Détermination expérimentale des tensions dans les extrémités des pièces prismatiques munies d'une semi-articulation

Autor(en): **Tesa, V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **1 (1932)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-739

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES TENSIONS DANS LES EXTRÉMITÉS DES PIÈCES PRISMATIQUES MUNIES D'UNE SEMI-ARTICULATION

EXPERIMENTELLE SPANNUNGSBESTIMMUNG IN DEN ENDEN PRISMATISCHER STÄBE MIT UNVOLLKOMMENEM GELENK

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE STRESSES AT THE ENDS OF PRISMATIC MEMBERS WITH IMPERFECT JOINT

Dr. V. TESAŘ,
Ingénieur, Paris.

Les semi-articulations sont souvent utilisées, tant en construction métallique que dans la construction en béton armé. Pour cette raison, nous estimons que les recherches expérimentales qui font l'objet de la présente communication ne seront pas sans intérêt, étant donné qu'elles apportent au problème un éclaircissement qui, à notre connaissance, a échappé jusqu'à maintenant aux nombreux investigateurs qui se sont occupés de cette question.

Le problème est le suivant:

Deux pièces prismatiques de largeur b sont comprimées l'une sur l'autre sous l'influence d'un système de forces dont la résultante passe nécessairement par une section rétrécie b' (figure 1).

On ne considérera ici que le problème d'élasticité plane, c'est-à-dire que l'on supposera que toutes les contraintes sont invariables sur l'épaisseur normale au plan de la figure.

La partie, en général assez mince, qui forme la section rétrécie b' peut être constituée soit par le même matériau que les pièces prismatiques elles-mêmes, soit par un matériau différent; cette alternative exerce évidemment une influence sur la répartition des pressions dans la section rétrécie, mais ne modifie guère l'allure des phénomènes que nous désirons signaler.

D'autre part, pour pouvoir mesurer directement les tensions sans être obligé de recourir à la mesure des déformations, nous avons effectué les recherches sur des modèles en verre. Pour la mesure des tensions, nous avons employé la méthode de la lumière polarisée, connue actuellement sous le nom de photo-élasticité.

Exposé du problème.

La résultante P de la pression transmise par la section rétrécie b' n'est en général pas normale à cette section et elle ne passe pas non plus par son milieu. Toutefois, pour ne pas anticiper sur le rapport proprement dit, nous ne nous occupons en détail que d'un seul cas, qui fait l'objet de la photo-

graphie de la figure 2. Dans ce cas, la résultante P passe par le milieu de la section rétrécie et lui est normale; la largeur de cette section est de l'ordre du dixième de la largeur b des pièces prismatiques elles-mêmes.

Les franges visible sur la photographie, exécutée en lumière polarisée circulairement, constituent les courbes isochromatiques, c'est-à-dire les courbes pour lesquelles la différence entre les tensions principales est constante. L'observation du modèle en lumière polarisée rectilignement fournit les courbes isoclines, qui constituent les lieux des points où les

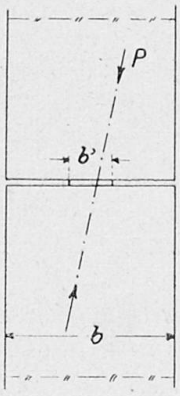

Fig. 1.

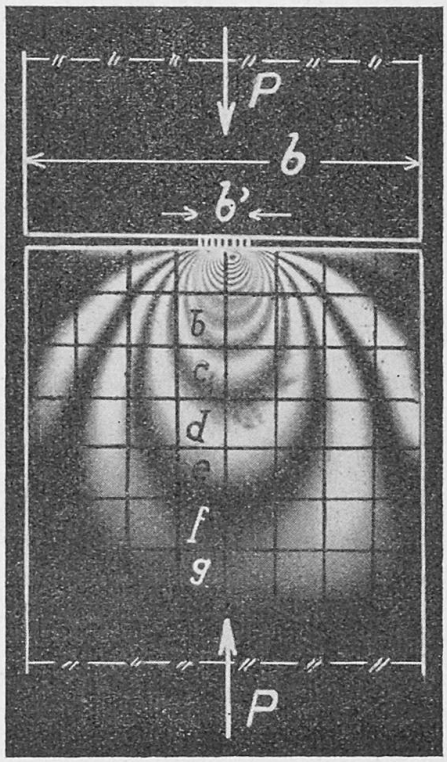

Fig. 2.

