Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 9 (1949)

Artikel: Berechnung von Rahmensystemen mit Berücksichtigung der Säulenausbiegungen

Autor: Rambøll, B.J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9712

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Berechnung von Rahmensystemen mit Berücksichtigung der Säulenausbiegungen

Calculation of frame systems taking into account the bending of the columns

Calcul des cadres, compte tenu de la flexion des poteaux

Prof. Dr. techn. B. J. RAMBØLL, Kopenhagen

Abschnitt I

In den meisten Berechnungen nach der Elastizitätstheorie, von reinen Säulenberechnungen abgesehen, wird vorausgesetzt, daß die Deformationen unendlich klein bleiben. Diese Voraussetzung, die vielleicht früher als vernünftig betrachtet werden konnte, befriedigt für die schlanken Konstruktionen unserer Zeit nicht mehr immer.

Wenn wir die Deformationen in Betracht ziehen, ist bekanntlich die Proportionalität zwischen der Belastung und den Momenten nicht mehr gewährt. Wenn es sich darum handelt, die Bruchsicherheit zu finden, muß man den Sicherheitsgrad n in die Belastung einführen.

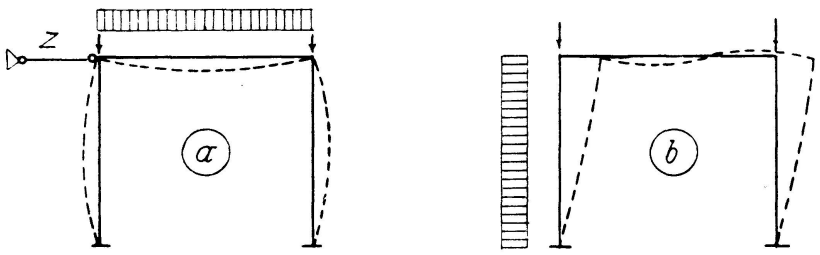

Fig. 1

In einem unbeweglichen Rahmen (Fig. 1a) und noch mehr in einem beweglichen (Fig. 1b) kann die Wirkung der Säulendeformationen sehr beträchtlich sein. Diese Verhältnisse werden in der vorliegenden Arbeit behandelt[1]). Grundlage der Berechnung bildet die Methode, wie sie Efsen[2]) und

[1]) *B. J. Rambøll:* Stabilitets- og Spaendingsberegning af Rammesystemer. Jul. Gjellerups Forlag. Kopenhagen 1944 (Dissertation). Die vorliegende Arbeit stützt sich auf diese Abhandlung.

[2]) *Axel Efsen:* Die Methode der primären Momente. Kopenhagen 1931 (Dissertation).

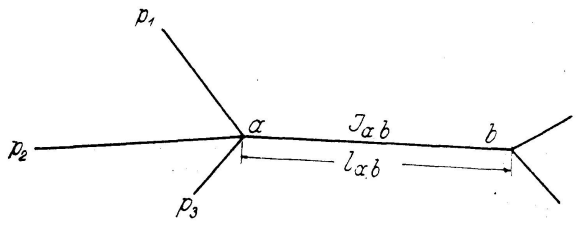

Fig. 2

später Nøkkentved)[3] entwickelt haben.

Die Methode ist sukzessiv, da jeweilen nur ein Stab ab (Fig. 2) belastet wird und zuerst die von dieser Belastung herrührenden Momente bestimmt werden.

I_{ab} und E_{ab} bezeichnen das Trägheitsmoment bzw. den Elastizitätsmodul für den Stab ab. Längsdeformationen in den Stäben, herrührend von den Normalspannungen, werden vernachlässigt.

Die Richtung der Winkeldrehungen und Momente ist positiv im Uhrzeigersinn. Nennt man die Konstruktion links von a den Knoten, wird τ_{ab} als die Winkeldrehung in a definiert, wenn der Knoten von dem Moment 1 belastet ist. Wenn der Knoten unverdrehbar ist, ist ab vollständig in a eingespannt, d.h. $\tau_{ab} = 0$. Ein Gelenk in a ergibt $\tau_{ab} = \infty$.

Wir nehmen an, daß durch die Belastung, falls der Stab ab beidseitig gelenkig gelagert ist, die Winkeldrehungen α_{ab} und α_{ba} in a bzw. b verursacht werden. Die Momente M_{ab} und M_{ba} werden durch die Einspannungen in a und b verursacht, d.h. der Stab kann als gelenkig gelagert werden, wenn er außer seiner Belastung noch durch die Momente M_{ab} und M_{ba} angegriffen wird.

Die Winkeldrehungen in a und b, die leicht als Reaktionen der Momentenfläche-Belastung gefunden werden, ergeben sich zu:

$$\alpha_{ab} + \frac{l_{ab}}{E_{ab}\, I_{ab}} \left(\frac{M_{ab}}{3} - \frac{M_{ba}}{6} \right) \quad \text{in } a$$

und

$$\alpha_{ba} + \frac{l_{ab}}{E_{ab}\, I_{ab}} \left(\frac{M_{ba}}{3} - \frac{M_{ab}}{6} \right) \quad \text{in } b\,.$$

Wenn der Stab ab von dem Knoten in a mit dem Moment M_{ab} belastet wird, so wird der Knoten vom Stab mit dem Moment $-M_{ab}$ belastet. Da die Winkeldrehung des Knotens durch das Moment $=1$ als τ_{ab} definiert ist, wird die ganze Winkeldrehung

$$-M_{ab}\, \tau_{ab}\,, \tag{1}$$

und da der Knoten und der Stab sich um denselben Winkel drehen müssen, folgt daraus:

$$\alpha_{ab} + \frac{l_{ab}}{6\, E_{ab}\, I_{ab}} (2\, M_{ab} - M_{ba}) = -M_{ab}\, \tau_{ab}$$

$$\alpha_{ba} + \frac{l_{ab}}{6\, E_{ab}\, I_{ab}} (2\, M_{ba} - M_{ab}) = -M_{ba}\, \tau_{ba}\,.$$

---

[3]) *Chr. Nøkkentved:* Bygningsstatiske Meddelelser. Kopenhagen 1932. S. 21—24 und S. 85—104.

Da $E\,I$ in der Regel eine unbequem große Zahl ist, wird rechnungsmäßig eingeführt:

$$\tau'_{ab} = \tau_{ab}\,\frac{E_c\,I_c}{l_c} \quad \text{und} \quad \alpha'_{ab} = \alpha_{ab}\,\frac{E_c\,I_c}{l_c}, \tag{2}$$

worin E_c, I_c und l_c konstante Größen sind.

Wird

$$\mu_{ab} = \frac{l_c\,E_{ab}\,I_{ab}}{l_{ab}\,E_c\,I_c} \tag{3}$$

nebst (2) in die vorstehenden zwei Gleichungen eingesetzt, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{ab} + \frac{1}{6\,\mu_{ab}}\,(2\,M_{ab} - M_{ba}) &= -\,M_{ab}\,\tau'_{ab} \\ \alpha'_{ba} + \frac{1}{6\,\mu_{ab}}\,(2\,M_{ba} - M_{ab}) &= -\,M_{ba}\,\tau'_{ba}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sind nun die Steifigkeiten τ'_{ab} und τ'_{ba} der Knoten bekannt, können die Einspannungsmomente — die primären Momente — in den Endpunkten des belasteten Stabs aus (4) gefunden werden.

Wenn der Knotenpunkt a im Gleichgewicht ist, muß M_{ab} Reaktionsmomente in den rechten Endpunkten der Stäbe ap verursachen, deren Summe notwendigerweise gleich M_{ab}, aber entgegengesetzt sein muß. Die verursachten Momente, z.B. M_{ap_1}, werden den Stab ap_1 deformieren, wodurch ein Moment M_{p_1a} im anderen Endpunkt des Stabes, der hier von einem Knoten festgehalten ist, entstehen wird.

Dieses Moment wird wieder Reaktionsmomente in den übrigen von p_1 ausgehenden Stäben verursachen u.s.w. Die primären Momente werden sich auf diese Weise in dem System fortpflanzen.

Zuerst werden wir das Moment M_{p_1a} finden. Gemäß Ausdruck (4) ergibt sich für den Stab ap_1, der nicht direkt belastet ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{6\,\mu_{ap_1}}\,(2\,M_{ap_1} - M_{p_1a}) &= -\,M_{ap_1}\,\tau'_{ap_1} \\ \frac{1}{6\,\mu_{ap_1}}\,(2\,M_{p_1a} - M_{ap_1}) &= -\,M_{p_1a}\,\tau'_{p_1a}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Wenn $M_{ap_1} = 1$, so nennen wir das Moment $M_{p_1a} = m_{p_1a}$, und es ergibt sich aus der letzten Gleichung (4):

$$m_{p_1a} = \frac{1}{2\,(1 + 3\,\mu_{ap_1}\,\tau'_{p_1a})}\,. \tag{5}$$

Das Moment M_{ap_1} wird also

$$M_{p_1a} = m_{p_1a} \cdot M_{ap_1} \tag{6}$$

verursachen, welches das gesuchte Moment ist.

