# Der dünnwandige, schlanke Stahlstab mit Kastenquerschnitt

Autor(en): **Stüssi, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **11 (1951)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11441

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# Der dünnwandige schlanke Stahlstab mit Kastenquerschnitt

*Les barres élancées, à section en caisson, à parois minces*

*The thin-walled slender steel bar of box-shaped cross-section*

Prof. Dr. F. Stüssi, Eidg. Technische Hochschule, Präsident der I.V.B.H., Zürich

## 1. Allgemeines und Grundlagen

Im Stahlbau zeigt sich in letzter Zeit eine deutliche Tendenz, vollwandige Tragwerke vermehrt mit kastenförmigem Querschnitt auszubilden. Zur einwandfreien Bemessung solcher Tragwerke im Brückenbau (neuere vollwandige Balkenbrücken) und im Stahlwasserbau (Schützen) (Fig. 1) genügt die klassische Biegungslehre nicht mehr, weil unter den auftretenden Belastungen die Querschnitte nicht mehr immer eben bleiben können.

Gegenüber den kastenförmigen Elementen des Flugzeugbaues zeigen die Anwendungsformen des Stahlbaues die Besonderheit, daß neben den geschlossenen Querschnittsteilen auch solche mit freien Rändern, die wir als freie Flanschen bezeichnen wollen, vorkommen; eine Berechnungsmethode für Bauelemente nach Figur 1 muß also für beliebige Querschnittsformen anwendbar sein und diese Besonderheiten berücksichtigen.

Nun zeigt sich bei den betrachteten Anwendungsformen der für die Aufstellung einer einfachen Berechnungsmethode mit den Mitteln der Baustatik günstige Umstand, daß hier aus Gründen der Lastübertragung immer zahlreiche Querträger oder Querverbände angeordnet werden, deren Verformungen wir mit praktisch genügender Genauigkeit vernachlässigen dürfen. Dies bedeutet aber, daß wir als Grundlage der Spannungsberechnung voraussetzen dürfen, daß die Stabquerschnitte unter der Belastung ihre Form beibehalten. Diese Bedingung von der Erhaltung der Querschnittsform ersetzt somit bei den zu untersuchenden Tragwerksformen die Elastizitätsbedingung eben bleibender Querschnitte der klassischen Biegungslehre.

Das nachstehend skizzierte Verfahren zur Berechnung prismatischer schlanker Stäbe mit aus dünnen Scheiben beliebig zusammengesetztem Querschnitt geht von den gleichen Grundlagen aus, wie eine frühere Mitteilung [1]), die sich allerdings zur Hauptsache auf Stäbe mit offenem Querschnitt beschränkte; die damaligen summarischen Hinweise auf Stäbe mit geschlossenem

Querschnitt von einfachster Form sind durch die heutige Mitteilung als überholt zu betrachten. Für die einzelnen Scheiben, aus denen der Stab zusammengesetzt ist, wird vorausgesetzt, daß sie sich gegenüber Belastungen in der Scheibenebene entsprechend der klassischen Biegungslehre verhalten, während sie Belastungen normal zur Scheibenebene keinen Widerstand entgegensetzen sollen.

Die Belastung des Stabes wird in zwei Gruppen aufgeteilt, von denen die erste den Stab nur verbiegen, aber nicht verdrehen soll, während die zweite biegungsfreie Verdrehung hervorruft. Die erste Belastungsgruppe ist somit dadurch gekennzeichnet, daß die zugehörigen Querkräfte in jedem Querschnitt im Schubmittelpunkt angreifen. Entsprechend dem Reziprozitätsgesetz von Betti-Maxwell-Mohr ist der Schubmittelpunkt gleichzeitig Verdrehungsmittelpunkt.

