Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 1 (1932)

Artikel: Calcul élémentaire rigoureux des plaques rectangulaires
Autor: Mesnager, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-725

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CALCUL ÉLÉMENTAIRE RIGOUREUX DES PLAQUES RECTANGULAIRES

STRENGE, ELEMENTARE BERECHNUNG RECHTECKIGER PLATTEN

RIGOROUS ELEMENTARY CALCULATION OF RECTANGULAR SLABS

Dr. h. c. M. MESNAGER,
Membre de l'Institut de France, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et au Conservatoire National des Arts et Métiers.

En béton armé on utilise fréquemment des hourdis portés sur deux cours de poutres rectangulaires. On détermine en général leurs fatigues au moyen des formules des plaques minces rectangulaires appuyées sur un contour indéformable. Les moments subis par celles-ci malheureusement, soit qu'elles soient encastrées sur le contour, soit qu'elles soient articulées sur ce contour, ne peuvent s'exprimer que par des séries. La théorie de ces plaques présente par conséquent des difficultés qui rebutent beaucoup d'ingénieurs et de plus elle repose sur une base fausse, que le contour est indéformable.

On peut donc penser qu'il vaudrait beaucoup mieux rechercher des formules basées sur la déformation du contour et le raccordement des plaques et des poutres qui les supportent. On serait plus près de la réalité et l'on peut arriver à des expressions d'un nombre fini de termes beaucoup plus maniables.

Je suppose connues les formules fondamentales suivantes des plaques en fonction de leurs déplacements verticaux, comptés positifs vers le haut.

Moment par unité de longueur d'une section perpendiculaire à la direction d'un des côtés $o\,x$, compté positif dans le sens ordinaire de la résistance des matériaux, c'est à dire tendant à produire une concavité vers le haut

$$M_x = \frac{EI}{1-\eta^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

I moment d'inertie par unité de longueur de la section, η coefficient de Poisson.

Moment de torsion par unité de longueur d'une section perpendiculaire à $o\,x$ ou $o\,y$, compté positif quand sur la face positive, c'est à dire limitant le corps du côté des x ou des y croissants, il tend à produire une rotation dans le sens positif des $x\,z$ ou $z\,y$, sens du dévissage avec le sens ordinaire des axes.

$$T = \frac{EI}{1+\eta}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{2}$$

Effort tranchant par unité de longueur d'une section perpendiculaire à $o\,x$, dans le sens ordinaire de la résistance des matériaux, c'est à dire vers le haut du côté de l'origine,

$$t_x = \frac{EI}{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w \tag{3}$$

en posant $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Charge par unité de surface, dirigée vers le bas,

$$-\tilde{\omega} = \frac{EI}{1-\eta^2}\Delta^2 w, \tag{4}$$

en posant $$\Delta^2 = \Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Réaction sur la face négative, c'est à dire côté de l'origine, perpendiculaire à $o\,x$, comptée vers le haut.

$$r_x = \frac{EI}{1-\eta^2}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\eta)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right] \tag{5}$$

Réaction aux angles

$$R = 2\frac{EI}{1-\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{6}$$

Si l'on suppose la plaque isotrope uniformément chargée de $\tilde{\omega}_0$, les poutres supportant la plaque continues aux appuis, la plaque continue au dessus des poutres et les flèches de celles-ci proportionnelles à leur longueur (ce qui est l'ordinaire), on reconnaît facilement que toutes les conditions sont remplies par la formule ci-dessous et comme les problèmes d'élasticité n'ont qu'une solution, c'est la solution du problème.

Plaque uniformément chargée de $\tilde{\omega}$, encastrée sur son contour formé de poutres encastrées.

Je dis que

$$w = -\frac{\tilde{\omega}_0(1-\eta^2)}{24\,EI}\frac{a^3 b^3}{a^3+b^3}\left[\frac{x^2(x-a)^2}{a^3} + \frac{y^2(x-b)^2}{b^3}\right] \text{ [1]} \tag{7}$$

est l'équation de la plaque rectangulaire encastrée, placée comme l'indique la figure:

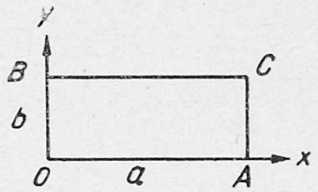

Fig. 5.

Il est facile de vérifier que toutes les conditions sont remplies.