Danach werden wir M_{ap_1} finden. Es ist notwendig, die Drehung des Knotenpunktes a zu beobachten, wenn wir die Momente finden wollen, welche durch das Moment M_{ab} in den Stäben ap_1 verursacht werden. In die erste Gleichung (4') wird (6) eingesetzt. Wenn mit c'_{ap_1} das Moment M_{ap_1} bezeichnet wird, welches durch die Winkeldrehung 1 entsteht (oder vielmehr, da der Faktor $\frac{l_c}{E_c I_c}$ eingeführt ist, durch die Winkeldrehung $\frac{l_c}{E_c I_c}$) ergibt sich

$$\frac{1}{6\,\mu_{ap_1}}(2\,c'_{ap_1} - m_{p_1 a}\,c'_{ap_1}) = 1$$

woraus

$$c'_{ap_1} = \frac{6\,\mu_{ap_1}}{2 - m_{p_1 a}} \tag{7}$$

Der Summe $\Sigma c'_{ap}$ der Momente in den Stäben ap entspricht also die Winkeldrehung $\frac{l_c}{E_c I_c}$ in a. Dem Moment $\frac{E_c I_c}{l_c}$ entspricht daher die Winkeldrehung

$$\frac{1}{\Sigma c'_{ap}} \cdot \frac{l_c}{E_c I_c}\,\frac{E_c I_c}{l_c} = \frac{1}{\Sigma c'_{ap}}.$$

Definitionsgemäß ist diese Winkeldrehung mit τ'_{ab} identisch, also:

$$\tau'_{ab} = \frac{1}{\Sigma c'_{ap}}. \tag{8}$$

c'_{ap_1} ist die Größe des Moments M_{ap_1}, wenn die Winkeldrehung in a gleich $\frac{l_c}{E_c I_c}$ ist. Da die Drehung gemäß (1) $-M_{ab}\,\tau_{ab}$ ist, ergibt sich

$$M_{ap_1} = c'_{ap_1}\,(-M_{ab}\,\tau_{ab})\,\frac{E_c I_c}{l_c} = -\,c'_{ap_1}\,M_{ab}\,\tau'_{ab}$$

woraus infolge (8)

$$M_{ap_1} = -\,M_{ab}\,\frac{c'_{ap_1}}{\Sigma c'_{ap}} \tag{9}$$

welches das gesuchte Moment ist.

Danach ist es möglich, alle Momente von einer Belastung auf dem Stab ab zu finden. Das Vefahren ist folgendes:

1. μ wird für alle Stäbe ausgerechnet. Da die Lagerung als bekannt vorausgesetzt sein muß, ist auch τ irgendwo bekannt (in der Regel Einspannung: $\tau = 0$ oder gelenkige Lagerung: $\tau = \infty$). An dieser Stelle ist m aus (5) und danach im Nachbarknotenpunkt c aus (7) und τ aus (8) zu finden. Von dem neuen Knotenpunkt aus, wo τ nun bekannt ist, wird auf dieselbe Weise weiter gefahren. Wenn alle *Rahmenzahlen* gefunden sind, wird mit der Momentberechnung begonnen.

2. Aus (4) ergeben sich die primären Momente:

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= -6\,\mu_{ab}\,\frac{\alpha'_{ab}\dfrac{1}{m_{ba}} + \alpha'_{ba}}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1} \\ M_{ba} &= -6\,\mu_{ab}\,\frac{\alpha'_{ba}\dfrac{1}{m_{ab}} + \alpha'_{ab}}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Es werden hier die der Gleichung (5) entsprechenden Ausdrücke eingesetzt.

3. Danach wird M_{ap_1} aus (9) berechnet, worauf

4. M_{p_1a} aus (6) gefunden wird.

5. Dieses Moment wird darnach auf die von p_1 ausgehenden Stäbe verteilt auf dieselbe Weise, wie M_{ab} auf die Stäbe ap verteilt wurde. So verfährt man weiter, bis alle Momente gefunden sind, oder bis die Momente bedeutungslos klein werden.

Ein Beispiel wird das Verfahren verständlich machen.

Zuerst wird (10) für einige gewöhnliche Fälle entwickelt.

a) Gleichförmige Belastung p.

Mit der Momentenparabel als Belastung ergeben sich die Winkeldrehungen aus den Reaktionen durch $E_{ab}I_{ab}$ dividiert:

$$\alpha_{ab} = -\alpha_{ba} = \frac{p\,l_{ab}^3}{24\,E_{ab}\,I_{ab}}.$$

Infolge (2) und (3) ergibt sich

$$\alpha'_{ab} = -\alpha'_{ba} = \frac{p\,l_{ab}^2}{24\,\mu_{ab}}.$$

(10) ergibt sich zu:

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= -\tfrac{1}{4}\,p\,l_{ab}^2\,\frac{\dfrac{1}{m_{ba}} - 1}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1} \\ M_{ba} &= +\tfrac{1}{4}\,p\,l_{ab}^2\,\frac{\dfrac{1}{m_{ab}} - 1}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1} \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

Wir geben einem Stab eine s-förmige Deformation, so daß man dieselbe Größe $\Psi_{ab}\dfrac{l_c}{E_c I_c}$ für die Winkeldrehungen der Stabenden bekommt. Wegen (2) ist dann $\alpha'_{ab} = \alpha'_{ba} = \Psi_{ab}$, wobei (10) ergibt:

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= -6\,\mu_{ab}\Psi_{ab}\,\frac{\dfrac{1}{m_{ba}}+1}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}}-1} \\ M_{ba} &= -6\,\mu_{ab}\Psi_{ab}\,\frac{\dfrac{1}{m_{ab}}+1}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}}-1} \end{aligned}\right\} \qquad (10'')$$

Selbst wenn die Spannung über der Proportionalitätsgrenze ist, wird die vorstehende Formel benutzt werden können, wenn man nur den der Bruchspannung entsprechenden Wert von E in μ einsetzt. Da man jedoch eben die Bruchspannung sucht, muß man zuerst einen Wert von E annehmen und danach umrechnen, wenn E nicht der gefundenen Bruchspannung entspricht. Die Konvergenz ist so gut, daß meistens kaum mehr als eine Umrechnung notwendig ist.

Für Stahl kann man in vielen Fällen

$$E = E_0\,\frac{4\,\sigma\,(\sigma_F-\sigma)}{\sigma_F^2} \quad \text{setzen,}$$

worin E_0 der Modul im elastischen Bereich ist und σ_F die Fließspannung, die oft als die Hälfte der Proportionalitätsspannung eingesetzt wird. Für Stahl 37 mit $E_0 = 2{,}1\cdot 10^6\,\mathrm{kg/cm^2}$ und $\sigma_F = 0{,}8\cdot 3700\ \mathrm{kg/cm^2}$ ergibt sich: $E = 0{,}96\,\sigma\,(2960-\sigma)$.

Beispiel: Der Rahmen in Fig. 5, dessen Stäbe alle gleich sind, wird anstatt der angegebenen Belastung von 15 t/m auf dem Balken belastet. Die Säulen sind unten eingespannt, und nicht wie in der Figur gelenkig. Die Rahmenzahlen werden ausgerechnet: wird $E_c\cdot I_c = E_{ab}\cdot I_{ab}$ gesetzt, wird $\mu = 1$ für alle Stäbe (die Säulenspannung befindet sich in dem elastischen Bereich)

$$\tau'_{ab} = 0, \quad m_{ab} = \tfrac{1}{2}, \quad c'_{ba} = 4, \quad \tau_{ba} = \tfrac{1}{4}, \quad m_{bc} = \frac{1}{3{,}5} = m_{cb}$$

$$(10'):\quad M_{bc} = -\tfrac{1}{4}\,15\cdot 6^2\,\frac{3{,}5-1}{3{,}5^2-1} = -\,33{,}0\ mt.$$

$$(9):\quad M_{ba} = -\,(-33{,}0)\cdot 1 = 33{,}0\ mt.$$

$$(6):\quad M_{ab} = \tfrac{1}{2}\cdot 33{,}0 = 16{,}5\ mt.$$

Abschnitt II. Rahmensäulen mit Querbelastung

a) E und I nicht konstant

Fig. 3 zeigt eine Säule, welche nebst der Druckkraft P und den Einspannungsmomenten M_{ab} und M_{ba} noch von einer Belastung mit der Kraftrichtung $\perp$ zur Säule angegriffen wird. Die Winkeldrehung α_{ab} am Stabende a wird gefunden als Reaktion zur Momentenflächen-Belastung, dividiert durch $E_{ab}\,I_{ab}$. Gemäß Fig. 3 ergibt sich

$$\alpha_{ab} = \frac{1}{l_{ab}} \int_0^{l_{ab}} \frac{M}{E_{ab}\, I_{ab}}\, x\, dx \tag{11}$$

Das Moment setzt sich zusammen aus den Einspannungsmomenten, den der Querbelastung entsprechenden Momenten und den von der Ausbiegung verursachten Momenten $P \cdot y$. Aus (11) erhält man

$$\alpha_{ab} = \frac{1}{l_{ab}} \int_0^{l_{ab}} \frac{1}{E_{ab}\, I_{ab}} (M_q + Py)\, x\, dx$$

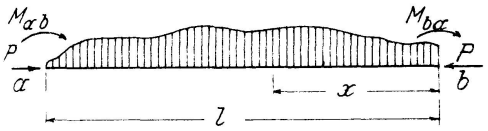

Fig. 3

worin M_q die Momentenflächenordinate von den Einspannungsmomenten und von der Querbelastung ist.

Bezeichnend für das Gleichgewicht in der Säule ist folgendes: Die Momente $M_q + Py$ entsprechen der Ausbiegung y (a). Wenn die Säule weiter von dem Moment M'_q belastet wird, wird die Ausbiegung $y + y'$, d.h., die Momente $Mq + M'q + P(y + y')$ entsprechen der Ausbiegung $y + y'$ (b). Die Übereinstimmung zwischen (a) und (b) erfordert, daß $M'q + Py'$ der Ausbiegung y entsprechen, d.h.:

Die totale Ausbiegung, verursacht von verschiedenen Momenten, ergibt sich als die Summe der einzelnen Momente zusammen mit der Längsbelastung.

