Vibrations transversales et flambage des systèmes en portique traités comme problème commun de stabilité

Autor(en): **Nowacki, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **9 (1949)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9709

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Vibriatons transversales et flambage des systèmes en portique traités comme problème commun de stabilité

Querschwingungen und Knicken von Rahmensystemen, behandelt als angewandte Stabilitätsprobleme

Transverse vibrations and the buckling of frame systems, treated as applied problems of stability

Prof. Dr. W. Nowacki, École Polytechnique, Gdańsk

A. Dans la mécanique des corps parfaitement rigides on applique généralement la mesure dynamique pour déterminer le degré de stabilité du système. En écartant le corps de sa position d'équilibre nous observons si le système reprend sa position d'équilibre d'une manière lente ou rapide. Une haute stabilité du système donnera une haute fréquence de vibrations; au cas où le degré de stabilité baisse, la fréquence des vibrations s'évanouit et, en se rapprochant de la limite de stabilité, elle tend vers zéro. La période des vibrations propres, éventuellement la fréquence des vibrations, constitue dans ce cas la mesure dynamique d'instabilité.

La mesure dynamique d'instabilité a été également appliquée aux corps élastiques. L'expérience toute simple faite par M. A. Sommerfeld[1]), affirmée par des considérations théoriques, établit qu'une barre mince, verticale, soumise aux vibrations transversales, possède une fréquence plus haute dans la position (fig. 1b) que dans celle de (fig. 1a).

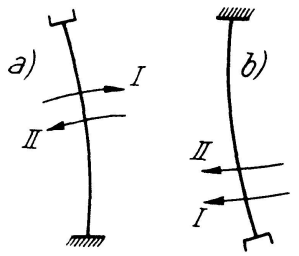

Fig. 1

Dans la première position le poids propre de la barre y produit des contraintes de compression et, en écartant la barre de sa position d'équilibre, le moment des forces de gravité II est opposé au moment ramenant la barre dans sa position d'équilibre.

Dans la seconde position le poids propre produit la tension et les moments I et II agissent dans la même direction. Si nous plaçons des poids sur le plateau S dans la première position alors, avec l'accroissement de la charge, la fréquence des vibrations propres démontrera une diminution graduelle. Pour la

[1]) *A. Sommerfeld:* „Eine einfache Vorrichtung zur Veranschaulichung des Knickvorganges". Z.V.D.J. 1905, Pg. 1320.

fréquence $\omega \to 0$ la charge et le poids propre de la barre tendent vers la charge critique de la barre au flambage.

Une poutre librement appuyée sur deux points, sollicitée par la contrainte d'une force longitudinale et soumise aux vibrations transversales varie la fréquence des vibrations propres par rapport à la grandeur de la force longitudinale suivant la formule:

$$\omega_k^2 = \bar{\omega}_k^2 \left(1 - \frac{S}{S_k}\right) \tag{a}$$

où $\bar{\omega}_k = \dfrac{2\pi}{\bar{T}_k}$ est la fréquence des vibrations propres en l'absence de la force longitudinale ($S = 0$)

$\omega_k = \dfrac{2\pi}{T_k}$ est la fréquence des vibrations propres quand $S \neq 0$

$S_k = \dfrac{k^2 \pi^2 E S}{l^2}$ est la force critique du flambage.

Il résulte de l'équation (a) que:

a) La fréquence des vibrations propres ω_k baisse avec la force longitudinale croissante et par rapport à $S \to S_k$ elle tend vers zéro;
b) la fréquence des vibrations propres augmente avec l'accroissement de la force de tension S;
c) dans le cas de vibrations forcées la force critique de la barre diminue avec l'accroissement de ω.

Nous tenons le susdit théorème de M. L. Euler.

La relation (a) constitue la mesure dynamique du flambage de la barre considérée. Une approximation de cette relation sera propre pour les barres à section variable et à divers modes d'encastrement des extrémités de la barre.

En pratique on profite de la mesure dynamique de flambage pour déterminer les forces critiques des pylônes, des mâts où, autant sur le modèle que dans la nature, la détermination de la durée des vibrations propres n'offre pas de difficultés; la difficulté est dans la détermination de la rigidité à la flexion du système (valeur correspondante $E J$ pour la barre).

Dans ce qui suit nous envisagerons les systèmes en portique aux barres soumises aux vibrations transversales et en même temps sollicitées par des contraintes de compression et de tension.

B. Considérons un système en portique quelconque, plane, non assujetti au décalage, composé de barres simples. Les forces sollicitantes agissent uniquement dans les noeuds en produisant dans les barres à l'état statique des forces exclusivement longitudinales. Les sections doivent être choisies de manière à ce que le flambage puisse se produire uniquement dans le plan du système à portique. Admettons que les barres sont incompressibles sans tenir compte de l'influence des forces longitudinales sur la déformation du système et en négli-

geant l'influence des vibrations longitudinales des barres. Supposons en plus que toutes les bases de la théorie de flambage ainsi que des vibrations propres soient réalisées et que le problème lui-même soit réduit à l'espace des déformations élastiques.

Vu le haut degré d'hyperstaticité du système en portique, nous appliquerons la méthode de déformation en posant les angles de rotation des noeuds comme grandeurs géométriques surnuméraires.

Si nous écartons le système en portique de sa position d'équilibre et supprimons ensuite brusquement la cause de ce déplacement — le dit système sera soumis aux vibrations transversales libres. En négligeant l'influence de l'amortissement extérieur et intérieur ces vibrations ne cesseront pas et ne diminueront pas leurs amplitudes.