directions des tensions principales sont parallèles ou normales aux plans principaux de la lumière polarisée rectilignement. La figure 3 représente les courbes de ce genre, pour le problème proposé; cette figure est constituée par le relevé de cinq observations reportées sur le même graphique. Les courbes sont désignées par des paramètres qui indiquent la valeur des angles des directions respectives des tensions principales. La direction-repère adoptée ici (00) est parallèle à l'axe de la pièce. Par exemple, la courbe désignée par le paramètre 40 est le lieu des points où les directions des tensions principales sont inclinées de 40^g par rapport aux axes du prisme. Le sens de rotation adopté est le sens des aiguilles d'une montre. Pour rendre la figure plus claire, nous avons tracé sur la même figure un éventail d'orientation. Les courbes isoclines constituent la représentation graphique des équations différentielles des courbes isostatiques. L'intégration graphique de ces équations est très aisée; on obtient ainsi la fig. 4.

Il existe deux familles distinctes de courbes isostatiques, le long desquelles les cisaillements sont nuls.

MM. Mesnager [1]), Friedel [2]) ont été les premiers, à notre connaissance, à attirer l'attention sur l'avantage qu'il y a à distinguer toujours nettement, même par la manière de les tracer, ces deux familles de courbes.

Sur la figure 4, l'une de ces familles de courbes est tracée en traits pleins et l'autre en traits discontinus. Désignons par ν_1 les tensions principales qui sont parallèles aux courbes en traits discontinus et par ν_2 les

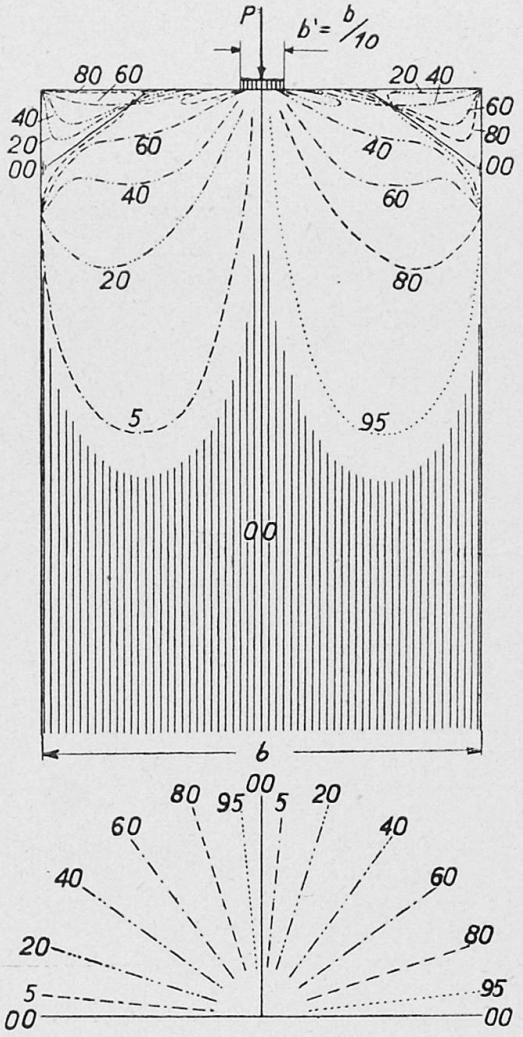

Fig. 3.

tensions principales qui sont parallèles aux courbes en traits pleins de la figure 4. La connaissance des courbes isostatiques seules offre déjà la possibilité de trouver entièrement la solution du problème. En partant des équations de Lamé [3]) il est aisé d'obtenir les relations suivantes, qui expriment d'une manière absolument générale les tensions principales dérivées des coordonnées curvilignes isostatiques de la fonction d'Airy [4]):

---

[1]) Mesnager: Annales des Ponts et Chaussées, 1901, 1913; Mémorial des Sciences Physiques, fasc. X. Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[2]) Friedel: Bulletin de la Société Française de Minéralogie, 1924.

[3]) Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes; Paris, 1859.