Streng genommen gilt obenstehendes nur im elastischen Bereich. Wenn wir aber mit einem variablen E rechnen, wird dieselbe Entwicklung auch im unelastischen Bereich gelten.

Die Winkeldrehung in a beträgt

$$\alpha_{ab} = M_{ab}\, \omega_{ab}^{a} + M_{ba}\, \omega_{ab}^{b} + M_0\, \omega_{ab}^{o} \tag{e}$$

worin (Fig. 4) ω_{ab}^{a} die Winkeldrehung in a aus dem Einspannungsmoment $M_{ab} = 1$ (außer P) ist, ω_{ab}^{b} die Winkeldrehung in a durch Einspannungsmoment $M_{ba} = 1$ (außer P) und ω_{ab}^{o} die Winkeldrehung in a durch eine Querbelastung (außer P) darstellt, dessen Moment in einem festgesetzten Punkt 0 gleich 1 gewählt ist. M_{ab} und M_{ba} sind die wirklichen Einspannungsmomente in a und b, und M_0 ist das wirkliche Moment in 0.

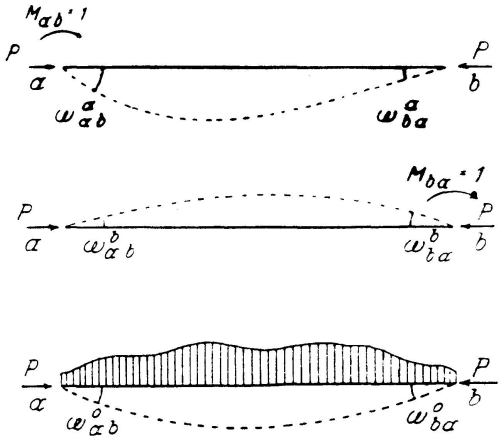

Fig. 4

Die Winkeldrehung in b ergibt sich zu

$$\alpha_{ba} = M_{ab}\, \omega_{ba}^{a} + M_{ba}\, \omega_{ba}^{b} + M_0\, \omega_{ba}^{o} \tag{f}$$

worin die Größe ω die Winkeldrehungen in b von $M_{ab} = 1$, $M_{ba} = 1$ und $M_0 = 1$ (außer P) ist.

Wenn die Spannungen größer als die Proportionalitätsspannung sind, sollen die Winkeldrehungen ω aus den Spannungen entsprechend E bestimmt werden.

Es wird sich später ergeben, daß wir durch bestimmte Größen f die Momentenberechnungen auf eine bequeme Form bringen können. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \omega_{ab}^{a} &= \frac{f_{1,ab}}{3\,f_{2,ab}}\,\frac{l_{ab}}{EI} & \omega_{ba}^{a} &= -\frac{1}{6\,f_{2,ba}}\,\frac{l_{ab}}{EI} \\ \omega_{ab}^{b} &= -\frac{1}{6\,f_{2,ab}}\,\frac{l_{ab}}{EI} & \omega_{ba}^{b} &= \frac{f_{1,ba}}{3\,f_{2,ba}}\,\frac{l_{ab}}{EI} \\ \omega_{ab}^{0} &= \frac{f_{3,ab}}{6\,f_{2,ab}}\,\frac{l_{ab}}{EI} & \omega_{ba}^{0} &= \frac{f_{3,ba}}{6\,f_{2,ba}}\,\frac{l_{ab}}{EI}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Die 6 Größen f sind dabei definiert. E und I sind gewählte Konstanten. Wird (12) in (e) und (f) eingesetzt nebst $\alpha'_{ab} = \alpha_{ab}\,\frac{E_c I_c}{l_c}$ und $\alpha'_{ba} = \alpha_{ba}\,\frac{E_c I_c}{l_c}$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha'_{ab} &= \frac{1}{6\,\mu_{ab}\,f_{2,ab}}\,(2\,M_{ab}\,f_{1,ab} - M_{ba} + M_0\,f_{3,ab}) \\ \alpha'_{ba} &= \frac{1}{6\,\mu_{ab}\,f_{2,ba}}\,(2\,M_{ba}\,f_{1,ba} - M_{ab} + M_0\,f_{3,ba})\,, \end{aligned} \tag{13}$$

worin $\mu_{ab} = \dfrac{E I\, l_c}{E_c\, I_c\, l_{ab}}$.

b) E und I konstant

Für konstante E und I ist die Winkeldrehung in a aus $M_{ba} = 1$ gleich der Winkeldrehung in b aus $M_{ab} = 1$, d.h. $\omega_{ab}^{b} = \omega_{ba}^{a}$. Aus (12) ergibt sich dann $f_{2,ab} = f_{2,ba}$. Diese Größe nennen wir f_2, und entsprechend $f_{1,ab} = f_{1,ba} = f_1$.

Wenn die Querbelastung dabei symmetrisch ist, so ist $f_{3,ab} = -f_{3,ba} = f_3$, und aus (13) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha'_{ab} &= \frac{1}{6\,\mu_{ab}\,f_2}\,(2\,M_{ab}\,f_1 - M_{ba} + M_0\,f_3) \\ \alpha'_{ba} &= \frac{1}{6\,\mu_{ab}\,f_2}\,(2\,M_{ba}\,f_1 - M_{ab} - M_0\,f_3)\,. \end{aligned} \tag{13'}$$

Wenn hier E und I gleich E_{ab} und I_{ab} gewählt werden, wird die in (13') eingeschlossene Größe μ_{ab} mit μ_{ab} aus (3) identisch. Die primären Momente M_{ab} und M_{ba} in einer querbelasteten Säule, welcher wir die Winkeldrehungen $\Psi_{ab}\,\frac{l_c}{E_c I_c}$ in a und b gegeben haben, werden aus folgenden Gleichungen gefunden (vgl. (4)):

$$\left.\begin{aligned} -\tau'_{ab} M_{ab} - \Psi_{ab} &= \frac{1}{6\,\mu_{ab} f_2}\,(2\,M_{ab} f_1 - M_{ba} + M_0 f_3) \\ -\tau'_{ba} M_{ba} - \Psi_{ab} &= \frac{1}{6\,\mu_{ab} f_2}\,(2\,M_{ba} f_1 - M_{ab} - M_0 f_3) \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Eine Berechnung analog derjenigen, welche die Formeln (5) und (7) lieferte, gibt

$$m_{ab} = \frac{1}{2\,(f_1 + 3\,\mu_{ab}\,\tau'_{ab} f_2)} \tag{5a}$$

$$c'_{ba} = \frac{6\,\mu_{ab} f_2}{2\,f_1 - m_{ab}} \tag{7a}$$

Bei Auflösung von (4a) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= -\,6\,\mu_{ab}\Psi_{ab}\,\frac{\dfrac{1}{m_{ba}} + 1}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1}\,f_2 - M_0\,\frac{\dfrac{1}{m_{ba}} - 1}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1}\,f_3 \\ M_{ba} &= -\,6\,\mu_{ab}\Psi_{ab}\,\frac{\dfrac{1}{m_{ab}} + 1}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1}\,f_2 + M_0\,\frac{\dfrac{1}{m_{ab}} - 1}{\dfrac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1}\,f_3 \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

worin (5a) eingesetzt wurde.

Die Momente werden somit als die Summe der Momente der Winkeldrehungen und der Querbelastung gefunden. Die zwei Beiträge, welche die Summe geben, werden unabhängig von einander sein.

Wie ersichtlich ist, entsprechen die mit a bezeichneten Ausdrücke den mit gleichen Zahlen bezeichneten. Nur die Wirkung aus den Säulendrücken und der Querbelastung gibt einen Unterschied. Wird die Querbelastung gleich 0 und $f_1 = f_2 = 1$, sind die Ausdrücke identisch. Wir werden f_1 und f_2 finden. f_3 ist von der Querbelastung abhängig. f_3 wird hier aus einer gleichförmigen Belastung entsprechend hergeleitet.

Wird eine gelenkig gelagerte Säule $a-b$ durch eine Längskraft P, Einspannungsmomente M_{ab} und M_{ba} und eine Querbelastung p pro Längeneinheit, angegriffen, wird sich die Ausbiegung ergeben aus

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad \text{oder}$$

$$EJ\,\frac{d^2 y}{dx^2} = -\,Py - M_{ab}\,\frac{l-x}{x} + M_{ba}\,\frac{x}{l} - \frac{l}{2}\,px\,(l-x)$$

worin x von dem Auflager a gemessen ist.

Mit
$$a = \sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{14}$$

wird
$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{M_{ab}(l-x)}{Pl} + \frac{M_{ba}\,x}{Pl} - \frac{px(l-x)}{2P} - \frac{p}{Pa^2}.$$

woraus
$$\frac{dy}{dx} = -aC_1 \sin ax + aC_2 \cos ax + \frac{M_{ab}}{Pl} + \frac{M_{ba}}{Pl} - \frac{pl}{2P} + \frac{px}{P}.$$

Wenn der Stab beidseitig gelenkig gelagert ist, ergibt sich:

$$\text{für } x = 0 : y = 0$$
$$\text{,, } x = l : y = 0$$

Wenn man die erste Bedingung in den obigen Ausdruck für y einführt, folgt

$$C_1 = \frac{M_{ab}}{P} + \frac{p}{Pa^2}.$$

Die andere Bedingung ergibt

$$C_2 = -\frac{M_{ab} \cos al + M_{ba} + \frac{p}{a^2} \cos al - \frac{p}{a^2}}{P \sin al},$$

worin das obenstehende C_1 eingeführt ist.