De ce système en portique éliminons la barre $J - K$. Aux extrémités de la barre soumise aux vibrations propres naissent les moments fléchissants et les forces de tranchantes aux amplitudes M_J, M_K, Q_J, Q_K et se produisent les angles et les déplacements φ_J, φ_K, y_J, y_K.

L'équation différentielle du problème s'écrit alors:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

ρ – masse de la barre rapportée à l'unité de longueur. Admettant que $y(x, t) = y(x) \sin \omega t$ nous transformons l'équation (1) en équation différentielle ordinaire:

$$EJ\frac{d^4 y}{dx^4} + S\frac{d^2 y}{dx^2} - \omega^2 \rho y = 0 \tag{2}$$

Introduisant les valeurs:

$$\alpha^2 = \frac{S l^2}{EJ} \qquad \beta^4 = \frac{\rho \omega^2 l^4}{EJ} \qquad \xi = \frac{x}{l}$$

$$\delta = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \beta^4}} \qquad \epsilon = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \beta^4}}$$

nous écrirons l'intégrale générale de l'équation (2) exprimée par:

$$y(\xi) = C_1 \cosh \delta\xi + C_2 \sinh \delta\xi + C_3 \cos \epsilon\xi + C_4 \sin \epsilon\xi \tag{3}$$

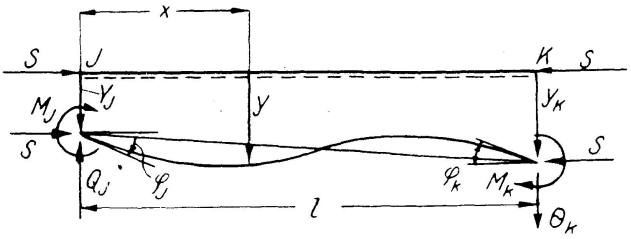

Fig. 2

Des conditions des bords:

$$\xi = 0: \quad y(0) = y_J \quad y'(0) = \varphi_J l$$
$$\xi = 1: \quad y(1) = y_K \quad y'(1) = \varphi_K l$$

nous déterminons les constantes d'intégration $C_1 \ldots . C_4$ soient les fonctions des déplacements et des rotations des sections des bords.

En posant:

$$M_J = -\frac{EJ}{l^2} y''(0) \qquad M_K = \frac{EJ}{l^2} y''(1)$$

$$Q_J = -\frac{EJ}{l^3} y'''(0) \qquad Q_K = -\frac{EJ}{l^3} y'''(1)$$

nous exprimons les moments fléchissants et les forces tranchantes dans les noeuds en fonctions des déplacements et des rotations. Nous obtenons ainsi des équations dites équations transformables de la méthode de déformation.

$$\begin{aligned} M_J &= \mu[c\varphi_J + s\varphi_K] - \mu'[r y_K - t y_J] \\ M_K &= \mu[s\varphi_J + c\varphi_K] - \mu'[t y_K - r y_J] \\ Q_J &= -\mu'[t\varphi_J + r\varphi_K] + \mu''[n y_K - m y_J] \\ Q_K &= -\mu'[r\varphi_J + t\varphi_K] + \mu''[m y_K - m y_J] \end{aligned} \tag{4}$$

$$\mu = \frac{2EJ}{l} \qquad \mu' = \frac{3\mu}{l} \qquad \mu'' = \frac{2u'}{l}$$

Dans les formules (4) il vient:

$$\begin{aligned} c(\alpha,\beta) &= \frac{\delta^2+\epsilon^2}{2\Delta}(\delta\cosh\delta\sin\epsilon - \epsilon\cos\epsilon\sinh\delta) \\ s(\alpha,\beta) &= \frac{\delta^2+\epsilon^2}{2\Delta}(\epsilon\sinh\delta - \delta\sin\epsilon) \\ r(\alpha,\beta) &= \frac{\delta^2+\epsilon^2}{2\Delta}\,\delta\epsilon(\cosh\delta - \cos\epsilon) \\ t(\alpha,\beta) &= \frac{\delta\epsilon}{6\Delta}[2\delta\epsilon\sinh\delta\sin\epsilon + (\delta^2-\epsilon^2)(\cosh\delta\cos\epsilon - 1)] \\ n(\alpha,\beta) &= \frac{\delta^2+\epsilon^2}{12\Delta}\delta\epsilon(\delta\sinh\delta + \epsilon\sin\epsilon) \\ m(\alpha,\beta) &= \frac{\delta^2+\epsilon^2}{12\Delta}\delta\epsilon(\delta\sinh\delta\cos\epsilon + \epsilon\sin\epsilon\cosh\delta) \\ \Delta &= 2\epsilon\delta(1-\cosh\delta\cos\epsilon) + (\delta^2-\epsilon^2)\sinh\delta\sin\epsilon \end{aligned} \tag{5}$$

Dans le cas particulier de vibrations propres en l'absence de la force axiale:

$$S = 0 \qquad \alpha = 0 \qquad \delta = \epsilon = \beta$$

nous obtenons

$$
\begin{aligned}
c(0,\beta) &= \frac{\beta}{2\Delta_1}(\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta)\\
s(0,\beta) &= \frac{\beta}{2\Delta_1}(\sinh\beta - \sin\beta)\\
r(0,\beta) &= \frac{\beta^2}{6\Delta_1}(\cosh\beta - \cos\beta)\\
t(0,\beta) &= \frac{\beta^2}{6\Delta_1}\sinh\beta\sin\beta\\
m(0,\beta) &= \frac{\beta^3}{12\Delta_1}(\sinh\beta\cos\beta + \cosh\beta\sin\beta)\\
n(0,\beta) &= \frac{\beta^3}{12\Delta_1}(\sinh\beta + \sin\beta)\\
\Delta_1 &= 1 - \cosh\beta\cos\beta
\end{aligned}
\tag{5a}
$$