1° La charge est uniforme, puisque la charge est définie par des dérivées quatrièmes. Elles sont ici des constantes puisque la fonction w est du quatrième degré. En remplaçant dans la formule (4) w par sa valeur, on trouve $\tilde{\omega} = -\tilde{\omega}_0$.

2° Les tangentes sont horizontales au contour. En effet $\frac{\partial w}{\partial x}$ est la dérivée

d'une fonction de la forme

$$w = A x^2 (x - a)^2$$

dont les racines $x = 0$ et $x = a$ sont doubles, donc la dérivée est nulle pour ces racines. On le voit presque aussi vite par dérivation directe.

3° Les moments de torsion sont nuls puisqu'il n'y a pas de terme en $x^m y^n$.

4° En remplaçant w, tiré de (7) dans l'expression de la réaction (5), on obtient pour $x = 0$

$$r_x = \frac{\bar{\omega}_0}{2} \frac{a b^3}{a^3 + b^3}, \qquad \frac{r_x}{r_y} = \frac{b^2}{a^2}. \tag{8}$$

La réaction totale sur le côté $x = 0$ est

$$R_x = \frac{\bar{\omega}_0}{2} \frac{a b^4}{a^3 + b^3}, \qquad \frac{R_x}{R_y} = \frac{b^3}{a^3}. \tag{9}$$

$$R_y = \frac{\bar{\omega}_0}{2} \frac{a^4 b}{a^3 + b^3},$$

Les réactions par unité de longueur des côtés sont entre elles comme les carrés des longueurs des côtés, les réactions totales des côtés sont proportionnelles aux cubes des longueurs de ceux-ci.

5° Déformation des poutres d'appui.

Poutre $o\,x$. Elle supporte par unité de longueur

$$r_y = \frac{\bar{\omega}_0}{2} \frac{a^3 b}{a^3 + b^3}$$

Or l'équation d'une poutre encastrée de longueur a, chargée de p par unité de longueur est

$$w = -\frac{p}{24 E I} x^2 (x - a)^2$$

Remplaçons p par la valeur de r_y, I par I_a moment d'inertie de la poutre placée sous le côté a, il vient

$$w = -\frac{\bar{\omega}_0}{48 E I_a} \frac{a^3 b}{a^3 + b^3} x^2 (x - a)^2 \tag{10}$$

Ecrivons que la poutre a mêmes déplacements que la plaque pour $y = 0$ l'identification donne

$$I_a = \frac{I}{2(1 - \eta^2)} \frac{a^3}{b^2}, \qquad I_b = \frac{I}{2(1 - \eta^2)} \frac{b^3}{a^2}, \qquad \frac{I_a}{I_b} = \frac{a^5}{b^5} \tag{11}$$

Les moments d'inertie des poutres doivent être proportionnels à la cinquième puissance des longueurs des poutres.

6° Flèches des poutres. Les flèches des poutres sont données par l'équation (10) en y faisant $x = \frac{a}{2}$. En remplaçant I_a par la valeur (11) et en changeant le signe, puisque la flèche doit être comptée positive vers le bas, il vient

---

[1]) Cette équation est analogue à celle de GRASHOF, „Elastizität und Festigkeit", page 359, l'origine est à l'angle au lieu d'être au centre. Voir aussi EDDY, The theorie of the flexure — Rogers — Mineapolis P. 21.

$$f_a = \frac{\tilde{\omega}_0 (1-\eta^2)}{384\,EI} \frac{a^4 b^3}{a^3+b^3}, \qquad f_b = \frac{\tilde{\omega}_0 (1-\eta^2)}{384\,EI} \frac{a^3 b^4}{a^3+b^3}, \qquad \frac{f_a}{f_b} = \frac{a}{b} \tag{11'}$$

Les flèches sont proportionnelles aux longueurs des poutres.

Toutes les conditions posées sont remplies, la solution convient donc. Je vais maintenant examiner les propriétés de cette plaque et ensuite les comparer à d'autres résultats connus.

Moments.