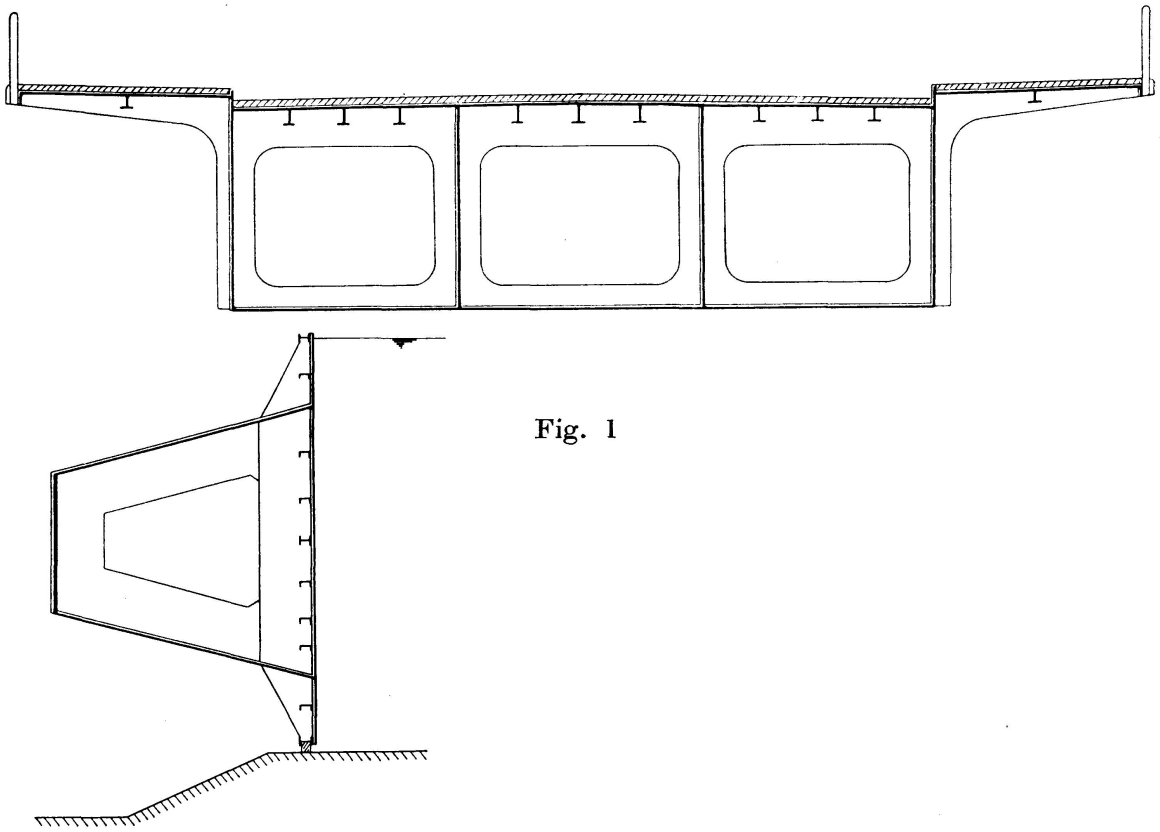

Fig. 1

Für die erste Belastungsgruppe, d. h. für verdrehungsfreie Biegung, führt die Elastizitätsbedingung von der Erhaltung der Querschnittsform auf die Elastizitätsbedingung der klassischen Biegungslehre, wonach ursprüngliche Querschnitte während der Formänderung eben bleiben[1]); beziehen wir den Querschnitt auf konjugierte Schwerachsen oder im besonderen auf Hauptschwerachsen $x$, $y$, so ergeben sich somit die Normalspannungen $\sigma$ zu

[1]) F. Stüssi: Zur Biegung und Verdrehung des dünnwandigen schlanken Stahlstabes. Abhandlungen I.V.B.H., Band 6, 1940/41.

$$\sigma_{x,y} = \frac{N}{F} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \tag{1}$$

Dabei halten wir uns an die übliche Vorzeichenkonvention und beziehen den Querschnitt auf ein linkshändiges Achsenkreuz $x$, $y$.

Die klassische Biegungslehre ist somit als Sonderfall der aufzustellenden allgemeineren Theorie anzusehen und damit ist auch eine gewisse Abgrenzung der Gültigkeit unserer Untersuchung gegeben. Ebenso, wie die klassische Biegungslehre nur für schlanke Stäbe streng gültig ist und nicht etwa eine genaue Berechnung des wandartigen Trägers nach der Scheibentheorie ersetzen kann, bezieht sich auch die folgende Untersuchung grundsätzlich auf schlanke Stäbe. Da aber auf der andern Seite die klassische Biegungslehre in der Praxis für die Bemessung der Normalfälle von auf Biegung beanspruchten Trägern voll befriedigt, auch wenn diese nicht ideal schlank sind, so dürfte die folgende Untersuchung in ähnlichem Rahmen ebenfalls praktisch befriedigen.

Auf die Frage der mitwirkenden Breite der einzelnen Scheiben brauchen wir hier nicht einzutreten, da wir annehmen dürfen, daß alle Scheiben durch Längsrippen soweit ausgesteift seien, daß sie als voll mitwirkend betrachtet werden dürfen.

## 2. Der Schubmittelpunkt bei geschlossenem Querschnitt

Wir bestimmen den Schubmittelpunkt (Querkraftsmittelpunkt) als Angriffspunkt der Resultierenden $Q$ der Schubspannungen bei verdrehungsfreier Bie-

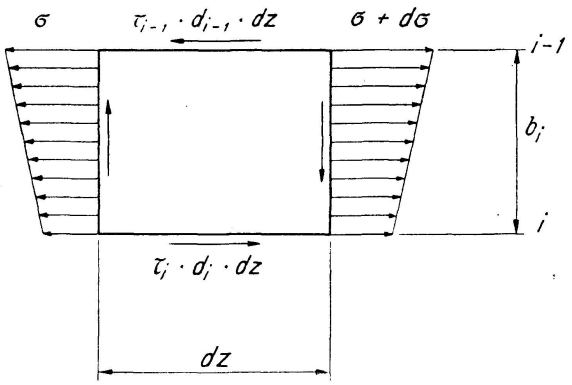


Fig. 2

gung. Dabei wird diese Resultierende $Q$ in zwei Komponenten $Q_x$ und $Q_y$ zerlegt, für welche aus Gl. (1) die Spannungsänderungen

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{dz} = -\frac{Q_y}{J_x} \cdot y \quad \text{bzw.} \quad \sigma' = \frac{Q_x}{J_y} \cdot x \tag{2}$$

bestimmt werden können, da ja zwischen den Momenten und Querkräften die Beziehungen

$$Q_y = \frac{d M_x}{dz}, \qquad Q_x = \frac{d M_y}{dz}$$

bestehen. Für ein zwischen den Schnitten $z$ und $z+dz$ liegendes Scheibenelement der Breite $b_i$ und der Stärke $d_i$ (Fig. 2) ergibt sich die Schubspannung $\tau_i$ aus einer Komponentengleichgewichtsbedingung $\Sigma Z = 0$ in bekannter Weise zu

$$\underline{\tau_i = -\frac{1}{d_i} \int_{i-1}^{i} \frac{d\sigma}{dz} \cdot d F + \tau_{i-1} \cdot \frac{d_{i-1}}{d_i}}. \tag{3}$$