[4]) Tesař: Technický Obzor, 1925, 1928, Prague.

$$\nu_1 = \frac{\partial\left[\frac{\partial F}{\partial s_2}\right]}{\partial s_2} - \frac{\partial F}{\partial s_1} \cdot \frac{1}{r_2} \tag{1}$$

$$\nu_2 = \frac{\partial\left[\frac{\partial F}{\partial s_1}\right]}{\partial s_1} - \frac{\partial F}{\partial s_2} \cdot \frac{1}{r_1} \tag{2}$$

D'autre part, la fonction F doit satisfaire également à l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_1\, \partial s_2} + \frac{\partial F}{\partial s_1} \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{\partial F}{\partial s_2} \cdot \frac{1}{r_2} = 0 \tag{3}$$

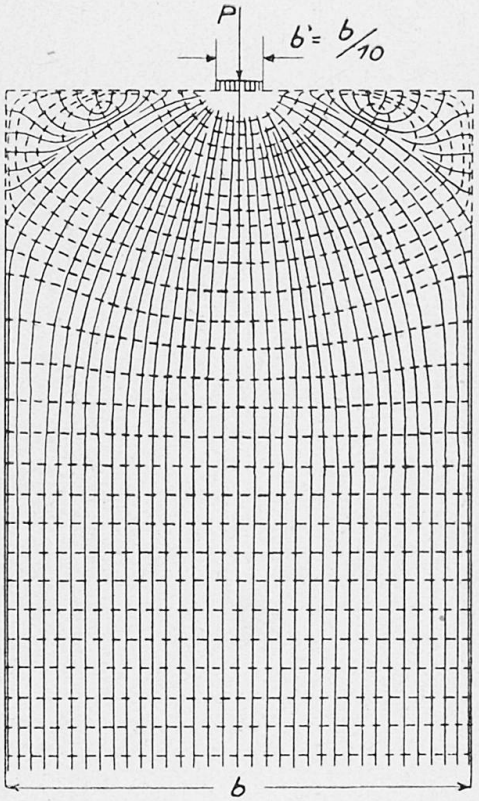

Fig. 4.

..... ν_1

Lignes d'égales tensions principales — Linien gleicher Hauptspannungen — Lines of equal main stresses.

——— ν_2

Lignes des tensions principales de même grandeur — Linien gleicher Hauptspannungen — Lines of equal main stresses.

$$\frac{P}{b} = 1{,}0$$

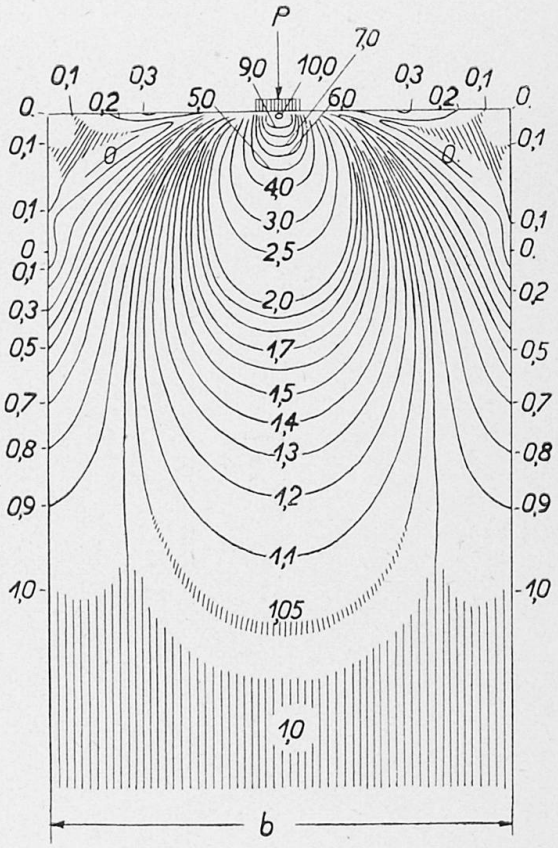

Fig. 5.

