,}230 \quad \text{„} \\ N_{34}^{\mathrm{IV}} &= -0{,}612 \quad \text{„} \end{aligned}$$

Die zu diesen Gliedern gehörigen Integrale lauten

$$\bar{\eta}_{11} = \bar{\varphi}_{11} \sin \frac{\pi}{L} x; \quad \bar{\eta}_{12} = \bar{\varphi}_{12} \sin \frac{\varphi}{L} x; \quad \bar{\eta}_{13} = \bar{\varphi}_{13} \sin x.$$

Schlagen wir nun genau denselben Weg wie vorhin ein, so erhalten wir für die $\bar{\varphi}$ die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 140{,}276\,\bar{\varphi}_{11} - 156{,}994\,\bar{\varphi}_{12} + 76{,}503\,\bar{\varphi}_{13} &= -1{,}189 \\ 156{,}000\,\bar{\varphi}_{11} + 255{,}408\,\bar{\varphi}_{12} - 135{,}700\,\bar{\varphi}_{13} &= -1{,}230 \\ 76{,}545\,\bar{\varphi}_{11} - 135{,}737\,\bar{\varphi}_{12} + 86{,}070\,\bar{\varphi}_{13} &= -0{,}612 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Systems führt zu

$$\bar{\varphi}_{11} = -0{,}049; \quad \bar{\varphi}_{12} = -0{,}053; \quad \bar{\varphi}_{13} = -0{,}042. \tag{46}$$

Berücksichtigen wir ebenso wie oben den Einfluß eines weiteren Gliedes der Sinusreihe, so ergibt sich hierfür die Lösung

$$\bar{\varphi}_{21} = -0{,}000459; \quad \bar{\varphi}_{22} = -0{,}000434; \quad \bar{\varphi}_{23} = -0{,}000410; \tag{46'}$$

Addieren wir die Beiwerte Gl. (45) und (46) sowie Gl. (45') und (46'), so erhalten wir endlich die vollständige Lösung der Gl. (44).

$$\begin{aligned} X_2 &= +0{,}02395 \sin \frac{\pi}{18} \cdot x + 0{,}00384 \sin \frac{3\pi}{18} x + \cdots \\ X_3 &= -0{,}1037 \quad „ \quad -0{,}0046 \quad „ \quad + \cdots \\ X_4 &= -0{,}1379 \quad „ \quad +0{,}00213 \quad „ \end{aligned} \tag{47}$$

Die zweiten Sinusglieder können aus folgenden Gründen gegenüber den ersten vernachlässigt werden:

1. Die Beiwerte des zweiten Gliedes sind gegenüber den Beiwerten des ersten Gliedes klein.
2. Die zweiten Glieder stellen dreiwellige Sinuslinien dar. Bei den für die Berechnung der in Balkenmitte auftretenden Maximalmomente, Schubkräfte u. s. w. notwendigen Quadraturen, tilgen sich die negativen mit den positiven Einflüssen fast gänzlich.

Setzt man nun Gl. (47) in Gl. (38) und Gl. (39) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{p}_{10} &= 0{,}600 + 0{,}01185 \sin \frac{\pi}{18} x; & \bar{\tau}_1' &= 1{,}0026 - 0{,}1105 \sin \frac{\pi}{18} x \\ \bar{p}_{12} &= 2{,}110 - 0{,}3385 \quad „ \quad ; & \bar{\tau}_2' &= 0{,}5245 + 0{,}0547 \quad „ \\ \bar{p}_{23} &= 0{,}257 + 0{,}5295 \quad „ \quad ; & \bar{\tau}_3' &= -0{,}0185 + 0{,}1392 \quad „ \\ \bar{p}_{34} &= 0{,}0896 - 0{,}0599 \quad „ \quad ; \end{aligned} \tag{48}$$

Mit diesen Werten kann man nun mit Gl. (16), (17) und Gl. (18) die Spannungen für einen jeden Punkt des Tragwerkes errechnen. In Abb. 9 ist für den Mittelquerschnitt $x = \frac{L}{2}$ das Spannungsbild dargestellt.

Setzt man in den Gl. (38) und (39) $X_2 = X_3 = X_4 = 0$, so kann man auch für das Gelenkwerk die Spannungen ermitteln. Diese sind ebenfalls in Abb. 9 dargestellt.

Es ist nun ein Leichtes, unter Benützung der Gl. (47), (48) und (26) die Durchbiegungen für das gelenkige und für das steifknotige Tragwerk zu be-

rechnen. Wir begnügen uns hier mit der Angabe der Ergebnisse (siehe Abb. 10).