Calculons les dérivées secondes qui entrent dans (1)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\tilde{\omega}_0 (1-\eta^2)}{24\,EI} \frac{a^3 b^3}{a^3+b^3} \frac{12x^2 - 12ax + 2a^2}{a^3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\tilde{\omega}_0 (1-\eta^2)}{24\,EI} \frac{a^3 b^3}{a^3+b^3} \frac{12y^2 - 12by + 2b^2}{b^3}$$

Portons dans (1)

$$M_x = -\frac{\tilde{\omega}_0}{24} \frac{a^3 b^3}{a^3+b^3} \left[\frac{2a^2 - 12x(a-x)}{a^3} + \eta \frac{2b^2 - 12y(b-y)}{b^3} \right] \tag{12}$$

Moments au centre. Dans l'équation (12) faisons $x = \frac{a}{2}$, nous obtenons

$$M_x = \frac{\tilde{\omega}_0}{24} \frac{a^3 b^3}{a^3+b^3} \left[\frac{1}{a} + \eta \frac{-2b^2 + 12y(b-y)}{b^3} \right]$$

le maximum a lieu au milieu, car alors $y(b-y)$, qui est positif, est maximum. Le maximum est

$$M_x = \frac{\tilde{\omega}_0}{24} \frac{a^2 b^2}{a^3+b^3} (b + \eta a) \tag{13}$$

η étant toujours inférieur à 1, on voit que le moment le plus grand a lieu sur la coupure faite parallèlement au plus grand côté. C'est un fait bien connu et presque évident.

Moments d'encastrement. Sur le côté $x = 0$, (12) donne

$$M_x = -\frac{\tilde{\omega}_0}{24} \frac{a^3 b^3}{a^3+b^3} \left[\frac{2}{a} + \eta \frac{2b^2 - 12y(b-y)}{b^3} \right]$$

On trouve des valeurs égales et de même signe pour $y = \frac{b}{2} \pm u$.

Le minimum de la valeur absolue a lieu pour $y = \frac{b}{2}$, c'est le moment d'encastrement au milieu du côté

Fig. 2.

$$M_x = -\frac{\tilde{\omega}_0}{12} \frac{a^2 b^2}{a^3+b^3} \left(b - \frac{\eta}{2} a \right) \tag{14}$$

Aux angles on a

$$M_x = -\frac{\tilde{\omega}_0}{12} \frac{a^2 b^2}{a^3+b^3} (b + \eta a) \tag{15}$$

La courbe représentative des moments étant une parabole du second degré, en voit facilement que la valeur moyenne s'obtient en supprimant le terme en η.

Flèche par rapport aux angles.

Cette flèche s'obtient en faisant $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ dans la formule (7) et en changeant le signe de l'expression d'après la définition de la flèche

$$f = \frac{\tilde{\omega}_0 (1 - \eta^2)}{384 EI} \frac{a^3 b^3}{a^3 + b^3} (a + b) \tag{16}$$

Comparaison avec les formules de la plaque rectangulaire encastrée sur un contour rigide.

Faisons cette comparaison pour le cas de la plaque carrée d'après les formules de M. le Docteur-Ingénieur Hencky de Darmstadt pour la plaque rectangulaire encastrée sur un contour indéformable. (Editeur Oldenbourg, Berlin 1913, p. 53.) Il faut diviser par quatre les coefficients donnés par lui parce qu'il appelle les côtés $2a$ et $2b$, tandisque je les ai appelés a et b. En outre il a pris $\eta = 0{,}3$. Dans ces conditions, pour $a = b$, $\eta = 0{,}3$ on obtient.

Moment au centre

$$M_x = \frac{\tilde{\omega}_0 a^2}{24} \frac{1{,}3}{2} = \tilde{\omega}_0 a^2 \cdot 0{,}0271$$

d'après la formule (13) ci-dessus

$$M_x = \tilde{\omega}_0 a^2 \frac{0{,}092}{4} = \tilde{\omega}_0 a^2 \cdot 0{,}023$$

d'après le calcul de M. Hencky.

La différence n'est pas surprenante, étant donnée la différence de rigidité du contour qui diminue certainement les moments au centre.

Moments d'encastrement au milieu du côté.

$$M_x = -\frac{\tilde{\omega}_0 a^2}{12} \frac{0{,}85}{2} = -\tilde{\omega}_0 a^2 \cdot 0{,}0177 \quad \text{d'après (14)},$$

$$M_x = -\tilde{\omega}_0 a^2 \frac{0{,}205}{4} = -\tilde{\omega}_0 a^2 \cdot 0{,}0512 \quad \text{d'après M. Hencky.}$$

La différence est beaucoup plus grande, parce que ce moment est produit au point même soulevé par le contour rigide. Le moment est presque triple ($0{,}0177 \times 2{,}9 = 0{,}0512$).