Lignes d'égales différences des tensions principales (lignes isochromatiques) — Linien gleicher Hauptspannungsdifferenzen (Isochromen) — Lines of equal difference of the main stresses (isochromatic lines).

$$\frac{P}{b} = 1{,}0$$

Dans ces équations, ds_2 et ds_1 sont les éléments d'arc des courbes isostatiques en traits pleins et discontinus; r_2 et r_1 désignent les rayons de courbure:

$$\left|\frac{d\alpha}{ds_2}\right| = \frac{1}{r_2} \qquad \left|\frac{d\alpha}{ds_1}\right| = \frac{1}{r_1}$$

L'équation (3) est intégrable, puisque sa forme est analogue à celle qui a été traitée par M. DARBOUX [5]). Elle peut être décomposée en deux équations plus simples:

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial F}{\partial s_1}\right]}{\partial s_2} + \frac{\partial F}{\partial s_2}\cdot\frac{1}{r_2} = 0$$

et:

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial F}{\partial s_2}\right]}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s_1}\cdot\frac{1}{r_1} = 0 \qquad (4)$$

Tout ce travail se simplifie considérablement si l'on utilise les résultats expérimentaux fournis par l'observation du modèle en lumière polarisée circulairement (figures 2 et 5).

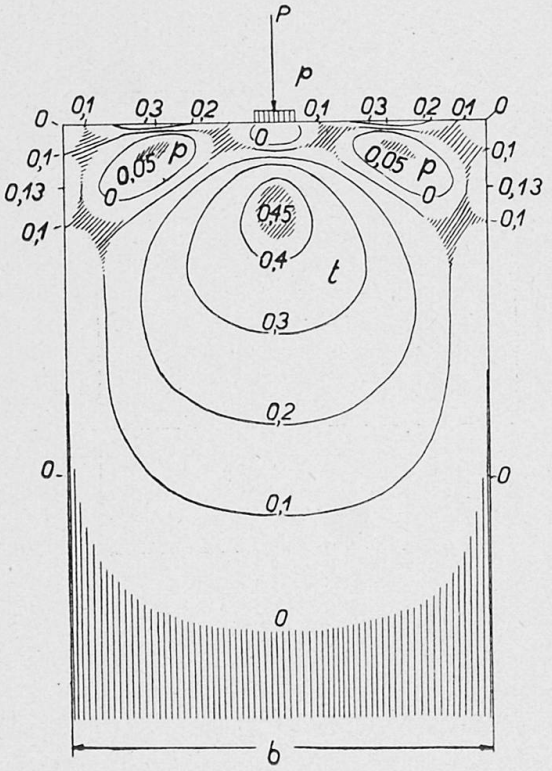

Fig. 6.

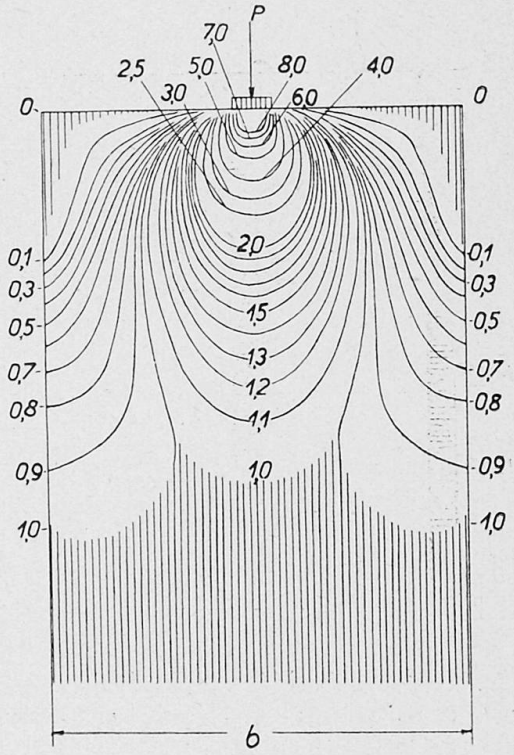

Fig. 7.

Contraintes — Spannungen — Stresses

ν_2 ν_1

La connaissance des différences entre les tensions principales en tous les points du modèle ($\nu_1 - \nu_2$) permet la détermination directe des tensions principales ν_1 et ν_2, par intégration des équations suivantes

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial s_1} + \frac{\nu_1 - \nu_2}{r_2} = 0$$

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial s_2} + \frac{\nu_2 - \nu_1}{r_1} = 0 \qquad (5)$$

[5]) DARBOUX: Leçons sur les systèmes orthogonaux. Gauthiers-Villars, Paris, 1910, pages 353 et suivantes.