η	Durchbiegungen	
	bei steifen Ecken	Gelenkverbindung
12	+ 0,0174	+ 0,00856
21	+ 0,0210	+ 0,0654
23	+ 0,0211	+ 0,0659
32	— 0,00035	— 0,0405
34	— 0,00065	— 0,04095
43	— 0,0143	+ 0,0192

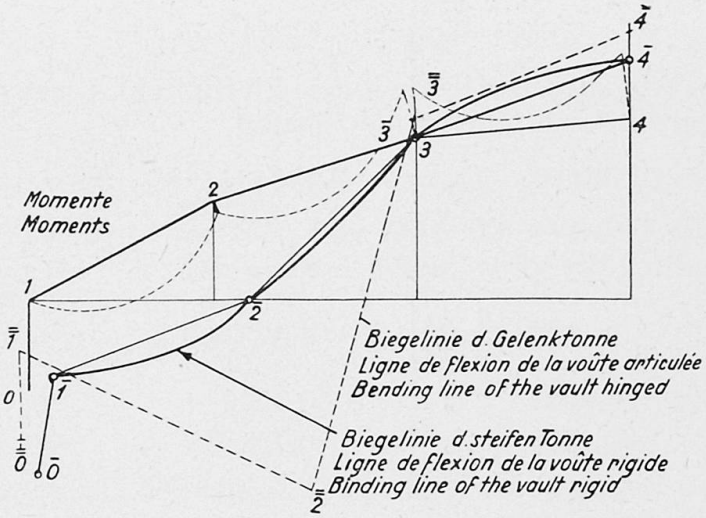

Fig. 10.

Aus den hier errechneten Resultaten ersieht man, daß die Annahme von gelenkigen Scheibenverbindungen in jeder Hinsicht unrichtige Ergebnisse liefert. Die Unterschiede sind so groß, daß die Berechnung mit Hilfe gelenkiger Ecken nicht einmal als rohe Annäherung angesehen werden kann. Man beachte, daß das Verhalten der steifen Tonne in jeder Hinsicht günstiger ist, als das Verhalten der gelenkigen Tonne.

Zusammenfassung.

Scheibenwerke sind schalenartige Gebilde, die aus ebenflächigen, miteinander biegesteif verbundenen Teilen bestehen. In der vorliegenden Abhandlung wird zuerst das längs der Kanten gelenkig verbundene Scheibenwerk — kurz Gelenkwerk genannt — behandelt. Hierauf wird unter Benützung des Gelenkwerkes als Grundsystem eine genaue Theorie des steifknotigen Scheibenwerkes entwickelt. Die Elastizitätsgleichungen hierfür ergeben sich als simultane Differentialgleichungen, die durch rasch konvergierende Reihen gelöst werden.

Am Schlusse wird die Berechnung eines Tonnendaches ziffermäßig durchgeführt. Es zeigt sich dabei, daß die Maximalspannungen und Größtdurchbiegungen des Gelenkwerkes fast doppelt so groß sind, als beim steifknotigen System (siehe Figur 10 und 11). Der Einfluß der steifen Verbindungen darf daher nicht, wie es bisher üblich war, unterdrückt werden.

Résumé.

L'auteur étudie dans ce rapport les voûtes cylindriques minces constituées par la juxtaposition d'éléments plans, assemblés entre eux d'une manière rigide. Il part de l'étude d'assemblages analogues constitués par des éléments articulés les uns aux autres par leurs arêtes, puis généralise en abordant la théorie des assemblages rigides. Les équations de l'élasticité donnent ici des équations différentielles qui peuvent être résolues sous forme de séries rapidement convergentes.

Il passe ensuite à l'exposé d'un exemple de calcul et montre que les efforts maxima et les plus grandes déformations atteignent, pour une articulation, presque le double des valeurs qui correspondent au système à noeuds rigides (voir figures 10 et 11). Il ne faut donc pas négliger l'influence que peut exercer la rigidité des assemblages et que l'on a cependant souvent laissée de côté jusqu'à maintenant.

Summary.

"Scheibenwerke" are shell-like structures consisting of flat surfaced parts connected with each other in a rigid way. In the present report, panelled structures connected by joints along the edges are first of all treated. Then, by using these jointed structures as basic system, an exact theory of rigidly jointed panelled structures is developed. The equations of elasticity for this are simultaneous differential equations, which are solved by rapidly converging series.

Finally the calculation of a barrel vaulted roof is worked out numerically. There it is shown that the maximum stresses and greatest bendings of the jointed structure are about twice as great as in the rigidly jointed system (see figs. 10 and 11). The influence of the rigid connections ought consequently not to be neglected, as has hitherto been usual.

Leere Seite
Blank page
Page vide