Bei einer Kante, an der zwei Scheiben verschiedener Stärke $d_a$ und $d_b$ zusammentreffen, gilt aus Gleichgewichtsgründen

$$\tau_a \cdot d_a = \tau_b \cdot d_b .$$

Der wesentliche Unterschied zwischen offenen und geschlossenen Querschnitten (Fig. 3) besteht darin, daß bei ersteren die Schubspannungen über

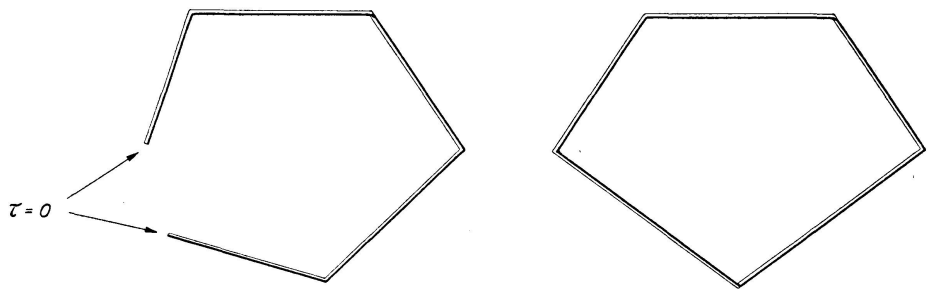


Fig. 3

den ganzen Querschnitt nach Gl. (3) durch Integration von einem freien Rand her ($\tau = 0$) bestimmt werden können, während beim geschlossenen Querschnitt eine solche Anfangsschubspannung zunächst nicht bekannt ist. Da somit die Schubspannungen hier nicht mehr aus einer Gleichgewichtsbetrachtung allein bestimmt werden können, stellt der geschlossene Querschnitt in bezug auf den Schubspannungsverlauf ein *statisch unbestimmtes Problem* dar, das jedoch mit den bekannten Mitteln der Baustatik ohne Schwierigkeiten lösbar ist: durch Aufschneiden des geschlossenen Querschnittes an irgend einer Stelle (Fig. 4) erhalten wir ein statisch bestimmtes Grundsystem, in dem der Schubspannungsverlauf $\tau_0$, ausgehend von der Schnittstelle, nun aus der Gleichgewichtsbedingung Gl. (3) bestimmt werden kann. Als überzählige Größe führen wir die unbekannte Schubspannung $\tau_s$ an der Schnittstelle oder bequemer den Schubfluß $s = \tau_s \cdot d$ ein, der aus Gleichgewichtsgründen über den Umfang des

geschlossenen Querschnittes konstant sein muß. Die wirkliche Schubspannung $\tau$ ergibt sich aus der Superposition

$$\tau = \tau_0 + \frac{s}{d} \,. \tag{4}$$

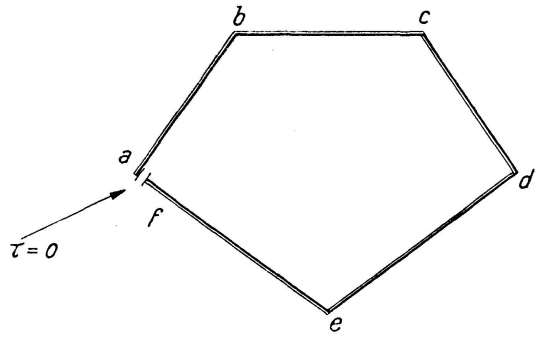


Fig. 4

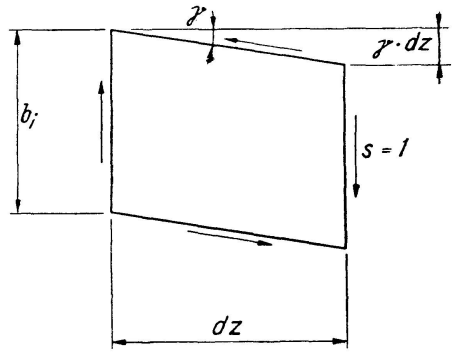


Fig. 5

Die Elastizitätsbedingung zur Bestimmung der Überzähligen $s$ hat nun auszudrücken, daß sich die beiden Ränder $a$ und $f$ bei der Schnittstelle unter den resultierenden Schubverformungen