On peut intégrer ces équations de différentes manières; on peut, en particulier, utiliser directement les équations ci-dessus, ou celle de M. FILON [6]) qui substitue à la détermination des rayons de courbure des isostatiques, la détermination des angles entre les isoclines et les isostatiques. On peut encore tourner la question en ayant recours à la troisième méthode expérimentale: détermination des sommes des tensions principales [1]) [4]) [7]) [8]) [9]) ou détermination directe des tensions ν_1 et ν_2 elles-mêmes [10]) [11]).

Dans le cas du problème considéré, nous avons utilisé la méthode d'intégration des équations (5).

Le résultat des calculs permettant d'obtenir les valeurs de ν_1 et de ν_2 fait l'objet des figures 6 et 7. Il est intéressant d'attirer l'attention sur les remarques suivantes, qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été signalées:

1. Les contraintes principales ν_2 sont des compressions sur toute l'étendue du modèle (figure 7).

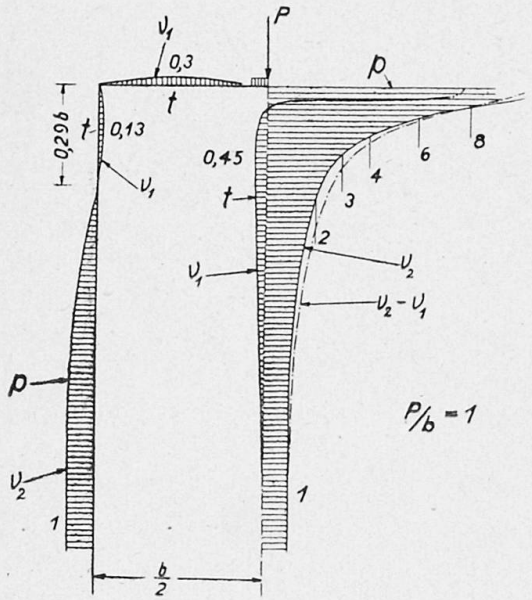

Fig. 8.

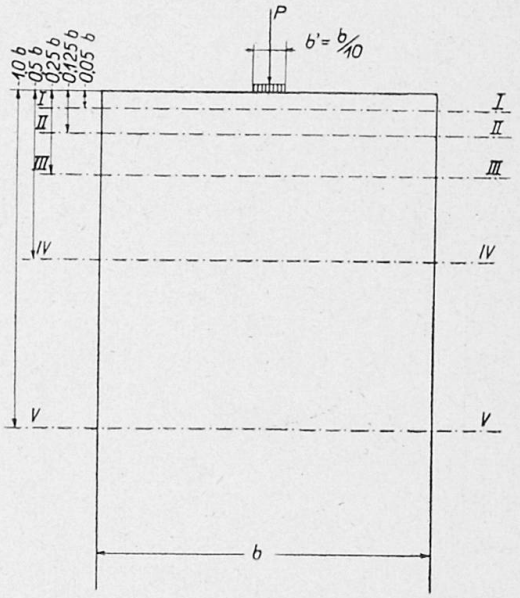

Fig. 9.

2. Les contraintes principales ν_1 sont des tractions proprement dites en tous les points du modèle, sauf pour trois zones dont deux entourent les points positifs singuliers à l'intérieur du modèle et dont la troisième se trouve au voisinage immédiat de la section rétrécie; pour ces zones, les contraintes principales ν_1 sont des compressions (figure 6).

3. Le contour du modèle est divisé en deux parties distinctes par deux points singuliers négatifs, qui sont situés à une distance d'environ $b/3$ au-dessous de la face supérieure du prisme.

Les deux faces latérales du prisme, au-dessous et à partir des points singuliers, appartiennent à la famille des isostatiques ν_2 (voir figure 4).

---

[6]) FILON: Ingineering, 1923, page 511.

[7]) TESAŘ: Technický Slovnik Naučný: Isochromatické, Izoklonné Izostatické křivky, Latometr, Prague.

[8]) COKER: Institution of Mechan. Engineers, mars 1921.