Dans le cas de: $\omega = 0$; $\delta = 0$; $\epsilon = \alpha$ nous obtenons:

$$
\begin{aligned}
c(\alpha, 0) &= \frac{\alpha}{2\Delta_2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\\
s(\alpha, 0) &= \frac{\alpha}{2\Delta_2}(\alpha - \sin\alpha)\\
r(\alpha, 0) &= t(\alpha, 0) = \frac{\alpha^2}{6\Delta_2}(1 - \cos\alpha)\\
n(\alpha, 0) &= m(\alpha, 0) = \frac{\alpha^3}{12\Delta_2}\sin\alpha\\
\Delta_2 &= 2(1-\cos\alpha) - \alpha\sin\alpha
\end{aligned}
\tag{5b}
$$

Enfin pour: $\alpha \to 0$; $\beta \to 0$ nous passons du problème dynamique au problème statique:

$$c(0,0) = 2 \quad s(0,0) = r(0,0) = t(0,0) = n(0,0) = m(0,0) = 1.$$

On trouve dans ce cas l'équation transformable connue de la statique des systèmes en portique:

$$M_J = \mu(2\varphi_J + \varphi_K) - \mu'(y_k - y_J) \quad \text{etc.}$$

Pour une barre élastiquement encastrée dans le noeud K et munie d'une articulation dans le noeud J les équations transformables (4) prennent une expression différente. En utilisant la condition $M_J = 0$ nous éliminons la grandeur φ_J des équations (4); cette dernière pourra s'écrire alors:

$$
\begin{aligned}
M_K &= \mu\bar{c}\varphi_K - \mu'(\bar{r}y_K - \bar{t}y_J)\\
Q_J &= -\mu'\bar{r}\varphi_K + \mu''(\bar{n}y_K - \bar{m}y_J)\\
Q_K &= -\mu'\bar{t}\varphi_K + \mu''(\bar{m}y_K - \bar{n}y_J)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

où $\bar{c} = \dfrac{c^2 - s^2}{c}$ $\quad \bar{c} = \dfrac{\delta^2 + \epsilon^2}{2} \cdot \dfrac{\sinh\delta\sin\epsilon}{\delta\cosh\delta\sin\epsilon - \epsilon\sinh\delta\cos\epsilon}$ etc.

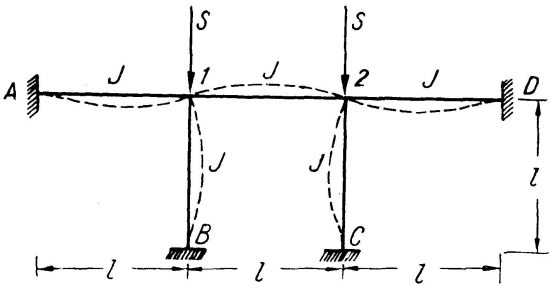

Fig. 3

Si la force S est la force de tension il faut dans les formules (5) et (5b) remplacer la valeur α par la valeur: αi $i = \sqrt{-1}$.

Les équations transformables posées ci-dessus permettent de résoudre toute une série de systèmes en portique soumis aux vibrations propres avec concours des forces axiales.

a) Vibrations propres et flambage du système en portique.

1. Nous considérons un cadre à réseau orthogonal représenté par la fig. 3. Ce cadre est un système doublement, géométriquement hyperstatique. Les angles φ_1 et φ_2 en sont les valeurs inconnues. Les noeuds bien équilibrés donneront la quantité désirée d'équations conditionnelles en réduisant, conformément au principe d'Alembert le problème dynamique en problème statique. La somme des amplitudes des moments dans les noeuds 1 et 2 doit être pour chaque instant t égale à zéro.

$$\text{Soit:} \quad M_{1A} + M_{1B} + M_{12} = 0 \quad M_{21} + M_{2C} + M_{2D} = 0 \tag{7}$$

En utilisant les équations transformables nous aurons un système de deux équations homogènes linéaires par rapport à φ:

$$\begin{aligned} [2\,c(0,\beta) + c(\alpha,\beta)]\,\varphi_1 + s(0,\beta)\,\varphi_2 &= 0 \\ s(0,\beta)\,\varphi_1 + [2\,c(0,\beta) + c(\alpha,\beta)]\,\varphi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Le système des équations (8) ne sera non contradictoire (en négligeant la solution triviale $\varphi = 0$) que lorsque le déterminant du système d'équations $D(\alpha,\beta)$ sera égal à zéro. La condition $D(\alpha,\beta) = 0$ donne une équation transcendante à ∞ quantités de racines β. La valeur minimale déterminera la fréquence fondamentale des vibrations propres.

Le déterminant $D(\alpha,\beta) = 0$ donne les équations suivantes:

$$\begin{aligned} 2\,c(0,\beta) + c(\alpha,\beta) - s(0,\beta) &= 0 \\ 2\,c(0,\beta) + c(\alpha,\beta) + s(0,\beta) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

La première de ces équations exprime la forme symétrique ($\varphi_1 = -\varphi_2$), des vibrations, la deuxième leur forme antimétrique ($\varphi_1 = \varphi_2$). La fréquence des vibrations propres diminue avec l'accroissement de la force S et il en résulte pour $\omega \to 0$ $\beta \to 0$ le critère de flambage exprimé par les équations (9') ci-dessous:

$$\begin{aligned} 2\,c\,(0{,}0) + c\,(\alpha, 0) - s\,(0{,}0) &= 0 \quad c\,(\alpha, 0) + 3 = 0 \\ 2\,c\,(0{,}0) + c\,(\alpha, 0) + s\,(0{,}0) &= 0 \quad c\,(\alpha, 0) + 5 = 0 \end{aligned} \tag{9'}$$

La première de ces équations donne la forme symétrique du flambage: $S_{min} = 5{,}535^2 \frac{E\,J}{l^2}$. La seconde équation — la forme antimétrique du flambage:

La tendence de $\omega \to 0$ vers zéro est ici la mesure dynamique du flambage. Une pareille conception du phénomène de flambage élimine le passage subit de l'état de l'équilibre stabile à l'instabile ce qui a lieu dans l'étude statique de ce phénomène.