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

nicht gegenseitig verschieben dürfen. Diese Bedingung kann in gewohnter Weise in der Form

$$\underline{a_{10} + s \cdot a_{11} = 0} \tag{5}$$

angeschrieben werden. Dabei bedeuten $a_{10}$ und $a_{11}$ die gegenseitigen Verschiebungen infolge der Verformungszustände $\tau_0$ und $s = 1$, die wir durch Einführung des virtuellen Belastungszustandes $s = 1$ nach Fig. 5 mit einer virtuellen Arbeitsgleichung für ein Scheibenelement $b_i \cdot dz$ zu

$$\Delta a_{1i} = \int^{b_i} \frac{\tau_i}{G} \cdot dz \cdot \tau_{s=1} \cdot dF = \int^{b_i} \frac{\tau_i}{G} dz \cdot \frac{s=1}{d} \cdot dF$$

bestimmen können. Für ein Stabelement der Länge $dz = 1$ erhalten wir somit

$$\left.\begin{aligned} a_{10} &= \int^{F} \frac{\tau_0}{G} \cdot \frac{1}{d} \cdot dF = \int^{F} \frac{\tau_0}{G} \cdot du \,, \\ a_{11} &= \int^{F} \frac{1}{d \cdot G} \cdot \frac{1}{d} \cdot dF = \int^{F} \frac{1}{d \cdot G} \cdot du \,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wenn wir mit $u$ die von $a$ aus gemessene Länge des Querschnittsumfanges bezeichnen:

$$du = \frac{dF}{d}$$

Da bei den hier untersuchten Anwendungen alle Teile eines Querschnittes aus dem gleichen Baustoff bestehen, ist der Schubmodul $G$ konstant; als Elastizitätsbedingung erhalten wir somit die Beziehung

$$\underline{\int^F \tau_0 \cdot du + s \int^F \frac{1}{d} \cdot du = 0} \tag{7}$$

die wegen Gl. (4) mit der im Flugzeugbau bekannten Beziehung

$$\int \tau \cdot du = 0$$

inhaltlich übereinstimmt. Besteht der Querschnitt aus $n$ Einzelscheiben der Breite $b$ und von konstanter Stärke $d$, so können wir die Schubspannungen $\tau_0$ zu Scheibenquerkräften $\mathfrak{Q}_0$,

$$\underline{\mathfrak{Q}_{0i} = d_i \cdot b_i \left(\tau_{0_{i-1}} - \frac{b_i}{6}(2 \cdot \sigma'_{i-1} + \sigma'_i)\right)} \tag{8}$$

zusammenfassen und die Elastizitätsbedingung in der Form

$$\underline{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{Q}_{0i}}{d_i} + s \cdot \sum_{i=1}^{n} \cdot \frac{b_i}{d_i} = 0} \tag{9}$$

anschreiben. Dabei ist selbstverständlich, daß die Integration nach Gl. (7) bzw. die Summation nach Gl. (9) sich nur auf den geschlossenen Querschnittsteil bezieht; freie Flanschen beeinflussen wohl die Schubspannungen $\tau_0$, kommen aber in der Elastizitätsbedingung nicht direkt vor, da sie durch den Schubfluß $s$ nicht beansprucht werden. Aussteifungsrippen sind ebenfalls freie Flanschen.

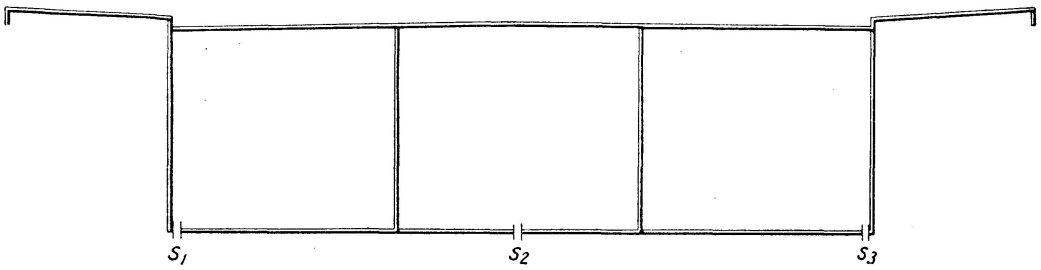


Fig. 6

Damit ist auch das Vorgehen bei mehrfach geschlossenen Querschnitten festgelegt: das Grundsystem entsteht durch Aufschneiden an mehreren Stellen, denen nun auch mehrere Überzählige $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots$ entsprechen (Fig. 6); die Elastizitätsbedingungen

$$
\begin{aligned}
a_{11}\cdot s_1 + a_{12}\cdot s_2 + a_{13}\cdot s_3 + \ldots\ldots + a_{10} &= 0\\
a_{21}\cdot s_1 + a_{22}\cdot s_2 + a_{23}\cdot s_3 + \ldots\ldots + a_{20} &= 0\\
a_{31}\cdot s_1 + a_{32}\cdot s_2 + a_{33}\cdot s_3 + \ldots\ldots + a_{30} &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

erlauben in gewohnter Weise die Bestimmung der überzähligen Schubflüsse.