[9]) TESAŘ: Revue d'Optique, Paris, 1932.

[10]) FAVRE, Revue d'Optique, Paris, 1929.

[11]) FABRY: C. R. de l'Acad. des Sciences, t. 190, p. 457, 24 fév. 1930, et TESAR: dito, t. 192, p. 728, 23 mars 1931, et Génie Civil, 20 juin 1931.

Tout le reste du contour appartient à la famille des isostatiques ν_1 (voir figure 4).

Nous considérons un point singulier comme „négatif" ou „positif" suivant que la rotation des lignes isoclines autour de ce point se fait dans le même sens ou dans le sens contraire à la rotation des directions des tensions principales. Cette nouvelle désignation a pour but d'éviter les confusions entre les points singuliers de première et de deuxième espèce. (M. Föppl [12]) appelle en effet point singulier de „erster Art" ce que MM. Friedel [2]) et Mesnager [1]) appellent point singulier de deuxième espèce et inversement.)

L'existence de point singuliers sur les faces latérales du prisme a déjà été relevée par M. Miura [13]) et par M. Favre [10]). Par contre, les deux points singuliers positifs à l'intérieur du prisme n'étaient pas encore connus.

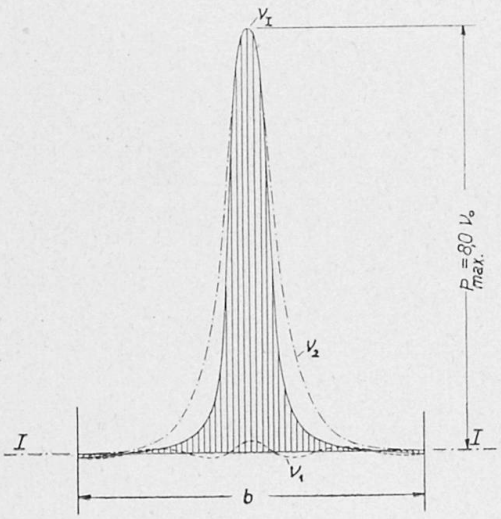

Fig. 10.

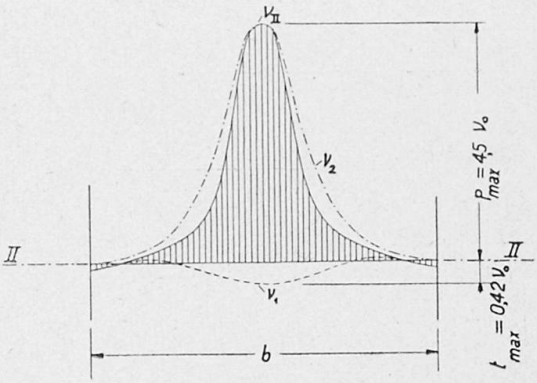

Fig. 11.

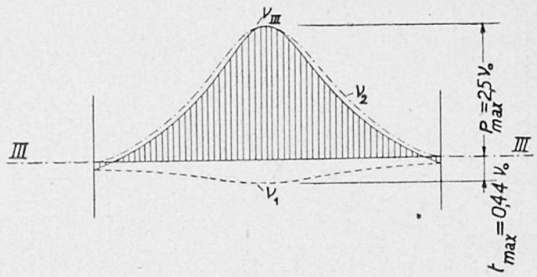

Fig. 12.

Les directions et les valeurs des tensions principales étant déterminées, on obtient ensuite facilement toutes les contraintes que l'on désire étudier.

La figure 8 donne les contraintes le long du contour et le long de l'axe du prisme; la lettre p indique des compressions et la lettre t des tractions. La tension maximum qui tend à faire éclater le prisme se manifeste dans le cas étudié sur l'axe du prisme, à une distance égale à 0,2 b environ au-dessous de la face supérieure; l'ordre de grandeur de cette tension est environ des 45/100 de la valeur de la pression uniformément répartie

$$\nu_0 = \frac{P}{b}$$

Le maximum que nous avons constaté dans ce cas est légèrement supérieur à, celui que l'on obtiendrait par le calcul proposé par M. Mörsch [14])

[12]) Föppl: Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der Technischen Hochschule in München, fascicule 34, 1930, et 35, 1931.