Werden C_1 und C_2 nebst $P = a^2 EI$ und $\mu_{ab} = \frac{E_{ab} I_{ab} l_c}{E_c I_c l_{ab}}$ in den Ausdruck für die Winkeldrehungen eingesetzt, ergibt sich

$$\frac{dy}{dx}\frac{E_c I_c}{l_c} = \frac{1}{\mu_{ab}}\left[M_{ab}\left(-\frac{\sin ax}{al} - \frac{\cos ax \cos al}{al \sin al} + \frac{1}{(al)^2}\right) + M_{ba}\left(-\frac{\cos ax}{al \sin al} + \frac{1}{(al)^2}\right)\right.$$
$$\left. - \sin ax \frac{p}{a^3 l} - \frac{\cos ax \cos al}{\sin al}\frac{p}{a^3 l} + \frac{\cos ax}{\sin al}\frac{p}{a^3 l} - \frac{p}{2a^2} + \frac{px}{a^2 l}\right].$$

Für $x = 0$ erhält man

$$\alpha'_{ab} = \frac{1}{\mu_{ab}}\left[M_{ab}\left(\frac{1}{(al)^2} - \frac{\cos al}{al \sin al}\right) - M_{ba}\left(\frac{1}{al \sin al} - \frac{1}{(al)^2}\right)\right.$$
$$\left. + pl^2\left(\frac{1 - \cos al}{(al)^3 \sin al} - \frac{1}{2\,(al)^2}\right)\right]$$

und für $x = l$:

$$\alpha'_{ba} = \frac{1}{\mu_{ab}}\left[M_{ba}\left(\frac{1}{(al)^2} - \frac{\cos al}{al \sin al}\right) - M_{ab}\left(\frac{1}{al \sin al} - \frac{1}{(al)^2}\right)\right.$$
$$\left. - pl^2\left(\frac{1 - \cos al}{(al)^3 \sin al} - \frac{1}{2\,(al)^2}\right)\right].$$

Wird man in diese Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sin al - al \cos al}{2\,(al - \sin al)} \\ f_2 &= \frac{(al)^2 \sin al}{6\,(al - \sin al)}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$f_3 = 4\,\frac{2 - 2\cos al - al \sin al}{(al)^2 - al \sin al} \tag{16}$$

nebst $\frac{1}{8}\,pl^2 = M_0$ einsetzen, werden die Ausdrücke mit (13′) identisch.

f_1 und f_2 aus (15) sind also die Größen, welche in den früher angeführten Ausdrücken eingeschlossen sind, und aus (16) ergibt sich, daß f_3 einer gleichförmigen Querbelastung entspricht.

Kurven für f_1 und f_2 als Funktionen von al sind aufgezeichnet (Tafel 1). Wenn der Säulendruck 0 wird, wird $f_1 = f_2 = 1$, und wenn die Querbelastung auch 0 wird, werden die verschiedenen Ausdrücke den früheren Ausdrücken entsprechen, welche ohne Berücksichtigung des Säulendrucks gefunden werden.

Wie vorher müssen wir selbstverständlich den E-Wert (welcher sowohl in μ als in f enthalten ist) der Bruchspannung entsprechend einsetzen.

Wenn der Nenner in den Momentenformeln $\frac{1}{m_{ab}\,m_{ba}} - 1$ gleich 0 wird, sind die primären Momente unendlich groß, vorausgesetzt, daß der Zähler nicht 0 wird, d.h. die Momente würden schon für eine kleinere Belastung, als dem Nenner gleich 0 entspricht, zu groß werden.

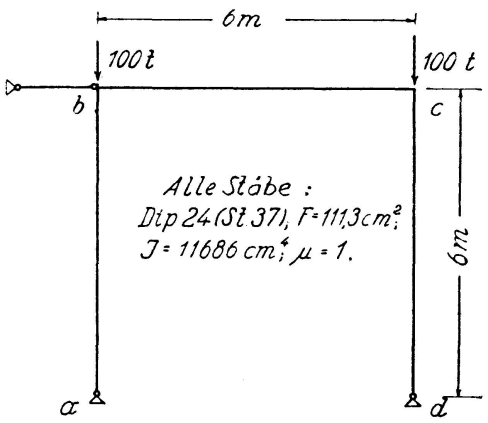

Fig. 5

Wenn es sich um einen Rahmen handelt, für welchen die primären Momente 0 sind (die Belastung auf Fig. 5 zeigt keine Momente), können wir die Belastung erhöhen, bis der Nenner 0 wird. Wenn der Rahmen nicht zusammenbrechen soll, muß $\frac{1}{m_{bc}\,m_{cb}} - 1 > 0$ sein, d.h.

$$m_{bc}\,m_{cb} < 1\,, \tag{17}$$

was das Stabilitätskriterium gibt.

Beispiel. Es wird untersucht, ob der Rahmen in Fig. 5, dessen Stäbe alle gleich sind, mit einem Sicherheitsgrad von wenigstens 3,05 stabil ist.

$$\sigma = \frac{3{,}05 \cdot 100000}{111{,}3} = 2740\ \mathrm{kg/cm^2} > \text{Proportionalitätsgrenze.}$$

Wird der obenstehende Ausdruck für St. 37 benutzt, ergibt sich

$$E = 0{,}96 \cdot 2740 \cdot (2960 - 2740) = 0{,}58 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$(14): \quad al = 600 \sqrt{\frac{305000}{0{,}58 \cdot 10^6 \cdot 11686}} = 4{,}0$$

Aus Tafel 1: $f_1 = 0{,}18 \quad f_2 = -0{,}42$. Die Rahmenzahlen werden berechnet zu:

$$\mu_{bc} = 1 \text{ (wir setzen } E_c I_c = E_{ab} I_{ab})$$

$$\mu_{ab} = \frac{0{,}58 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}28$$

$$m_{ab} = 0 \quad c'_{ba} = -\frac{6 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}42}{0{,}36} = -1{,}96 \quad \tau'_{bc} = -\frac{1}{1{,}96} = -0{,}51$$

$$m_{bc} = \frac{1}{2\,(1 - 3 \cdot 1 \cdot 0{,}51)} = -0{,}94$$

Aus (17) ergibt sich $0{,}94 \,.\, 0{,}94 = 0{,}88 < 1$. Der Rahmen ist also gerade noch stabil.

Abschnitt III. Bewegliche Rahmensysteme

Sind nicht alle Knotenpunkte festgehalten, ändert sich das Berechnungsverfahren wie folgt.

Die zum Festmachen der Knotenpunkte notwendigen Stäbe — Z-Stäbe — werden hinzugefügt (vgl. Fig. 1). Die Kräfte in diesen Stäben werden aus dem unbeweglichen Rahmensystem gefunden. Sind die Z-Stabkräfte in Wirklichkeit gleich 0, so wird man die Gleichgewichtsform des ursprünglichen beweglichen Rahmensystems finden, wenn man den Knotenpunkten 1, 2 .... q solche Verschiebungen gibt, daß die Z-Stabkräfte gleich 0 werden.

Diese Verschiebungen müssen Winkeldrehungen $\Psi_1, \Psi_2 \ldots . \Psi_n$ der Stäbe hervorrufen.

Die Momente, welche wegen der Deformationen der Stäbe durch eine Verschiebung entstehen (vgl. Fig. 6d), werden aus dem unbeweglichen System gefunden, indem man den Stäben dieselben Winkeldrehungen aufzwingt, welche in dem bewegten System entstehen würden (der Winkel Ψ_1, Fig. 6d, in dem mit dünnen Strichen gezeichneten, bewegten System ist dem Winkel Ψ_1 in dem punktierten, festgehaltenen System gleich). Die Momente, welche durch Verschiebungen entstehen, können deshalb in einem festgehaltenen System aus (10″) oder (10a) gefunden werden, wenn man darin die den Verschiebungen entsprechenden Winkeldrehungen Ψ einsetzt.

Eine beliebige Z-Stabkraft Z_m ist durch folgende Elastizitätsgleichung bestimmt:

$$Z_m = Z_{m,0} - Z_{m,1} \Psi_1 - Z_{m,2} \Psi_2 \ldots . - Z_{m,n} \Psi_n,$$

worin Ψ die unbekannten Winkeldrehungen sind. Es wird ohne weiteres verständlich sein, daß $Z_{m,0}$ die Stabkraft in dem Z_m-Stab ist, hervorgerufen durch die gegebene Belastung im festgehaltenen System (alle $\Psi = 0$), während $Z_{m,n}$ die Stabkraft in demselben Stab ist, allein von der Winkeldrehung $\Psi_n = -1$ vom Stab Nummer n in dem gegebenen System erzeugt. Für jeden hinzugefügten Z-Stab liegt eine Gleichung vor, und da alle Z-Stabkräfte wie beschrieben in der Gleichgewichtstellung 0 sein müssen, ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} Z_{1,1}\Psi_1 + Z_{1,2}\Psi_2 \ldots + Z_{1,n}\Psi_n = Z_{1,0} \\ Z_{2,1}\Psi_1 + Z_{2,2}\Psi_2 \ldots + Z_{2,n}\Psi_n = Z_{2,0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{q,1}\Psi_1 + Z_{q,2}\Psi_2 \ldots + Z_{q,n}\Psi_n = Z_{q,0}\,. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Die unbekannten Winkeldrehungen, wovon einige möglicherweise voneinander abhängig sind, werden damit gefunden. Das endgültige Moment in dem Endpunkt a des Stabes ab wird aus folgendem Ausdruck berechnet:

$$M_{ab} = M_{ab,0} - M_{ab,1}\Psi_1 - M_{ab\,2}\Psi_2 \ldots - M_{ab,n}\Psi_n\,, \tag{19}$$

worin, wie ohne weiteres verständlich ist, $M_{ab,0}$ das Moment aus der gegebenen Belastung in dem festgehaltenen System ist (alle $\Psi = 0$), und $M_{ab,n}$ von der Winkeldrehung $\Psi_n = -1$ allein herrührt.