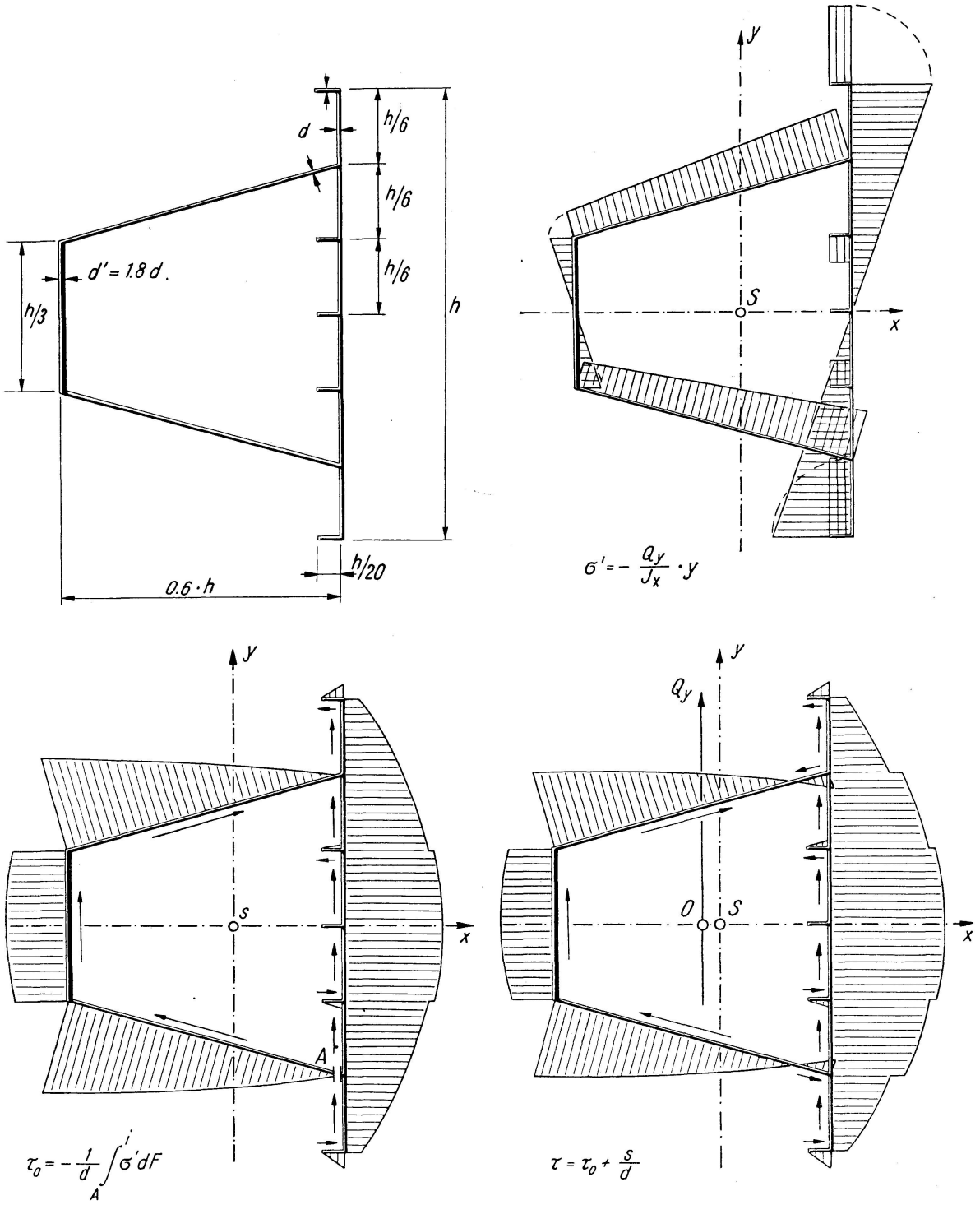


Fig. 7

Damit sind die Besonderheiten geschlossener Querschnitte gegenüber offenen aufgezeigt. Der Schubmittelpunkt kann nun als Schnittpunkt der Querkräfte $Q_x$ und $Q_y$ bestimmt werden, die ihrerseits als Resultierende der Schubspannungen $\tau$ oder der Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}$,

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0 + s \cdot b \,,$$

aus den Spannungsänderungen $\sigma'$ nach Gl. (2) zu ermitteln sind.

Fig. 7 zeigt die Ergebnisse der Zahlenrechnung für ein Beispiel mit einfach symmetrischem Querschnitt, bei dem somit nur ein geometrischer Ort des Schubmittelpunktes berechnet werden mußte [2]).

## 3. Torsion

Bei der Verdrehung eines Stabes mit geschlossenem Querschnitt treten sowohl ein primärer Schubfluß $s$ wie auch Scheibenbeanspruchungen $\sigma$, denen aus Gleichgewichtsgründen Schubspannungen $\tau_0$ entsprechend Gl. (3) zugeordnet sind, auf. Sowohl der Schubfluß $s$ wie die sekundären Schubspannungen

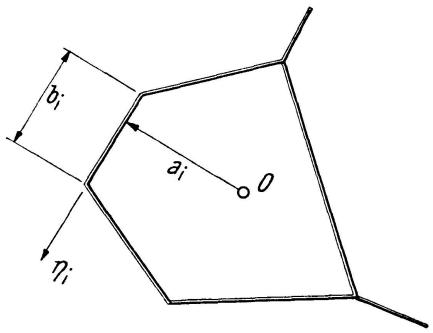


Fig. 8

$\tau_\sigma$ bilden Scheibenquerkräfte und es besteht zwischen äußeren und inneren Torsionsmomenten, bezogen auf das mit dem Schubmittelpunkt identische Verdrehungszentrum 0 (Fig. 8) die *Gleichgewichtsbedingung*

$$\underline{T = \Sigma \mathfrak{Q}_{s_i} \cdot a_i + \Sigma \mathfrak{Q}_{\sigma_i} \cdot a_i} \tag{10}$$

Dabei treten Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}_s$ infolge des Schubflusses nur in den zum geschlossenen Querschnittsteil gehörigen Scheiben auf, während die Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}_\sigma$ infolge „Flanschbiegung" auch in den freien Flanschen vorkommen.