Enfin à défaut des forces S, nous obtenons des équations (9) les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} 3\,c\,(0,\beta) - s\,(0,\beta) &= 0 \quad \beta_1 = 3{,}695 \\ 3\,c\,(0,\beta) + s\,(0,\beta) &= 0 \quad \beta_2 = 4{,}17 \end{aligned} \tag{9''}$$

Compte tenu de la forme symétrique des vibrations nous obtenons de la première équation (9″) la fréquence fondamentale des vibrations propres:

2. Pour les systèmes en portique réguliers nous simplifierons considérablement les notions en posant l'équation aux différences.

Ainsi pour un cadre continu, comme l'indique la fig. 4, l'établissement de l'équilibre du noeud x donne:

$$M_{x,\,x-1} + M_{x,\,x+1} + M_{xx'} = 0 \tag{10}$$

ou:

$$\varphi_{x-1}\, s\,(0,\beta) + \varphi_x [2\,c\,(0,\beta) + c\,(\alpha,\beta)\,.\,k] + \varphi_{x+1}\, s\,(0,\beta) = 0$$

$$x = 1, 2 \ldots n-1 \qquad k = \frac{J}{J_0}\,\frac{l_0}{l}$$

La solution de cette équation aux différences sera: $\varphi_x = A \cos a\,x + B \sin a\,x$. Des conditions des bords du problème:

$$1.\ x = 0 \quad \varphi_0 = 0 \qquad 2.\ x = n \quad \varphi_n = 0$$

nous obtiendrons:

$$A = 0 \qquad \sin a\,n = 0 \qquad a = j\,\frac{\pi}{n} \qquad j = 0, 1, 2 \ldots n$$

On a donc: $\varphi_x = B \sin j\frac{\pi x}{n}$. En substituant cette dernière valeur dans l'équation (10) nous trouvons l'équation conditionnelle du problème:

$$2\left[s\,(0,\beta) \cos\frac{j\,\pi}{n} + c\,(0,\beta)\right] = -\,k\,c\,(\alpha,\beta) \tag{11}$$

Des valeurs: $j = 0, 1, 2 \ldots\ldots n$ on ne doit tenir compte que de la valeur: $j = n - 1$. Ce qui peut s'écrire:

$$2\,s\,(0,\beta) \cos\frac{\pi}{n} = k\,c\,(\alpha,\beta) + 2\,c\,(0,\beta)\,. \tag{11'}$$

Compte tenu de β = const. l'équation (11') donne une quantité infinie de racines α; et à α = const. une quantité infinie de racines β. La valeur minimale de la racine α determinera la valeur minimale de la force critique aux vibrations forcées et à la fréquence de ω, la valeur minimale de β donnera la fréquence des vibrations fondamentales la force longitudinale agissant.

Pour $\quad n \to \infty \quad \alpha = 0 \quad s(0, \beta) = \dfrac{k+2}{2} c(0, \beta)$

Pour $\quad n \to \infty \quad \beta = 0 \quad k c(\alpha, 0) + 2 = 0$

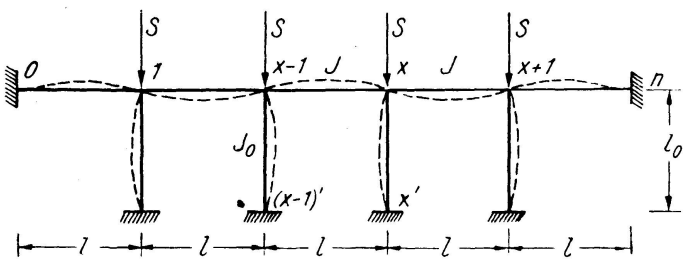

Fig. 4

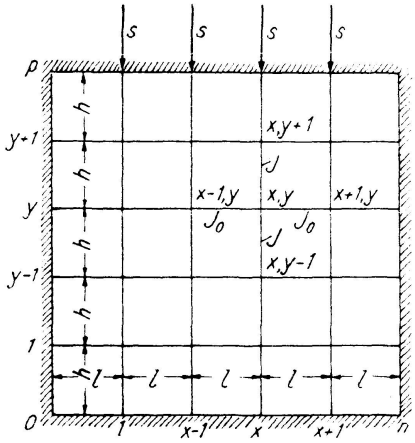

Fig. 5

3. Pour un cadre régulier étagé (fig. 5) l'équation de l'équilibre au noeud x, y prend la forme de:

$$\begin{gathered} s(0, \beta_0)\, \varphi_{x+1,\, y} + 2\, c(0, \beta_0)\, \varphi_{xy} + s(0, \beta_0)\, \varphi_{x-1,\, y} + \\ + k\,[s(\alpha, \beta)\, \varphi_{x,\, y+1} + 2\, c(\alpha, \beta)\, \varphi_{xy} + s(\alpha, \beta)\, \varphi_{x,\, y-1}] = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

$$k = \frac{J}{J_0}\,\frac{l}{h} \qquad \beta_0 = l \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho}{E J_0}} \qquad \beta = h \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho}{E J}} \qquad \alpha = h \sqrt{\frac{s}{E J}}$$

On peut traiter ces relations comme équations aux différences partielles.