Die Richtungen der Winkeldrehungen Ψ und der Momente sind wie gewöhnlich im Uhrzeigersinn positiv gewählt.

Die Richtungen der waagrechten Kräfte werden nach rechts wirkend als positiv angenommen. In $Z_{m,0}$ ist die Wirkung der Belastung eingeschlossen. Wenn wir annehmen, daß die Stäbe gelenkig gelagert sind, ergibt sich eine Kraft $Z_{m,p}$ in der Richtung des Z-Stabes. Dazu kommen die Reaktionen $Z_{m,M}$, welche aus den Momenten des in Wirklichkeit nicht gelenkigen Systems entstehen.

Bis jetzt wurde vorausgesetzt, wie üblich, daß die Deformationen unendlich klein blieben. In einem beweglichen System hat die Verschiebung der Belastung oft eine große Wirkung. Wird dieser Umstand in Betracht gezogen, wird $Z_{m,0}$, wie später gezeigt wird, weiter einen Beitrag $Z_{m,\psi}$ in sich schließen.

Mit $Z_{m,0} = Z_{m,M} + Z_{m,p} + Z_{m,\psi}$ ergibt (18) sich zu

$$\left.\begin{array}{l} Z_{1,1}\Psi_1 + Z_{1,2}\Psi_2 \ldots + Z_{1,n}\Psi_n = Z_{1,M} + Z_{1,p} + Z_{1,\psi} \\ Z_{2,1}\Psi_1 + Z_{2,2}\Psi_2 \ldots + Z_{2,n}\Psi_n = Z_{2,M} + Z_{2,p} + Z_{2,\psi} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{n,1}\Psi_1 + Z_{n,2}\Psi_2 \ldots + Z_{n,n}\Psi_n = Z_{n,M} + Z_{n,p} + Z_{n,\psi}\,. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Um einen Überblick zu gewinnen, werden wir an einem einfachen Beispiel die Bedeutung der verschiedenen Größen in (20) zeigen. Der in Fig. 6a gezeigte gelenkig gelagerte Rahmen ist mit einer waagrechten Belastung p pro Längeneinheit und mit P' und P'' belastet.

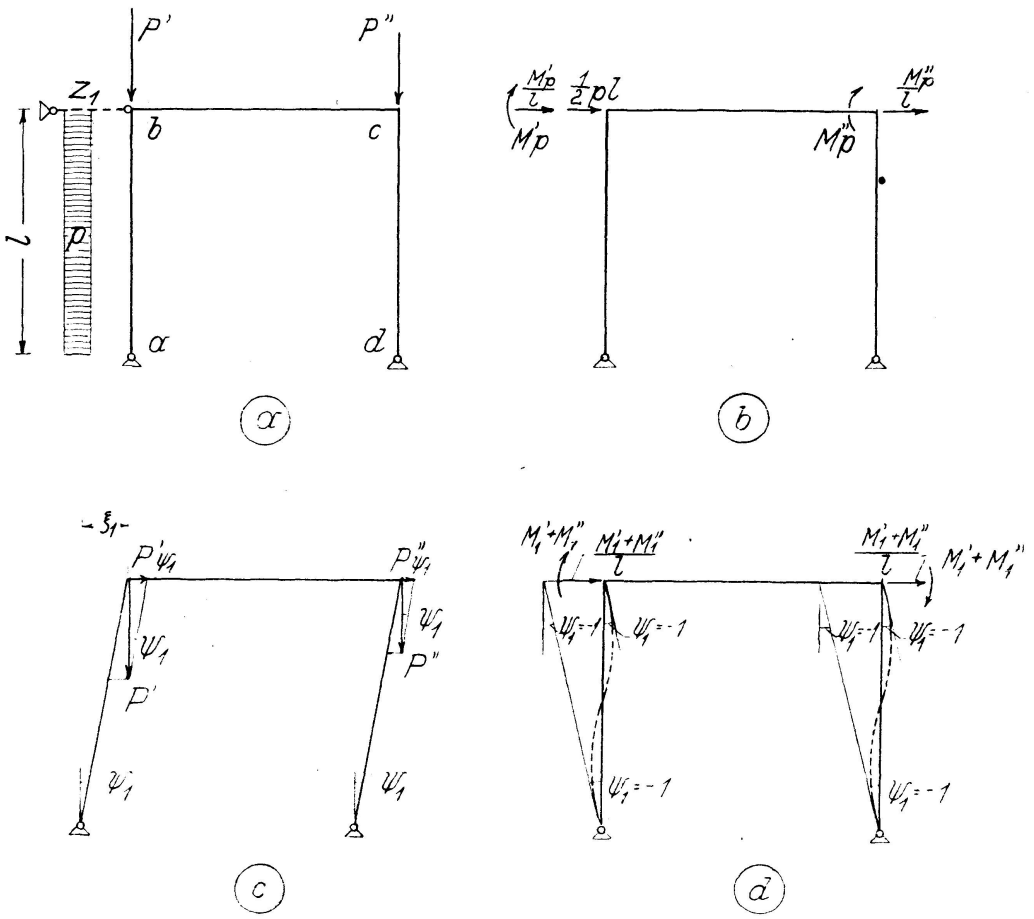

Fig. 6

Der Z-Stab wird als waagrechter Stab in b hinzugefügt. Es ist ohne weiteres verständlich, daß $Z_{1,p} = \frac{1}{2}\,pl$ (Fig. 6b). Wenn die Belastung p in der Säule das Moment M'_p in b verursacht, wird die Momentenreaktion gleich $\frac{M'_p}{l}$. Aus dem Moment M''_p in c ergibt sich ein ähnlicher Beitrag, d. h. $Z_{1,M} = \frac{M'_p + M''_p}{l}$.

Nach einer Verschiebung, die der Winkeldrehung Ψ_1 der Säulen entspricht, kann die Säule nur der Komponente der Kraft P' in der Säulenrichtung widerstehen (Abb. 6c). Die andere Komponente wird die Richtung des Z-Stabs haben. Diese Kraft entspricht dem obengenannten Beitrag der Verschiebung. Aus P'' ergibt sich auch ein Beitrag, d. h.

$$Z_{1,\psi} = (P' + P'')\,\mathrm{tg}\,\Psi_1 \sim (P' + P'')\,\Psi_1 .$$

Eine Verschiebung, der Winkeldrehung -1 der Säulen entsprechend, wird Momente verursachen, welche, wie früher beschrieben wurde, in dem festgehaltenen System gefunden werden, wenn man nur den Säulen die Winkeldrehung entsprechend der Verschiebung gibt (vgl. punktierte Ausbiegung in Fig. 6d). Eine Winkeldrehung -1 der Säule ab wird das positive Moment M'_1

in b verursachen, welches die Reaktion $\frac{M'_1}{l}$ gibt. Dieselbe Winkeldrehung wird das Moment M''_1 in c verursachen, d.h. die ganze Reaktion ist $\frac{M'_1 + M''_1}{l}$. Die Winkeldrehung -1 der anderen Säule gibt denselben Betrag, d.h. die linke Seite der ersten Gleichung (20) ergibt sich zu

$$Z_1 \Psi_1 = 2 \frac{M'_1 + M''_1}{l} \Psi_1 .$$

Das Gleichgewichtssystem (20) kann zu einer Gleichung vereinfacht werden:

$$2 \frac{M'_1 + M''_1}{l} \Psi_1 = \tfrac{1}{2} pl + \frac{M'_p + M''_p}{l} + (P' + P'') \Psi_1 ,$$

woraus

$$\Psi_1 = \frac{Z_p}{2 \frac{M'_1 + M''_1}{l} - (P' + P'')} ,$$

worin Z_p die Z-Stabreaktion der Belastung p im festgehaltenen System ist.

Nach dieser Orientierung werden wir die Formel für einige allgemeine Fälle ableiten.

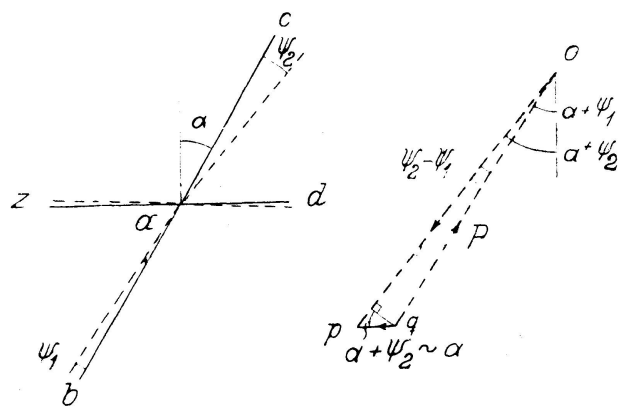

Fig. 7

In Fig. 7 ist mit voll ausgezogenen Linien ein Knotenpunkt dargestellt, wie er in den meisten Rahmenkonstruktionen vorhanden ist. Die Säulen ab und ac liegen auf derselben Geraden, und der Z-Stab ist in Verlängerung des Balkens ad hinzugefügt. Mit punktierten Linien sind die Stäbe nach der Verschiebung dargestellt. Wenn keine äußere Kraft den Knotenpunkt belastet, sind die beiden Säulendrücke P gleich, bis auf eine unendlich kleine Größe, wie es sich aus dem Kräftepolygon in Fig. 7 ergibt, worin $op \sim oq$, weil $\Psi_2 - \Psi_1$ unendlich klein ist. Aus dem Kräftepolygon ergibt sich:

$$Z_{m,\psi} = qp = - P (\Psi_2 - \Psi_1) \sec (\alpha + \Psi_2) \sim P \Psi_1 \sec \alpha - P \Psi_2 \sec \alpha$$

worin Druckkräfte als positiv angenommen werden. Die Kräfte P sind Säulenkräfte in den Ψ_1 und Ψ_2 entsprechenden Säulen. Da der Knotenpunkt von äußeren Kräften angegriffen werden kann, welche in den Richtungen der Säulen Komponenten verursachen, so sind die vorstehenden zwei Werte von P nicht notwendigerweise dieselben.