---

[2]) Es unterstützten mich mein Assistent, Dipl. Ing. H. Wanzenried, durch die Durchrechnung des in den Fig. 7 und 9 dargestellten Zahlenbeispieles, sowie Dipl. Ing. J. P. Décoppet bei der Untersuchung mehrzelliger Querschnitte.

Die Elastizitätsbedingung (Erhaltung der Querschnittsform) sagt nun aus, daß für einen bestimmten Querschnitt die Drehwinkel $\varphi$ aller Scheiben in bezug auf den Schubmittelpunkt 0 gleich groß sein müssen:

$$\frac{\eta_i}{a_i} = \varphi = \text{konst.} \tag{11}$$

Die Scheibendurchbiegung $\eta$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: infolge des primären Schubflusses $s$ ist

$$\eta'_{s_i} = \frac{s}{d_i \cdot G}$$

während die Normalspannungen $\sigma$ den Beitrag

$$\eta''_{\sigma_i} = \frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{b_i \cdot E}$$

liefern. Den von den sekundären Schubspannungen $\tau_\sigma$ herrührenden Durchbiegungsanteil dürfen wir hier wohl ohne praktischen Nachteil vernachlässigen.

Aus Gl. (11) folgt damit

$$\frac{1}{a_i}\left[\frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{b_i \cdot E} + \frac{s'}{d_i \cdot G}\right] = \varphi''$$

oder, etwas umgeformt,

$$\sigma_{i-1} - \sigma_i = E \cdot a_i \cdot b_i \cdot \varphi'' - \frac{E}{G} \cdot \frac{b_i}{d_i} \cdot s' \tag{12}$$

Schreiben wir nun bei einem einfach geschlossenen Querschnitt diese Gl. (12) für alle diejenigen Scheiben an, die zusammen den geschlossenen Teil des Querschnittes bilden, und addieren sie, so heben sich alle Spannungswerte $\sigma$ heraus und wir erhalten

$$\varphi'' \Sigma a_i \cdot b_i - \frac{s'}{G} \Sigma \frac{b_i}{d_i} = 0\,;$$

führen wir die Abkürzungen

$$a_{11} = \Sigma \frac{b_i}{d_i}\,, \qquad 2F_m = \Sigma a_i \cdot b_i\,, \qquad \Phi = \frac{2F_m}{a_{11}}$$

ein, wobei wir mit $F_m$ den Flächeninhalt des durch die Scheibenmittellinien umgrenzten geschlossenen Querschnittsteiles bezeichnen, so ist

$$\varphi'' = \frac{a_{11}}{2 \cdot G \cdot F_m} \cdot s' = \frac{s'}{G \cdot \Phi}. \tag{13}$$

Setzen wir den Wert $\varphi''$ aus Gl. (13) in Gl. (12) ein, so erhalten wir

$$\underline{\sigma_{i-1} - \sigma_i = \frac{E}{G}\left[\frac{a_i \cdot b_i}{\Phi} - \frac{b_i}{d_i}\right] \cdot s'} \tag{14a}$$

für den geschlossenen Querschnittsteil, bzw.

$$\underline{\sigma_{i-1} - \sigma_i = \frac{E}{G} \cdot \frac{a_i \cdot b_i}{\Phi} \cdot s'} \tag{14b}$$

für freie Flanschen, in denen kein Schubfluß wirkt.

Gl. (14) ist eine Rekursionsformel, die zur Bestimmung der Spannungen $\sigma$ in Funktion von $s'$ dient; da sie jedoch den Charakter einer Differenzengleichung besitzt, ist noch die entsprechende Integrationskonstante aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\int^F \sigma \cdot dF = N$$

zu bestimmen.

Die Spannungsänderungen $\sigma'$ verlaufen ähnlich zu den Spannungen $\sigma$ über den Querschnitt; sie werden somit in Funktion von $s''$ erhalten. Aus diesen Werten $\sigma'$ ergeben sich zunächst in einem Grundsystem die Schubspannungen $\tau_0$, zu denen noch ein überzähliger sekundärer Schubfluß $s_\tau$ entsprechend den Ausführungen des zweiten Abschnitts hinzutritt, so daß die resultierenden Schubspannungen sich zu

$$\tau = \tau_0 + \frac{s_\tau}{d}$$

ergeben. Der Verlauf der Spannungen $\sigma$ bzw. $\sigma'$, $\tau_0$ und $\tau$ für den untersuchten Torsionsanteil ist in Fig. 9 dargestellt. Aus diesen Schubspannungen $\tau$ ergeben sich nun die Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}_\sigma$ in Funktion von $s''$ (oder, unter Beachtung von Gl. (13), in Funktion von $\varphi'''$), während wir die Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}_s$ in Funktion von $s$ bzw. $\varphi'$ erhalten. Für einen einfach geschlossenen Querschnitt führt somit die Gleichgewichtsbedingung Gl. (10) auf die Grundgleichung des hier vorliegenden Torsionsproblems in der Form

$$\underline{T = 2\,F_m \cdot s - A\,s''} \tag{15a}$$

bzw.

$$\underline{T = G \cdot \Phi\,[2\,F_m \cdot \varphi' - A\,\varphi''']} \tag{15b}$$