[13]) Miura: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern; J. Springer, Berlin, 1928.

[14]) Mörsch: Beton und Eisen, 1924, No. 12.

dans son intéressante étude, basée sur les travaux expérimentaux très remarquables de M. Coker [8]).

Enfin, sur les figures 10, 11, 12 et 13, nous avons représenté la répartition des contraintes principales ν_1 qui sont tracées en traits pointillés et ν_2 qui sont tracées en traits mixtes, ainsi que la répartition des contraintes normales pour cinq sections transversales du prisme. Dans toutes ces figures, les compressions sont portées au-dessus du niveau correspondant à chaque section et les tractions au-dessous de ce niveau. L'emplacement des sections est indiqué sur la figure 9.

Ces travaux ne sont pas tout à fait récents; nous nous en sommes occupé tout d'abord en mai et juin 1930; M. Mesnager s'y étant intéressé, nous

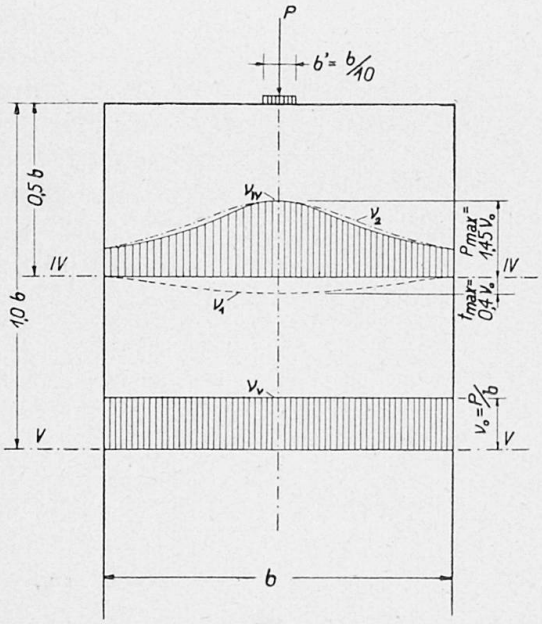

Fig. 13.

Fig. 10—13:

Sur les figures 10, 11, 12 et 13 les surfaces hachurées sont les diagrammes des contraintes normales des sections respectives —

Die schraffierten Flächen der Figuren 10, 11, 12 und 13 sind die Diagramme der bezüglichen Normalspannungen —

The hatched surfaces of the figures 10, 11, 12 and 13 signifie the diagrams of normal stress.

avons mis cette étude au point et lui en avons communiqué les résultats en octobre de la même année. M. Kavurič nous a efficacement aidé dans nos travaux et nous tenons à le remercier de son concours.

Empêchés, par suite d'autres travaux plus urgents, de poursuivre cette étude, nous ne nous y sommes intéressés à nouveau que tout récemment. Nous avons en effet constaté que, dans les publications récentes, divers auteurs s'occupant de questions analogues, supposent l'état des tensions plus simples qu'il ne l'est en réalité.

Nous saisissons donc cette occasion pour communiquer les résultats de nos recherches sur cette question, que l'on rencontre presque constamment, sous des formes très différentes, dans la théorie et dans la pratique de la construction.

Résumé.

Une semi-articulation peut être considérée comme une pièce prismatique comprimée par une force concentrée sur une partie rétrécie de sa base. L'auteur a effectué des essais sur un modèle prismatique en verre, comprimé par une force axiale. La section rétrécie était du $^1/_{10}$ de la largeur du prisme. Tous les efforts ont été uniformément répartis le long de l'épaisseur du