Die Komponente in Richtung des Z-Stabs, welche durch die Verschiebung entsteht, ergibt sich dadurch zu

$$Z_{m,\psi} = P_m \Psi_m \sec \alpha - P_{m+1} \Psi_{m+1} \sec \alpha, \tag{a}$$

worin P_m und P_{m+1} die resultierenden Säulenkräfte sind.

a) Säulenjoch

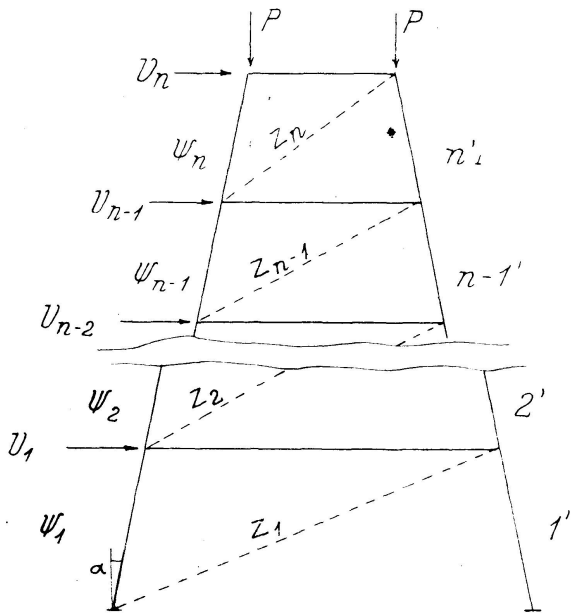

Fig. 8

Das „Joch" Fig. 8 trägt eine Last, welche die Knotenpunktdrücke V ergibt.

Außerdem wird der obere waagrechte Balken senkrecht belastet, wodurch zwei gleiche Knotenpunktdrücke P entstehen.

Die Z-Stäbe werden gewählt, wie Fig. 8 zeigt. Die Z-Richtung wird waagrecht gewählt, und die Z-Kräfte werden wie die waagrechten Komponenten aus den Z-Stabkräften gewählt.

Die Kräfte P werden in die zwei Stabrichtungen der Knotenpunkte aufgeteilt: Säulendrücke $P \cdot \sec \alpha$, waagrechte Komponenten $P \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Die Säulendrücke $P \sec \alpha$ werden durch Verschiebung einer Komponente der Z-Stabrichtung (waagrecht) verursacht, und es ergibt sich somit aus (a):

$$Z_{n,\psi} = 2\,P\Psi_n \sec^2 \alpha$$

$$Z_{n-1,\psi} = 2\,P\Psi_{n-1} \sec^2 \alpha - 2\,P\Psi_n \sec^2 \alpha + Z_{n,\psi} = 2\,P\Psi_{n-1} \sec^2 \alpha$$

. . . . . .

$$Z_{1,\psi} = 2\,P\Psi_1 \sec^2 \alpha.$$

Die waagrechten Komponenten $P \operatorname{tg} \alpha$ sind in Fig. 9a nach den neuen

Stabrichtungen zerlegt. Der Zuwachs in Z-Stabrichtung durch die Verschiebung ist $\Delta a + \Delta b$, worin $|\Delta a| \sim P \operatorname{tg} \alpha \Psi_{n'} \operatorname{tg} \alpha \sim |\Delta b|$, d.h.

$$Z_{n,\psi} = Z_{n-1,\psi} \ldots = Z_{1,\psi} = -2 P \Psi_{n'} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Ψ ist positiv im Uhrzeigersinn, die Z-Kraft wird positiv nach rechts gewählt. Daraus resultiert das Minuszeichen. Die Winkel $\Psi_{1'}, \Psi_{2'} \ldots\ldots \Psi_{n'}$ sind von $\Psi_1, \Psi_2 \ldots\ldots \Psi_n$ abhängig. Aus Fig. 9b ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{1'} &= -\frac{a_1}{\frac{l_{1'}}{2}} = -\frac{l_1 \sec \alpha \Psi_1 \sin \alpha}{\frac{l_{1'}}{2}} = -2 \operatorname{tg} \alpha \frac{l_1}{l_{1'}} \Psi_1 \\
\Psi_{2'} &= -\frac{a_1 + a_2}{\frac{l_{2'}}{2}} = -\frac{l_1 \Psi_1 \operatorname{tg} \alpha + l_2 \Psi_2 \operatorname{tg} \alpha}{\frac{l_{2'}}{2}} = -2 \operatorname{tg} \alpha \frac{l_1 \Psi_1 + l_2 \Psi_2}{l_{2'}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_{n'} &= -2 \operatorname{tg} \alpha \frac{l_1 \Psi_1 + l_2 \Psi_2 \ldots + l_n \Psi_n}{l_{n'}}.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Wenn $l_1 = l_2 = \ldots\ldots l$ ergibt sich:

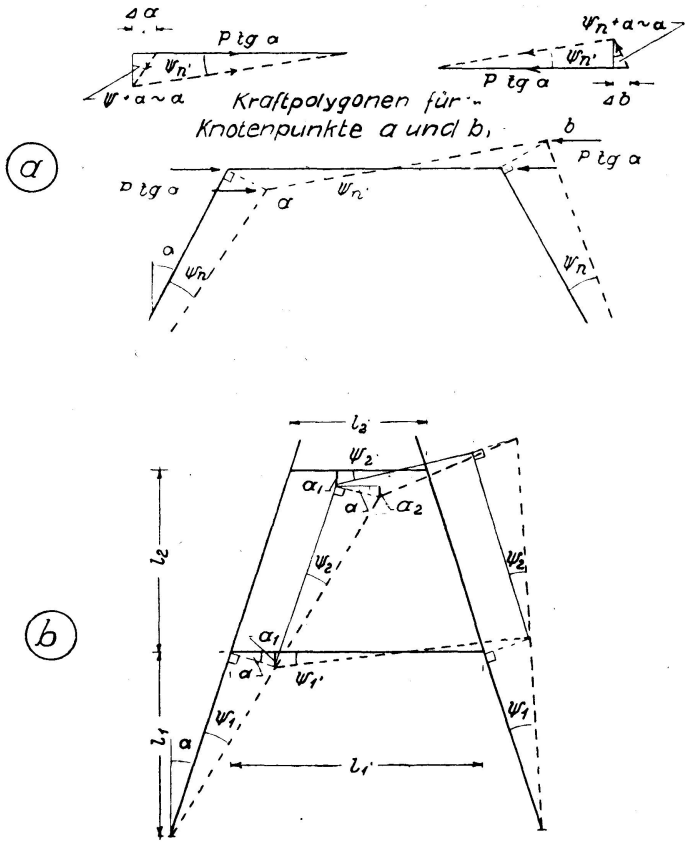

Fig. 9

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{1'} &= -2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{l}{l_{1'}}\,\Psi_1 \\
\Psi_{2'} &= -2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{l}{l_{2'}}\,(\Psi_1+\Psi_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_{n'} &= -2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{l}{l_{n'}}\,(\Psi_1+\Psi_2\ldots+\Psi_n).
\end{aligned}\right\} \tag{21a}$$

Die Winkeldrehungen beider Säulen in demselben „Stockwerk" sind gleich. Gleichung m in (20) ergibt sich zu:

$$Z_{m,1}\Psi_1\ldots Z_{m,n}\Psi_n + Z_{m,1'}\Psi_{1'}\ldots + Z_{m,n'}\Psi_{n'} =$$
$$Z_{m,M} + \Sigma V_m + 2\,P\,\Psi_m\sec^2\alpha - 2\,P\,\Psi_{n'}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha,$$

oder

$$Z_{m,1}\Psi_1\ldots + Z_{m,n}\Psi_n + Z_{m,1'}\Psi_{1'}\ldots + Z_{m,n'}\Psi_{n'} \tag{22}$$
$$-\,2\,P\,\Psi_m\sec^2\alpha + 2\,P\,\Psi_{n'}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = Z_{m,M} + \Sigma V_m.$$

Alle Koeffizienten die Ψ entsprechen werden in dem mit Z-Stäben festgehaltenen System berechnet.

$Z_{m,n}$ ist gleich der Z_m-Stabkraft, welche von Winkeldrehungen $\Psi_n = -1$ der beiden Säulen im „Stockwerk" n verursacht wird.

$Z_{m,n'}$ ist gleich der Z_m-Stabkraft, welche von Winkeldrehungen $\Psi_{n'} = -1$ des Balkens im Stockwerk n verursacht wird.

$Z_{m,M}$ ist gleich der Z_m-Stabkraft, welche von der äußeren Belastung hervorgerufen wird.

ΣV_m ist die Summe von allen äußeren waagrechten Knotenpunktdrücken über einem waagrechten Schnitt durch den Z_m-Stab. Die Ausdrücke (21) für die Winkel $\Psi_{1'}, \Psi_{2'}\ldots.\Psi_{n'}$ werden in (22) eingesetzt, wobei nur $\Psi_1, \Psi_2\ldots.\Psi_n$ in (22) unbekannt bleiben. Da dieses Gleichungssystem aus n Gleichungen besteht, können alle Winkeldrehungen gefunden werden.