Dabei haben wir den kleinen Torsionsanteil $G \cdot J_d \cdot \varphi'$, wobei $J_d \cong \Sigma \cdot \frac{b \cdot d^3}{3}$ vernachlässigt; dieser Anteil spielt wohl bei offenen Querschnitten eine nennenswerte Rolle, tritt aber hier offensichtlich gegenüber dem Torsionswiderstand eines kastenförmigen Querschnittsteiles zurück, weil er nur gleichbedeutend ist mit einer gewissen Ungleichmässigkeit der Schubspannungsverteilung über die Scheibenstärke. Seine Berücksichtigung würde übrigens keine Schwierig-

keiten verursachen. Ebenso soll hier nicht eingetreten werden auf die ungleichmäßige Schubspannungsverteilung bei scharf einspringenden Ecken, die zu einer gewissen örtlichen Schubspannungskonzentration führen kann. Diesem an sich ungünstigen Einfluß ist durch geeignete konstruktive Ausbildung des Bauteiles zu begegnen.

Bei mehrfach geschlossenen Querschnitten ist als Besonderheit zu beachten, daß in einer Scheibe $i$, die zu zwei Zellen $n$ und $n+1$ gehört, nicht nur ein

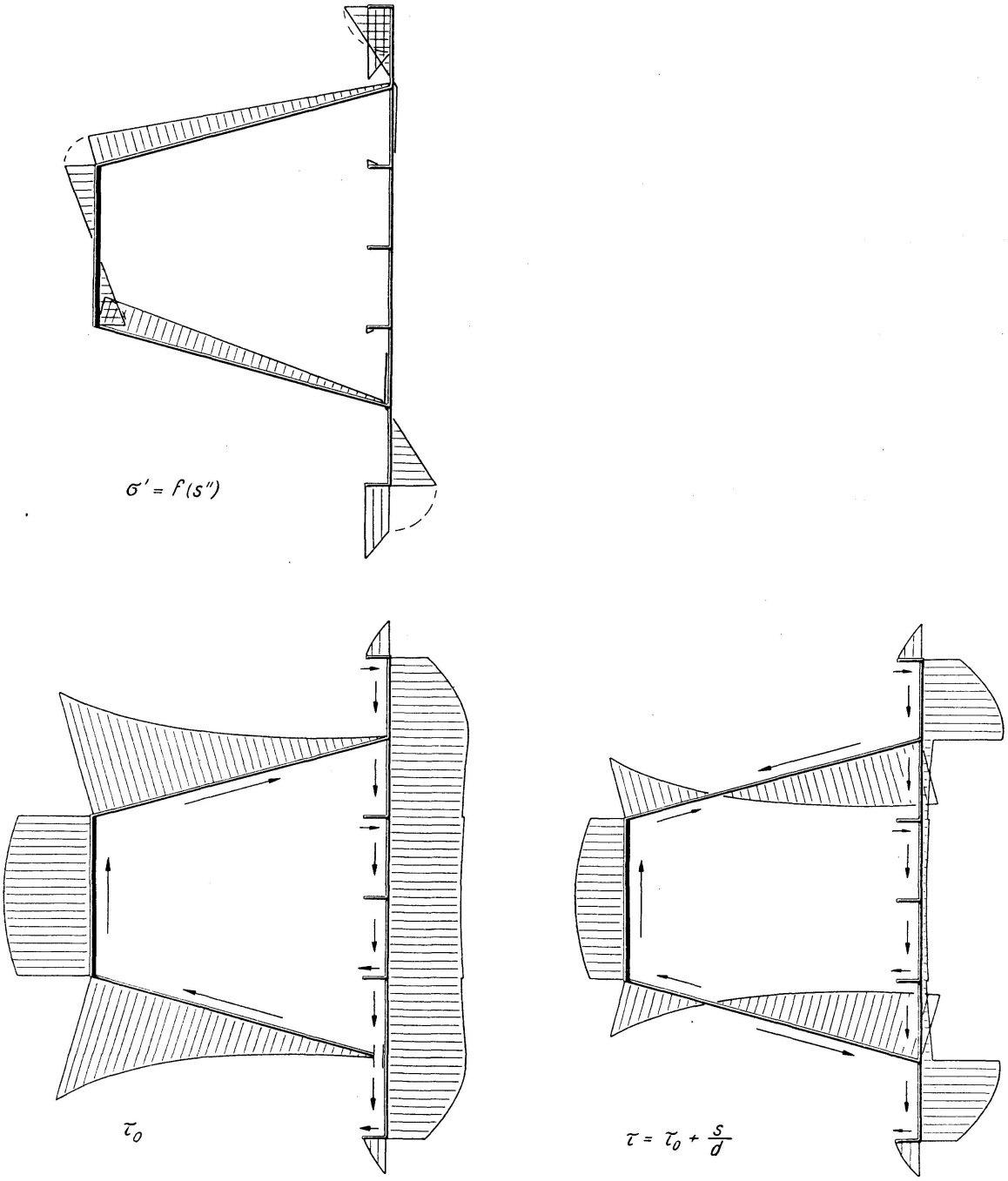


Fig. 9

einfacher Schubfluß $s$, sondern eine Schubflußdifferenz $s_n - s_{n+1}$ wirkt; die Gleichung (12) nimmt deshalb für diese Scheibe $i$ die Form

$$\sigma_{i-1} - \sigma_i = E \cdot a_i \cdot b_i \cdot \varphi'' - \frac{E}{G} \cdot \frac{b_i}{d_i} \cdot (s_n' - s_{n+1}') \tag{12a}$$

an und bei der Summation aller für die zur Zelle $n$ gehörigen Scheiben angeschriebenen Gleichungen (12) bzw. (12a) erhalten wir, in Analogie zur Gleichung (13), die Beziehung

$$\varphi'' \cdot 2\, G F_{m,n} = a_{nn} \cdot s_n' - a_{n-1,n} \cdot s_{n-1}' - a_{n+1,n} \cdot s_{n+1}' + \ldots\ldots \tag{13a}$$