Réactions au milieu du côté.

$$r_x = \frac{\tilde{\omega}_0 a}{4} = \tilde{\omega}_0 a \cdot 0{,}25, \quad \text{d'après (8)} \qquad r_x = \tilde{\omega}_0 a\, 0{,}88.$$

La réaction est plus que triplée à cause du soulèvement du centre ($0{,}25 \times 3{,}54 = 0{,}88$).

Il est assez intéressant de constater qu'une semblable plaque est assimilable à une série de poutres de largeur 1 juxtaposées, de hauteur égale à l'épaisseur de la plaque, portant, celles qui sont dans le sens $o\,x$, la fraction

$$(1 - \eta^2) \frac{b^3}{a^3 + b^3} \quad \text{de la charge}$$

et celles qui sont dans le sens $o\,y$ la fraction

$$(1-\eta^2)\,\frac{a^3}{a^3+b^3} \quad \text{de la charge.}$$

En effet l'équation (7) est ainsi décomposée en deux systèmes de poutres. La somme des deux fractions donne $(1-\eta^2)$. C'est un facteur de réduction de la charge qui tient à la liaison de ces poutres les unes aux autres.

Dans le cas où $\eta = 0$ on est ramené à partager simplement la charge entre ces deux systèmes de poutres. C'est une idée qui n'est pas neuve, de Saint Venant (traduction de l'Elasticité de Clebsch, Dunod 1883, p. 752 en note) rappelle qu'elle a été employée par Mariotte. Il ajoute „Quoique l'assimilation d'une plaque à deux systèmes croisés de règles jointives manque d'exactitude, on comprend que la conclusion puisse être juste". On peut encore dire, on coupe la plaque par deux systèmes de plans verticaux espacés de l'unité supposée infiniment petite, les uns parallèles à $o\,x$, les autres parallèles à $o\,y$. En supposant l'un des systèmes de coupure supprimé on a un des systèmes de règles, en supposant l'autre supprimé on a l'autre. Le facteur $1-\eta^2$ tient compte des réactions de l'un des systèmes sur l'autre quand on supprime toutes les coupures.

On peut remarquer que la forme de la plaque déformée peut-être engendrée par le glissement de la poutre parallèle à $o\,x$, déformée suivant l'équation

$$w = -\left[\bar{\omega}_0\,(1-\eta^2)\,\frac{b^3}{a^3+b^3}\right]\frac{x^2\,(x-a)^2}{24\,EI}$$

le long d'une poutre parallèle à $o\,y$ déformée suivant l'équation

$$w = -\left[\bar{\omega}_0\,(1-\eta^2)\,\frac{a^3}{a^3+b^3}\right]\frac{y^2\,(y-a)^2}{24\,EI}$$

Cette manière d'envisager les plaques est rigoureuse, si elles peuvent glisser sur le contour, constitué par des poutres rectangulaires dont le moment d'inertie est défini par (11). Elle a l'avantage d'être tout à fait élémentaire.

Mais il ne faut pas se dissimuler que ce n'est pas encore complètement la réalité. Car nous avons admis qu'il n'existe que des réactions verticales (pas de cisaillement) au raccordement de la plaque et de la poutre. Ceci constitue une différence notable entre le calcul et la construction usuelle en béton armé ou en métal, mais il ne faut pas perdre de vue qu'il en est de même dans tous les travaux faits sur les plaques reposant sur un contour indéformable. Je ne parle pas des différences dues à ce que la plaque n'est pas infiniment mince.

Le problème de la liaison complète ne parait pas insoluble, c'est analogue à peu près à celui que M. Tournayre a abordé dans les Annales des Ponts et Chaussées, 1932, I, mais il semble alors indispensable d'employer des développements en série. La simplicité de la solution, que j'avais recherchée, disparaît.

On peut pour la plaque posée sans frottement sur des poutres, posées sur leurs appuis, en supposant $\eta = 0$, arriver de même, en utilisant

$$w = -\frac{\bar{\omega}}{24\,EI}\,\frac{a^3\,b^3}{a^3+b^3}\left[\frac{x\,(a-x)\,(x^2-a\,x-a^2)}{a^3}+\frac{y\,(y-b)\,(y^2-b\,x-b^2)}{b^3}\right]$$

Il est ici nécessaire de faire $\eta = 0$ pour que le moment puisse être nul

au contour; car autrement le moment pour $x = 0$ dépend de $\eta f(y)$. On ne se débarrasse des termes en y qu'en faisant $\eta = 0$.