Die resultierenden Momente ergeben sich aus:

$$M_{ab} = M_{ab,0} - M_{ab,1}\Psi_1 - M_{ab,2}\Psi_2\ldots - M_{ab,n}\Psi_n \tag{19}$$
$$-\,M_{ab,1'}\Psi_{1'} - M_{ab,2'}\Psi_{2'}\ldots - M_{ab,n'}\Psi_{n'}.$$

Hierin ist $M_{ab,0}$ gleich dem Moment im Stab ab in a, verursacht von der äußeren Belastung. $M_{ab,n}$ ist das Moment an derselben Stelle, welches aus den Winkeldrehungen $\Psi_n = -1$ der beiden Säulen im Stockwerk n resultiert, und $M_{ab,n'}$ das Moment, welches von Winkeldrehungen $\Psi_{n'} = -1$ des Balkens im n'ten Stockwerk verursacht wird. Alle Momente werden im festgehaltenen System gefunden. Wenn die Größe $Z_{m,n}$ aus (10″) oder (10a) (worin die Quer-

belastung gleich 0 gewählt ist) gefunden wird, und ihr die Winkeldrehung $\Psi_n = -1 \frac{l_c}{E_c I_c}$ entspricht, muß man sie, bevor man sie in (22) einsetzt, mit $\frac{E_c I_c}{l_c}$ multiplizieren.

b) Rahmensystem aus senkrechten und waagrechten Stäben zusammengesetzt

Durch eine Verschiebung werden alle Winkeldrehungen $\Psi_{1'}$, $\Psi_{2'} \ldots \Psi_{n'}$ der waagrechten Balken gleich 0.

Nennen wir die Summe aller senkrechten Kräfte, welche den obersten Balken belasten ΣP_n (Fig. 10), ergibt sich aus (a) $Z_{n,\psi} = \Psi_n \Sigma P_n$, worin Ψ_n die Winkeldrehungen der Säulen im n'ten Stockwerk bezeichnen.

Sind die Säulen im Stockwerk $n-1$ von ΣP_{n-1} (außer denen von ΣP_n sowie den senkrechten Kräften, welche direkt den Balken $n-1$ angreifen) belastet, ergibt sich aus (a)

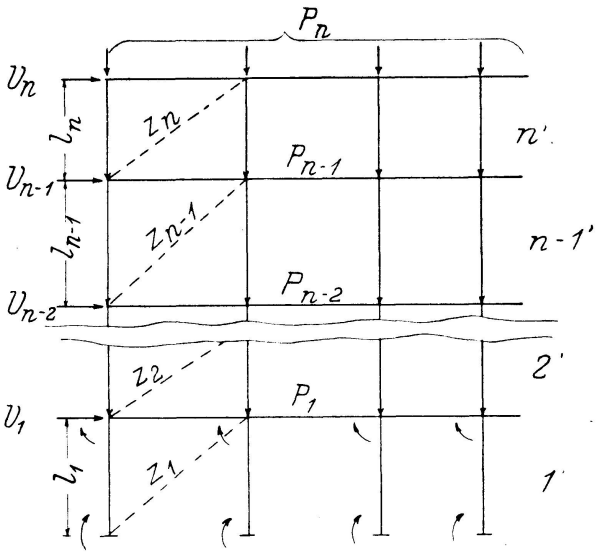

Fig. 10

$$Z_{n-1,\psi} = \Psi_{n-1} \Sigma P_{n-1} - \Psi_n \Sigma P_n + Z_{n,\psi} = \Psi_{n-1} \Sigma P_{n-1}.$$

Für Stockwerk $n-2$: $\quad Z_{n-2,\psi} = \Psi_{n-2} \Sigma P_{n-2}.$

. . . . . .

Für Stockwerk 1: $\quad Z_{1,\psi} = \Psi_1 \Sigma P_1.$

Die m'te Gleichung aus (20) ergibt sich zu:

$$Z_{m,1} \Psi_1 + Z_{m,2} \Psi_2 \ldots + Z_{m,n} \Psi_n = Z_{m,M} + \Sigma V_m + \Psi_m \Sigma P_m,$$

und das ganze Gleichungssystem zu:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 (Z_{1,1} - \Sigma P_1) + \Psi_2 Z_{1,2} \ldots + \Psi_{n-1} Z_{1,n-1} + \Psi_n Z_{1,n} = Z_{1,M} + \Sigma V_1 \\
&\Psi_1 Z_{2,1} + \Psi_2 (Z_{2,2} - \Sigma P_2) \ldots + \Psi_{n-1} Z_{2,n-1} + \Psi_n Z_{2,n} = Z_{2,M} + \Sigma V_2 \qquad (23) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Psi_1 Z_{n,1} + \Psi_2 Z_{n,2} \ldots + \Psi_{n-1} Z_{n,n-1} + \Psi_n (Z_{n,n} - \Sigma P_n) = Z_{n,M} + \Sigma V_n.
\end{aligned}$$

ΣP_m und ΣV_m sind die Summen von senkrechten bzw. waagrechten Knotenpunktkräften, welche über einem waagrechten Schnitt im Z_m-Stab wirken.

$Z_{m,n}$ ist als die Kraft in dem Z_m-Stab für alle Winkeldrehungen $\Psi_n = -1$ von allen Säulen im Stockwerk n definiert.

Um die Z-Stabkräfte aus (23) zu finden, müssen erst die Momente gefunden werden. Diese werden am besten direkt in (23) eingeführt. Wir nennen die Summe aller Momente in den Säulen im Stockwerk m, die durch eine Winkeldrehung $\Psi_n = -1$ aller Säulen in Stockwerk n erzeugt werden, $\Sigma M_{m,n}$ (für das 1. Stockwerk sind diese Momente in Fig. 10 gezeichnet). Durch einen waagrechten Schnitt im Z_m-Stab und aus der Projektion aller Kräfte über dem Schnitt auf eine waagrechte Ebene ergibt sich:

$$Z_{m,n} = \frac{\Sigma M_{m,n}}{l_m} \qquad \text{und} \qquad Z_{m,M} = \frac{\Sigma M_{m,0}}{l_m},$$

worin $\Sigma M_{m,0}$ die Summe von allen Momenten der äußeren Belastung im Stockwerk m ist. Werden diese und die analogen Ausdrücke in (23) eingesetzt, ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l}
\Psi_1(\Sigma M_{1,1} - l_1 \Sigma P_1) + \Psi_2 \Sigma M_{1,2} \ldots + \Psi_{n-1} \Sigma M_{1,n-1} + \Psi_n \Sigma M_{1,n} = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Sigma M_{1,0} + l_1 \Sigma V_1 \\
\Psi_1 \Sigma M_{2,1} + \Psi_2(\Sigma M_{2,2} - l_2 \Sigma P_2) \ldots + \Psi_{n-1} \Sigma M_{2,n-1} + \Psi_n \Sigma M_{2,1} = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Sigma M_{2,0} + l_2 \Sigma V_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_1 \Sigma M_{n,1} + \Psi_2 \Sigma M_{n,2} \ldots + \Psi_{n-1} \Sigma M_{n,n-1} + \Psi_n (M_{n,n} - l_n \Sigma P_n) = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Sigma M_{n,0} + l_n \Sigma V_n
\end{array}\right| \quad (23\text{a})$$

Die Bedeutung von ΣP_m und ΣV_m ist dieselbe wie bei (23).

Wird für die Gleichungen (22), (23) oder (23a) die Determinante des homogenen Gleichungssystems mit D_0 (rechte Seite $= 0$) bezeichnet, und weiter auch mit $D_1, D_2 \ldots\ldots D_n$, wenn die Koeffizienten der Größen $\Psi_1, \Psi_2 \ldots\ldots \Psi_n$ nach und nach durch die Größen auf der rechten Seite ersetzt werden, ergibt sich:

$$\Psi_1 = \frac{D_1}{D_0}, \qquad \Psi_2 = \frac{D_2}{D_0} \ldots\ldots \Psi_n = \frac{D_n}{D_0}.$$

Wenn $D_0 = 0$ ist, und mindestens eine von den Größen $D_1, D_2 \ldots\ldots D_n$ von 0 verschieden ist, wird eine Winkeldrehung unendlich groß, d.h. der Rahmen muß zusammenbrechen, auch wenn eine kleinere Belastung vorhanden ist als die, welche $D_0 = 0$ entspricht.

Wenn das Rahmensystem nicht von Kräften, welche Verschiebungen hervorrufen können, angegriffen wird, wird $D_1 = D_2 \ldots\ldots D_n = 0$. Die Belastung kann dann vergrößert werden bis $D_0 = 0$; dieser Fall gibt $\Psi_1 = \Psi_2 \ldots = \Psi_n = \frac{0}{0}$, *was das Stabilitätskriterium gibt.*

Beispiel: Es wird für die in Fig. 11 gezeigte Konstruktion eine Sicherheit 2,5 verlangt. Ist diese Sicherheit vorhanden?

Aus (23) ergibt sich $\Psi = \dfrac{lV}{\Sigma M_{1,1} - 2lP}$.