modèle (Problème d'élasticité plane). — Méthode employée pour déterminer les directions et les valeurs des contraintes principales: Photo-elasticimétrie. — Les trajectoires des contraintes principales (courbes isostatiques) forment, dans le cas des problèmes d'élasticité plane, deux familles de courbes orthogonales. Il est utile de distinguer bien nettement l'une par rapport à l'autre pour faciliter la compréhension des problèmes. — Expression des contraintes principales en élasticité plane en général à l'aide de la fonction d'Airy, et en coordonnées curvilignes isostatiques. Equation différentielle partielle, linéaire de 2ème ordre de la fonction d'Airy en coordonnées isostatiques; cette équation est intégrable. — Méthode graphico-expérimentale utilisée dans le cas du problème proposé. — Le résultat de la présente recherche expérimentale complète les travaux antérieurs effectués dans ce domaine: Découverte de deux points singuliers dans les angles des abouts rectangulaires des pièces formant la semi-articulation. Les contraintes principales, dont les directions sont tangentes à l'une des deux familles des courbes isostatiques, sont des compressions, tandis que les contraintes principales dont les directions sont tangentes à l'autre famille sont des tractions proprement dites, à l'exception de trois zones, dont deux entourent les deux points singuliers qui viennent d'être signalés, et la troisième est au voisinage immédiat de la section rétrécie, où ces contraintes principales sont des compressions. — Comparaison des résultats obtenus avec ceux de MM. Coker, Favre, Miura et Mörsch.

Zusammenfassung.

Ein unvollkommenes Gelenk kann als ein prismatischer Stab betrachtet werden, der durch eine Kraft beansprucht wird, die nur auf einen Teil seiner Fläche wirkt. Der Verfasser hat Versuche ausgeführt mit einem prismatischen Glasmodell, auf das eine axiale Kraft einwirkte. Die belastete Breite betrug $^1/_{10}$ der Gesamtbreite des Prismas. In der Tiefenrichtung wurde das Prisma überall gleich beansprucht (Ebenes Problem der Elastizitätstheorie). Methode zur Bestimmung der Richtung und Größe der Hauptspannungen: Photoelastische Methode. — Die Hauptspannungstrajektorien (Isostaten) bilden für die ebenen Probleme der Elastizitätstheorie zwei Scharen von Orthogonaltrajektorien. Man tut gut daran, genau zwischen den beiden Scharen zu unterscheiden, da man dann das Problem leichter erfaßt. Ausdruck für die Hauptspannungen bei ebenen Problemen meist mittels der Airy'schen Spannungsfunktion in krummlinigen isostatischen Koordinaten. Lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung der Airy'schen Spannungsfunktion in isostatischen Koordinaten; diese Gleichung ist integrierbar. — Anwendung der graphisch-experimentellen Methode auf das vorliegende Problem. — Das Ergebnis dieser experimentellen Untersuchung ergänzt die früheren Arbeiten auf diesem Gebiet: Auffinden von zwei singulären Punkten in den beiden Eckpartien des Prismas. Die Hauptspannungen, deren Richtung tangential zur einen Schar der Trajektorien verläuft, sind Druckspannungen, während die Hauptspannungen tangential zur andern Schar Zugspannungen sind; drei Zonen ausgenommen, von denen zwei die oben erwähnten singulären Punkte umgeben, indes die dritte sich in unmittelbarer Nähe des verminderten Querschnitts befindet; in diesen Zonen sind die Hauptspannungen Druckspannungen. — Vergleich dieser Ergebnisse mit den Arbeiten von Coker, Favre, Miura und Mörsch.

Summary.

An imperfect articulated joint may be considered as a prism stressed by a load acting only on part of its surface. The author has carried out tests with a prismatic model acted on by an axial force. The loaded breadth was $^1/_{10}$th of the total breadth of the prism. In the longitudinal direction the prism was everywhere equally stressed (plane elastic problem). Method of determining the direction and magnitude of the main stresses: photo-elastic method. The trajectories of the main stresses (isostats) form for the plane elastic problems two series of orthogonal trajectories. It is well to note exactly the difference between the two series, since the problem is then easier to comprehend. Expression for the main stresses in the case of plane problems mostly by means of the AIRY stress function in curvilinear isostatic coordinates. Linear partial differential equation of the second order of the AIRY stress function in isostatic coordinates; this equation can be integrated. — Application of the graphic experimental method to the present problem. — The result of this experimental investigation supplements the former work done in this branch: Discovery of two singular points in the two corner parts of the prism. The main stresses directed tangentially to one series of the trajectories, are compression stresses, whilst the main stresses directed tangentially to the other series of trajectories are tensile stresses, except in three zones, two of which surround the above-mentioned singular points, whilst the third is in the immediate neighbourhood of the reduced cross-section; in these zones the main stresses are tensile stresses. — Comparison of these results with the work of COKER, FAVRE, MIURA and MÖRSCH.