En portant dans l'équation (12) la fonction:

$$\varphi_{xy} = B \cdot D \sin \frac{i \pi x}{n} \sin \frac{j \pi y}{p}$$

$$i = 0, 1, \ldots n \qquad j = 0, 1, \ldots p$$

remplissant les conditions des bords au périmètre du cadre (encastrement complet) nous obtenons en appliquant les seules valeurs possibles de $i = n - 1$ ainsi que de: $j = p - 1$ l'équation conditionnelle suivante du problème:

$$s(0, \beta_0) \cos \frac{\pi}{n} + k\, s(\alpha, \beta) \cos \frac{\pi}{p} = c(0, \beta_0) + k\, c(\alpha, \beta) \tag{13}$$

Considérons les cas particuliers.

1. Flambage du cadre: $\beta = 0 \quad \beta_0 = 0 \quad s(0, \beta_0) = 1 \quad c(0, \beta_0) = 2$

$$\cos\frac{\pi}{n} + k\,s(\alpha, 0)\cos\frac{\pi}{p} = 2 + k\,c(\alpha, 0) \tag{13'}$$

Pour $n = p$ ainsi que pour $K = 1$ on a calculé les valeurs pour le nombre ascendant des travées (fig. 6a):

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{2 + c(\alpha, 0)}{1 + s(\alpha, 0)}$$

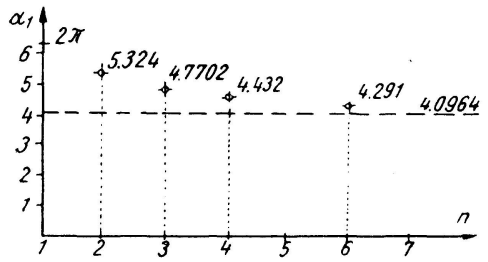

Fig. 6a

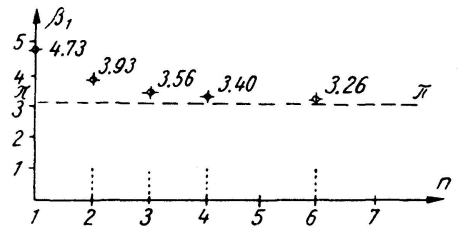

Fig. 6b

2. Dans le cas où $\alpha = 0$, c'est-à-dire dans le cas de vibrations en l'absence de la force axiale, soient $k = 1 \quad \beta = \beta_0$ et $n = p$ l'équation (13') deviendra:

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{c(0, \beta)}{s(0, \beta)}$$

ou

$$\frac{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta}{\sinh\beta - \sin\beta} = \cos\frac{\pi}{n} \tag{13''}$$

En partant de l'équation (13'') on a calculé les racines minimales β_1 au nombre ascendant des travées comme cela est indiqué dans la fig. 6b. La valeur de β_1 diminue jusqu'à la valeur π.

Pour $n \to \infty$ nous obtenons: $\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$, c'est-à-dire la fréquence de vibration fondamentale de la poutre librement appuyée sur deux points. L'influence de l'encastrement diminue considérablement avec l'augmentation du nombre des travées.

Considérons encore une poutre continue soumise aux vibrations transversales et à la tension produite par la force S. Ce cas résulte de l'équation (13) en y portant les relations:

$$J_0 = 0 \qquad k = \infty.$$

Alors l'équation conditionnelle des vibrations propres de la poutre continue: 0, 1, 2 . . . . . p se mettra sous la forme:

$$\cos\frac{\pi}{p} = \frac{c(\alpha i, \beta)}{s(\alpha i, \beta)} \qquad i = \sqrt{-1} \tag{13'''}$$

Pour la valeur $p \to \infty$ nous obtiendrons la formule:

$$\frac{\epsilon}{\delta} \frac{\sin\delta}{1+\cos\delta} \cdot \frac{\cosh\epsilon + 1}{\sinh\epsilon} = 1$$

Il résulte du calcul de ces équations que la fréquence ω augmente avec l'accroissement de la force S.

4. Dans le cas d'un cadre mobile (fig. 7) les angles de rotation φ_1, φ_2 ainsi que le déplacement horizontal de la barre $y_1 = y_{1B}$ apparaissent comme grandeurs surnuméraires.

L'équilibrage des noeuds 1 et 2, ainsi que l'équilibrage de la susdite barre conduisent à trois équations:

$$\begin{aligned} M_{1A} + M_{1B} + M_{12} &= 0 \\ M_{21} + M_{2C} + M_{2D} &= 0 \\ Q_{1B} + Q_{2C} &= 0 . \end{aligned} \tag{14}$$

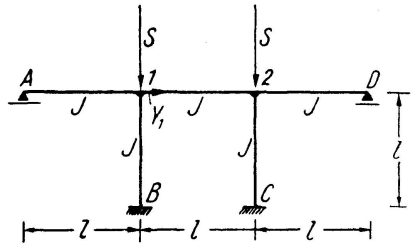

Fig. 7

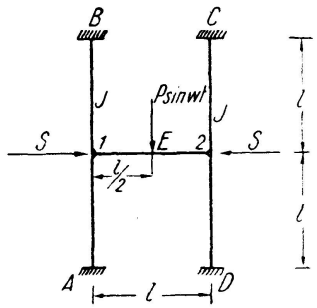

Fig. 8a

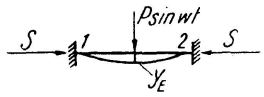

Fig. 8b

En exprimant les moments et les forces tranchantes par les angles φ_1, φ_2 et le déplacement y_1 nous aurons:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 \mu [\bar{c}(0,\beta) + c(0,\beta) + c(\alpha,\beta)] + \varphi_2 \mu s(0,\beta) - y_1 \mu' t(\alpha,\beta) = 0 \\ &\varphi_1 \mu s(0,\beta) + \varphi_2 \mu [\bar{c}(0,\beta) + c(0,\beta) + c(\alpha,\beta)] - y_1 \mu' t(\alpha,\beta) = 0 \\ &-\varphi_1 \mu' t(\alpha,\beta) - \varphi_2 \mu' t(\alpha,\beta) + 2 y_1 \mu'' m(\alpha,\beta) = 0 . \end{aligned} \tag{14'}$$