Résumé.

Les moments subis par des plaques minces rectangulaires appuyées sur un contour indéformable — soit qu'elles soient encastrées, soit qu'elles soient articulées sur ce contour — ne peuvent s'exprimer que par des séries. En réalité, ce contour indéformable n'existe guère, les plaques étant d'ordinaire assemblées sur des poutres élastiques.

Dans ce cas — plaque uniformément chargée encastrée sur un contour formé de poutres encastrées — on peut arriver à des expressions comportant un nombre fini de termes et beaucoup plus maniables. Après avoir mentionné les formules fondamentales des plaques, l'auteur traite en détail cette solution particulière.

Une comparaison avec les formules de la plaque carrée encastrée sur un contour rigide donne les résultats suivants. Les moments au centre de la plaque sont un peu plus grands pour le cas envisagé, tandis que les moments et les réactions au milieu du côté sont bien moindres que dans le cas du contour rigide (environ le tiers).

Une plaque semblable est assimilable à une série de poutres, celles qui sont supposées dans le sens ox (voir fig. 1) supportant la fraction

$$(1 - \eta^2) \frac{b^3}{a^3 + b^3}$$

de la charge et celles qui sont dans le sens oy supportant la fraction

$$(1 - \eta^2) \frac{a^3}{a^3 + b^3}$$

de la charge.

Le facteur $(1 - \eta^2)$ constitue un coefficient de réduction de la charge, tenant compte de la liaison des poutres les unes aux autres.

Zusammenfassung.

Die Berechnung von dünnen rechteckigen Platten, die auf einer starren Unterlage entweder frei aufliegen oder in ihr eingespannt sind, führt zu komplizierten Reihenausdrücken. In Wirklichkeit ist diese starre Unterlage selten vorhanden, da die Platte meist auf elastischen Balken aufruht.

Für diesen Fall — gleichmäßig belastete Platte, die an ihren Rändern mit eingespannten Balken biegungssteif verbunden ist — kommt man auf einfache, geschlossene Ausdrücke. Der Verfasser weist kurz auf die grundlegenden Formeln der Plattentheorie hin und behandelt dann ausführlich diese spezielle Lösung.

Ein Vergleich mit den Formeln für die quadratische, steif eingespannte Platte ergibt folgende Ergebnisse. Die Momente in der Mitte der Platte sind im betrachteten Falle etwas größer, dagegen die Momente und Auflagerkräfte in Seitenmitte bedeutend kleiner als bei der steif eingespannten Platte (ca. $1/3$ derselben).

Eine solche Platte entspricht einem Balkenrost, der in der Richtung ox (siehe Fig. 1) den Anteil

$$(1 - \eta^2) \frac{b^3}{a^3 + b^3}$$

der Last und in der Richtung oy den Anteil

$$(1 - \eta^2) \frac{a^3}{a^3 + b^3}$$

der Last aufnimmt.

$(1 - \eta^2)$ ist ein Reduktionsfaktor, herrührend von der gegenseitigen Beeinflussung der Balken.

Summary.

The calculation of thin rectangular plates, either lying free on a rigid base or held firmly in it, leads to complicated mathematical series. In reality this rigid base rarely exists, since the plates are generally lying on elastic beams.

For this case — a uniformly loaded plate firmly held at its edges with beams which themselves are fixed at the ends but otherwise elastic — simple expressions without series are obtained. The author refers briefly to the basic formulae of the theory of plates and then deals in detail with this special solution.

A comparison with the formulae for a square firmly held plate gives the following results. In the case under consideration the moments in the middle of the plate are somewhat greater; on the other hand the moments and supporting forces at the middle of the sides are considerably smaller than in the case of firmly held plates (only about $1/3$rd).

Such a plate corresponds to a number of beams lying alongside each other and taking a component of the load in the ox direction (see fig. 1)

$$(1 - \eta^2) \frac{b^3}{a^3 + b^3}$$

and in the oy direction the component

$$(1 - \eta^2) \frac{a^3}{a^3 + b^3}$$

$(1 - \eta^2)$ is a reduction factor, arising from the action of the beams on each other.