Wird mit demselben Säulendruck: 40 t in beiden Säulen gerechnet, ergibt sich (die Spannung befindet sich im elastischen Bereich)

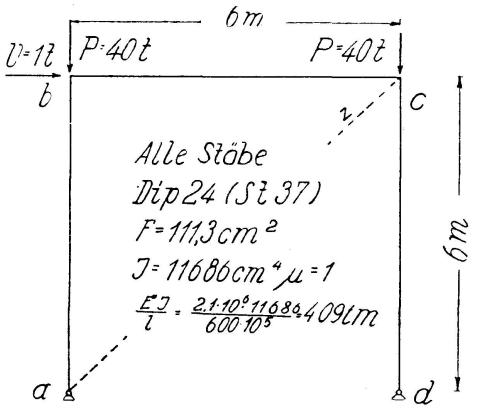

Fig. 11

$$al = 600\sqrt{\frac{2{,}5 \cdot 40000}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 11686}} = 1{,}21, \quad f_1 = 0{,}92, \quad f_2 = 0{,}83$$

Rahmenzahlen

$$m_{ab} = 0 \qquad c'_{ba} = \frac{6 \cdot 0{,}83}{2 \cdot 0{,}92} = 2{,}71 \qquad m_{bc} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{3}{2{,}71}\right)} = 0{,}24$$

$$c'_{cb} = c'_{bc} = \frac{6 \cdot 1}{2 - 0{,}24} = 3{,}40 \qquad m_{ba} = \frac{1}{2\left(0{,}92 + \frac{3}{3{,}40}\,0{,}83\right)} = 0{,}30\,.$$

$M_{ba,1}$ ist die Größe des Moments M_{ba}, entsprechend den Winkeldrehungen -1 beider Säulen.

Das primäre Moment, von $\Psi_{ab} = -1$ hervorgerufen, ergibt sich aus der zweiten Formel (10a), wenn darin die Querbelastung gleich 0 gesetzt wird. Wir müssen mit $-\dfrac{E_c I_c}{l_c} = -409$ mt. multiplizieren, weil (10a) einer Winkeldrehung $\Psi_{ab}\dfrac{l_c}{E_c I_c}$ entspricht:

$$\Psi_{ab} = -1 \quad \text{gibt} \quad 6 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}83.409 = 610 \text{ mt.}$$
$$\Psi_{dc} = -1 \quad \text{gibt} \quad 610\,.\,0{,}24 = 146 \text{ mt.}$$
$$M_{ba,1} = 756 \text{ mt.}$$
$$\Sigma M_{1,1} = 2\,.\,756 \sim 1510 \text{ mt.}$$

Wenn $2lP = 2\,.\,6\,.\,(2{,}5\,.\,40) = 1200$ mt., ergibt die Auflösung der Determinante $D_0 = 1510 - 1200$.

Da der Wert der Determinante für abnehmende Werte von P nicht 0 wird, würde die Sicherheit größer als 2,5 sein, wenn das System nicht von einer waagrechten Kraft angegriffen würde. Das Moment muß aber untersucht werden, weil es natürlich zu groß wird, bevor die Stabilitätsgrenze, welche nur für ein zentral belastetes Rahmensystem bestimmt wurde, erreicht wird.

Die Momente in der Ecke des Rahmens ergeben sich aus (19) zu

$$M_{ba} = - M_{ab,1} \frac{l V}{\Sigma M_{1,1} - 2 l P}$$

worin alle Größen oben gefunden sind:

$$|M_{ba}| = 756 \frac{6 \cdot 2{,}5 \cdot 1}{1510 - 1200} = \frac{11300}{1510 - 1200} = 36{,}5 \text{ tm.}$$

Wird der Säulendruck vernachlässigt, ergibt sich:

$$|M_{ba}| = \frac{11300}{1510} = 7{,}5 \text{ mt.}$$

Der Unterschied ist also außerordentlich groß.

Zusammenfassung

Wenn ein Balken mit einer Last senkrecht zu seiner Längsrichtung belastet ist, und wir denselben mit einer zunehmenden Kraft in der Längsrichtung belasten, verhält er sich wie ein Balken mit abnehmendem Trägheitsmoment. Dieser Umstand, welcher bei Säulen sehr bekannt ist, wird in zusammengesetzten Konstruktionen selten in Betracht gezogen:

Es wird hier gezeigt, wie eine genaue Berechnung für ein willkürliches Rahmensystem durchgeführt wird.

Abschnitt I behandelt Rahmensysteme, bei denen alle Knotenpunkte festgehalten sind, und die auf den Balken belastet werden. Abschnitt II behandelt ein festgehaltenes System mit zusätzlicher Querbelastung auf den Säulen, und Abschnitt III bezieht sich auf bewegliche Systeme mit willkürlicher Belastung. Die Methoden sind durch einfache Beispiele veranschaulicht.

Résumé

Lorsqu'une poutre est soumise à une charge s'exerçant normalement à sa direction longitudinale et qu'on lui applique une charge croissante orientée suivant la direction longitudinale, elle se comporte comme une poutre accusant un moment d'inertie décroissant. Ce fait, bien connu dans le cas des colonnes en général, n'est que rarement pris en considération dans les ouvrages composés.

L'auteur montre comment on peut effectuer un calcul précis pour un système en cadre de disposition arbitraire. Dans la première partie, il traite des systèmes en cadre dans lesquels tous les noeuds sont fixés d'une manière rigide et qui sont chargés sur les poutres. Dans la deuxième partie, il étudie

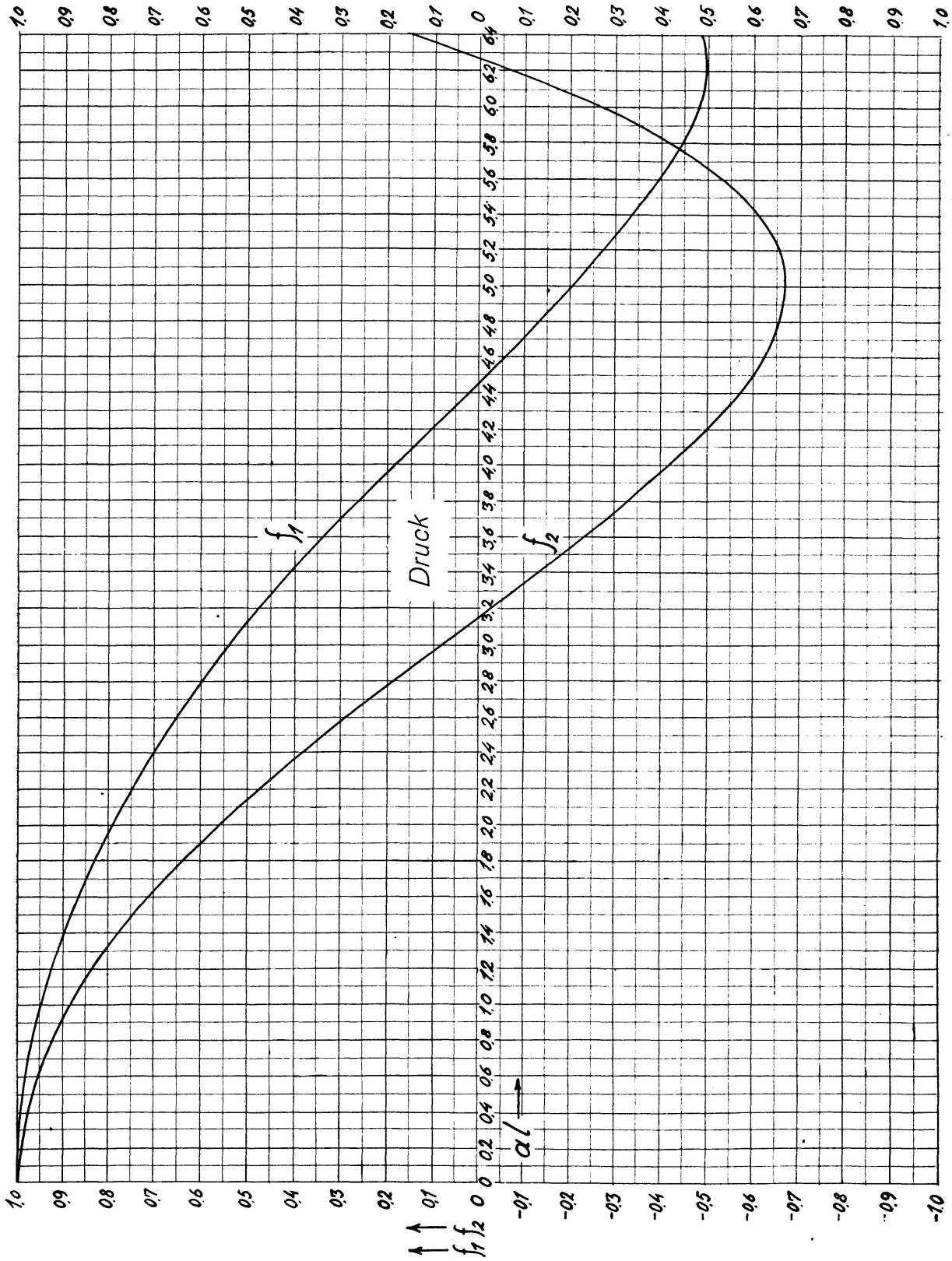

Tabelle 1

un système maintenu d'une manière rigide, avec charge transversale additionnelle sur les colonnes. La troisième partie se rapporte aux systèmes non fixes, avec charge arbitraires.

Les méthodes exposées sont illustrées par des exemples simples.

Summary

When a load is applied to a beam at right angles to its direction of length, and an increasing force is also applied in the direction of length, the beam behaves as a beam with diminishing moment of inertia. This circumstance, which is very well known in general columns, is seldom taken into account in combined structures.

It is here shown how an accurate calculation is made for an arbitrary frame system.

Section I deals with frame systems in which all assemblage points are held firmly and which are loaded on the beam. Section II deals with a fixed system with additional transverse loading on the columns, and section III refers to a non-braced system with arbitrary loading. The methods are illustrated by simple examples.