La solution du déterminant du système d'équations (14') conduit aux équations conditionnelles:

$$\begin{aligned} &\bar{c}(0,\beta) + c(0,\beta) + c(\alpha,\beta) - s(0,\beta) = 0 \\ &\bar{c}(0,\beta) + c(0,\beta) + c(\alpha,\beta) + s(0,\beta) = \frac{3 t^2(\alpha,\beta)}{2 m(\alpha,\beta)} \end{aligned} \tag{15}$$

La première des équations (15) correspond à la forme symétrique des vibrations ($\varphi_1 = -\varphi_2$; $y_1 = 0$), tandis que la deuxième répond à la forme antisymétrique ($\varphi_1 = \varphi_2$; $y_1 \neq 0$).

Le flambage du système aura lieu pour $\omega \to 0$ L'on a alors:

$$\begin{aligned} c(\alpha, 0) + 2{,}5 &= 0 \\ c(\alpha, 0) + 4{,}5 &= 1{,}5 \frac{t^2(\alpha, 0)}{m(\alpha, 0)} \end{aligned} \qquad (15')$$

La valeur minimale de α_1 obtenue pour la forme antimétrique du flambage pourra s'écrire alors: $\alpha_1 = 2{,}816$

$$S_{k,1} = 2{,}816^2 \frac{EJ}{l^2}$$

b) Vibrations forcées.

Plaçons-nous dans le cas où dans les limites de la barre $J - K$ agit la force $P \sin \omega t$ perpendiculaire à l'axe de la barre — le système est soumis alors aux vibrations forcées à la fréquence ω. Les équations transformables (4) se mettent alors sous les formes suivantes:

$$\begin{aligned} M_J &= M_J^0 + \mu(c\varphi_J + s\varphi_K) - \mu'(r y_K - t y_J) \\ M_K &= M_K^0 + \mu(s\varphi_J + c\varphi_K) - \mu'(t y_K - r y_J) \\ Q_J &= Q_J^0 - \mu'(t\varphi_J + r\varphi_K) + \mu''(n y_K - m y_J) \\ Q_K &= Q_K^0 - \mu'(r\varphi_J + t\varphi_K) + \mu''(m y_K - n y_J). \end{aligned} \qquad (16)$$

Dans ces formules les grandeurs $M_J^0 \ldots Q_K^0$ déterminent les forces des noeuds de la barre $J - K$ complètement encastrée de par les deux côtés, chargée par la force $P \sin \omega t$.

Considérons maintenant le système en portique, fig. 8a. En raison de la symétrie du système et de sa charge: $\varphi_1 = -\varphi_2$; $y_{1A} = y_{2B} = 0$. L'équilibrage du noeud 1 s'exprime alors par:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 \mu [2c(0, \beta) + c(\alpha, \beta)] + \varphi_2 \mu s(\alpha, \beta) + M_{12}^0 = 0 \\ &\varphi_1 \mu = -\varphi_2 \mu = -\frac{M_{12}^0}{2c(0, \beta) + c(\alpha, \beta) - s(0, \beta)} \end{aligned} \qquad (17)$$

L'équilibrage du noeud E donne: $Q_{E2} - Q_{E1} + P = 0$. Nous obtenons

$$y_E \, 2\mu''_{EI} m(\alpha_{IE}, \beta_{IE}) - P = 0 \quad \text{d'ou la relation:}$$

$$y_E = \frac{P}{2\mu''_{EI} m(\alpha_{IE}, \beta_{IE})}$$

En posant encore:

$$M_{IE} = M_{12}^0 = -\mu'_{IE} r(\alpha_{IE}, \beta_{IE}) \, y_E \qquad M_{12}^0 = -\frac{Pl}{8} \frac{r\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)}{m\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)}$$

Nous pourrons écrire finalement:

$$\varphi_1 \mu = -\varphi_2 \mu = \frac{Pl}{8} \frac{r(\alpha/2, \beta/2)}{m(\alpha/2, \beta/2)[2c(0,\beta) + c(\alpha,\beta) - s(0,\beta)]} \tag{17'}$$

$$\alpha = l\sqrt{\frac{S}{EJ}} \qquad \beta = l\sqrt[4]{\frac{\rho\,\omega^2}{EJ}}$$

Tant la fréquence des vibrations forcées ω est différente de la fréquence des vibrations propres $\bar{\omega}$, remplissant les conditions de l'équation $2\,c(0,\beta) + c(\alpha,\beta) - s(0,\beta) = 0$, nous pouvons déterminer d'une manière définie la grandeur des forces d'une section quelconque.

Dans la formule (17') nous trouvons que plus haute est la fréquence des vibrations forcées d'autant plus petite est la force S nécessaire pour causer l'accroissement démesuré de l'angle φ_1.

Il y a lieu d'éliminer le cas $\varphi_1 \to \infty$ comme incompatible au principe de la théorie des vibrations: vu que l'équation (1) est juste uniquement pour des fléchissements minimes. La force S donc n'atteindra jamais la valeur critique $\bar{S}_k$ remplissant les conditions de l'équation $2\,c(0,\beta) + c(\alpha,\beta) - s(0,\beta) = 0$; le cadre sera détruit par suite de l'accroissement des efforts fléchissants. Il faut remarquer cependant que le paramètre S sera d'autant plus rapproché de la valeur $\bar{S}_k$ que la charge P sera moindre.

Dans le cas de $\omega \to 0$ nous avons affaire à la flexion et à la compression simultanées de la barre $1-2$, élastiquement encastrée dans les noeuds 1 et 2. L'on obtiendra alors:

$$\varphi_1 \mu = -\varphi_2 \mu = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{r\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)}{m\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)[3 + c(\alpha, 0)]} \tag{17''}$$

C) La détermination des racines dans les formules conditionnelles est très précaire au point de vue calcul. Aussi l'application des méthodes approximatives est-elle importante dans la pratique d'ingénieur; ces méthodes, tout en reduisant le volume des calculs, donnent des résultats suffisamment exacts pour la fréquence des vibrations propres ou des forces critiques.

Nous envisagerons ci-dessous l'application de l'invention de Vianello (connu par sa théorie du flambage des barres), développée par K. Pohl[2]), pour déterminer la fréquence des vibrations propres.

Considérons une poutre librement appuyée sur deux points (fig. 9). Posons l'équation (2) sous la forme:

$$EJ\frac{d^4 y}{dx^4} = -S\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 \rho y$$

---

[2]) *K. Pohl:* Zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Balkenträgern, Stahlbau 1937.

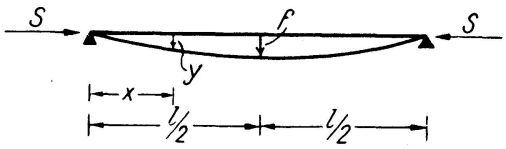

Fig. 9

En posant pour y, exprimant la forme approximative des vibrations la sinusoïde $y_0 = f \sin \frac{n \pi x}{l}$ nous obtiendrons:

$$EJ \frac{d^4 y_1}{dx^4} = f (Sp^2 + \omega^2 \rho) \sin px \qquad p = \frac{n \pi}{l}$$

Intégrations faites et tenant compte des conditions des bords du problème on obtiendra:

$$y_1 = \frac{f}{EJ p^4} (Sp^2 + \omega^2 \rho) \sin px$$

Posant $y_1 \approx y_0$, nous aurons la formule:

$$\omega_n^2 = \frac{EJ p^4}{\rho} \left(1 - \frac{S}{EJ p^2}\right) \qquad \omega_n^2 = \bar{\omega}_n^2 \left(1 - \frac{S}{\bar{S}_n}\right) \tag{18}$$

Nous avons obtenu dans ce cas le resultat exact, étant donné que la forme de flambage adoptée est identique à la forme réelle.

Pour les poutres continues nous adoptons la flèche y_0 des travées respectives sous la forme de sinusoïde, et cela de manière à ce que dans les travées voisines:

$$f_r = f_{r+1} \frac{l_r}{l_{r+1}}$$

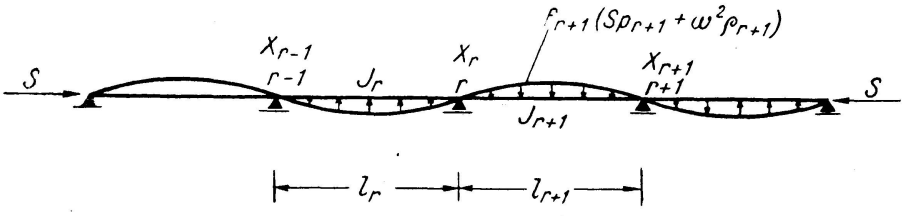

Fig. 10

En traitant dans chaque travée la grandeur $-f \,.\, (Sp^2 + \omega^2 \rho) \sin px$; $p = \frac{\pi}{l}$ comme charge extérieure nous déduirons les moments d'appui inconnus des équations trimembraires comme suit:

$$X_{r-1} l'_r + 2 X_r (l'_r + l'_{r+1}) + X_{r+1} l'_{r+1} +$$
$$+ \frac{6 l'_{r+1}}{\pi^3} f_{r+1} (S_{r+1} \pi^2 + \omega^2 \rho_{r+1} l^2_{r+1}) - \frac{6 l'_r}{\pi^3} f_r (S_r \pi^2 + \omega^2 \rho_r l^2_r) = 0 \tag{19}$$

$$l'_r = l_r \frac{J_c}{J_r}$$

Dans cette équation la grandeur J_c représente un moment d'inertie de comparaison.

Après avoir déterminé les inconnues X nous viendrons facilement à définir l'aire des lignes de fléchissement $\int y_1 dx$, correspondantes à la charge représentée par la fig. 10.

En tenant compte de: $\int y_1 dx \approx \int y_0 dx$ nous aurons la relation linéaire entre les grandeurs S et ω.

Nous définirons cette relation en examinant une poutre continue à trois travées:

$$X_1 = X_2 = -\frac{6f}{\pi^3} \cdot \frac{\omega^2 \rho l^2 (1-k^4) + (1-k^2) S \pi^2}{2k+3}.$$

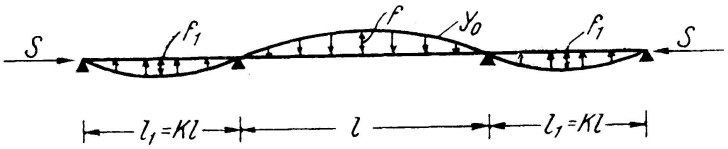

Fig. 11

En partant de: $\int y_0 dx \approx \int y_1 dx$ nous obtiendrons la relation:

$$\omega^2 = \bar{\omega}_1^2 \left(1 - \frac{S}{\bar{S}_1}\right) \tag{20}$$

où

$$\bar{S}_1 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot \frac{1 + 2k^2}{1 + 2k^4 - \frac{\pi^2}{4} \frac{(1-k^2)(1-k^3)}{2k+3}} \tag{21}$$

ainsi que

$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{\pi^4 EJ}{\rho l^4} \cdot \frac{1 + 2k^2}{1 + 2k^6 - \frac{\pi^2}{4} \frac{(1-k^3)(1-k^4)}{2k+3}} \tag{22}$$

Nous constatons qu'il résulte de la première approximation pour une poutre continue la même relation linéaire entre S et ω^2, que pour une poutre librement posée sur deux appuis.

Pour $K = \frac{2}{3}$ nous obtiendrons la force critique $\bar{S}_1 = \frac{16{,}3\, EJ}{l^2}$ au lieu du résultat exact $\frac{16{,}02\, EJ}{l^2}$. Dans le cas où $S = 0$ l'on obtiendra de l'équation (22) la valeur $\bar{\omega}_1 = \frac{14{,}68}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$ au lieu de la valeur exacte: $\bar{\omega}_1 = \frac{14{,}00}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$.

Les équations 21 et 22 donneront pour $K = 1$ les solutions exactes:

$$\bar{S}_1 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \qquad \bar{\omega}_1^2 = \frac{\pi^4 EJ}{l^4 \rho}$$

Dans le cas d'encastrement complet de la barre il faut faire grandement attention à ce que la ligne de fléchissement dans la première approximation remplisse les conditions des bords. Ainsi par exemple pour une poutre continue, encastrée complètement dans le noeud n, nous appliquerons dans la dernière travée la fonction:

$$y_0 = f\,(\sinh ax - b \sin ax) \qquad al = 3{,}9265 \qquad b = \frac{\sinh al}{\sin al} = -\,35{,}8741$$

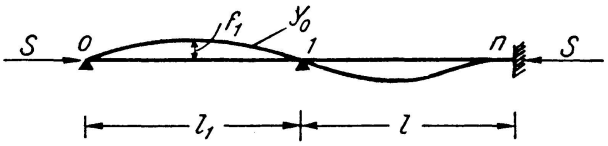

Fig. 12

et dans la travée $\qquad 0 - 1$

la fonction: $\qquad y_0 = f_1 \sin \dfrac{\pi x}{l_1}$

Les paramètres f_1, f sont liés par la relation suivante:

$$f_1 = f\,\frac{l_1}{l} \cdot \frac{al}{\pi}\,(1 - b)$$

La méthode que nous venons d'exposer pour une poutre continue peut être développée et aisément appliquée au système en portique.

Résumé

En partant de l'équation différentielle de la barre soumise simultanément aux vibrations transversales et aux sollicitations de compression par une force axiale parmanente, on a posé des équations transformables par la méthode de déformation et on les a utilisées pour établir les équations conditionnelles des vibrations propres des systèmes en portique.

Sur la base des équations conditionnellles on peut déterminer les fréquences alternatives des vibrations propres, compte tenu de la force axiale permanente dans les barres. Les fréquences des vibrations propres, en l'absence des forces axiales, ainsi que les forces critiques de flambage à la fréquence des vibrations propres tendant vers zéro, apparaissent comme cas particuliers.

L'étude du problème ci-dessus a été élargie sur les vibrations forcées avec concours d'une force axiale et il a été démontré dans l'exemple d'un système en portique simple qu'avec l'accroissement de la fréquence des vibrations forcées la force critique de flambage du système diminue.

Enfin la méthode connue de Vianello a été étendue sur le problème des sollicitations simultanées de vibration et de compression appliquées à une poutre continue.

Zusammenfassung

Ausgehend von der Differentialgleichung des gleichzeitig durch Querschwingungen und konstante Axialkräfte beanspruchten Stabes, hat der Verfasser Gleichungen aufgestellt, die mit der Deformationsmethode transformiert werden können und sie verwendet, um die Bedingungsgleichungen der Eigenschwingungen von Rahmensystemen aufzustellen.

Mit diesen Bedingungsgleichungen können die aufeinander folgenden Frequenzen der Eigenschwingungen unter Berücksichtigung der unveränderlichen Axialkraft in den Stäben bestimmt werden. Die Frequenzen der Eigenschwingungen bei fehlender Axialkraft, sowie die Knicklasten bei gegen Null abnehmender Frequenz der Eigenschwingungen erscheinen dann als Sonderfälle.

Das Studium des obenerwähnten Problems wurde ausgedehnt auf die erzwungenen Schwingungen mit gleichzeitig wirkender Axialkraft und es wurde am Beispiel eines einfachen Rahmens gezeigt, daß mit zunehmender Frequenz der erzwungenen Schwingung die Knicklast des Systems abnimmt.

Schließlich wurde die bekannte Methode von Vianello erweitert auf das Problem der gleichzeitigen Beanspruchung von durchlaufenden Balken durch Schwingungen und Druckkräfte.

Summary

Starting with the differential equation of a bar stressed simultaneously by transverse vibrations and constant axial forces, the author develops equations which can be transformed by the method of deformation, and he applies them to develop the equations of condition of natural vibrations of the frame systems.

With these equations of condition the successive frequencies of the natural vibrations can be determined by considering the unchanging axial force in the bars. The frequencies of the natural vibrations without any axial force, and also the buckling loads at a frequency of natural vibrations decreasing towards zero, then appear as particular cases.

The study of the above-mentioned problem was extended to forced vibrations with simultaneously acting axial force, and it was shown by the example of a simple frame, that, with increasing frequency of the forced vibration the buckling load of the system diminishes.

Finally, the known method of Vianello was extended to the problem of simultaneous straining of continuous beams by vibrations and pressure forces.