Da wir für jede Zelle eine solche Gleichung (13a) anschreiben können, erhalten wir ein Gleichungssystem, aus dem sich die überzähligen Schubflüsse in der Form

$$s_1' = G \cdot \Phi_1 \cdot \varphi'', \ldots, \qquad s_n' = G \cdot \Phi_n \cdot \varphi'' \text{ usw.} \tag{16a}$$

ergeben. Es ist also

$$s_n' = s_1' \cdot \frac{\Phi_n}{\Phi_1} \text{ usw.} \tag{16b}$$

Setzen wir die Werte von $\varphi''$,

$$\varphi'' = \frac{s_n'}{G \cdot \Phi_n},$$

in Gleichung (12a) ein, so erhalten wir für eine zu den Zellen $n$ und $n+1$ gehörige Scheibe $i$ die Beziehung

$$\sigma_{i-1} - \sigma_i = \frac{E}{G} \left[ \frac{a_i \cdot b_i}{\Phi_n} - \frac{b_i}{d_i} \left( 1 - \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} \right) \right] \cdot s_n', \tag{14c}$$

während für Scheiben, die nur zu einer Zelle gehören, nach wie vor Gleichung (14a), bzw. für freie Flanschen Gleichung (14b) gültig bleiben. Die Bestimmung der Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}_\sigma$ und $\mathfrak{Q}_s$ bietet nun keine Besonderheiten mehr und wir können somit auch für den mehrfach geschlossenen Querschnitt die Grundgleichung in zu Gleichung (15) analoger Form aufstellen.

Diese Grundgleichung (15) stimmt somit formal überein mit der entsprechenden Gleichung, die wir für die Torsion offener Querschnitte erhalten haben und die für den I-Querschnitt erstmals von S. Timoshenko aufgestellt worden ist. Mit ihrer Auflösung, die mit mathematischen oder baustatischen[3]) Mitteln möglich ist, ist die gestellte Aufgabe grundsätzlich gelöst.

Bei einfachen Belastungsfällen, bei denen die zweite und die höheren Ableitungen von $T$ verschwinden, kann der Verlauf des Schubflusses $s$ mit der Abkürzung

$$\omega^2 = \frac{2\, F_m}{A}$$

[3]) Z.B. F. Stüssi: Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung. Z.A.M.P., Vol. I, 1950, p. 53—70.

direkt in geschlossener Form angegeben werden:

$$s = \frac{T}{2F_m} + c_1 \cdot \operatorname{Sh} \omega z + c_2 \operatorname{Ch} \omega z \,;$$

die Integrationskonstanten $c_1$ und $c_2$ sind aus den Randbedingungen zu bestimmen. Bei einfachen Balken können die Endquerschnitte nicht durch Normalspannungen $\sigma$ beansprucht sein, weshalb $s'_A = s'_B = 0$ sein muß.

Bei der Durchrechnung von Zahlenbeispielen zeigt sich nun, daß das äußere Torsionsmoment fast vollständig durch den Schubfluß aufgenommen wird und daß die Normalspannungen $\sigma$ bei Torsion nur örtliche Bedeutung besitzen. Ihre Berechnung ist aber deshalb notwendig und wichtig, weil sie örtlich große Werte in der Größenordnung der Schubspannungen aus primärem Schubfluß erreichen können und deshalb bei der Bemessung nicht vernachlässigt werden dürfen.

## 4. Schlußbemerkungen

Das hier vorgelegte baustatische Verfahren zur Berechnung von auf Biegung und Verdrehung beanspruchten prismatischen schlanken Stäben mit einfach oder mehrfach geschlossenem Querschnitt mit freien Flanschen ist nicht auf Fälle beschränkt, bei denen der Querschnitt nur aus ebenen Scheiben zusammengesetzt ist. Besteht der Stab ganz oder teilweise aus gekrümmten Flächen, so können die Integrationen der Gl. (3) und (6) des zweiten Abschnittes ohne Schwierigkeiten als Flächenberechnungen ausgeführt werden, während die Differenzengleichung (14) des dritten Abschnittes in der Form

$$\frac{d\sigma}{du} = \left[\frac{a}{\Phi} - \frac{1}{d}\right] \cdot \frac{E}{G} s'$$

angeschrieben werden kann, so daß auch die Normalspannungen $\sigma$ aus Torsion durch Flächenberechnung bestimmt werden können.

Dank der Doppelbedeutung des Schubmittelpunktes könnte seine Lage grundsätzlich auch aus seiner Eigenschaft als Verdrehungszentrum bestimmt werden. Es zeigt sich aber, daß dieser Weg wesentlich umständlicher wäre, als das hier gewählte Vorgehen.

## Zusammenfassung

Es wird ein einfaches baustatisches Verfahren zur Berechnung von auf Biegung und Verdrehung beanspruchten prismatischen schlanken und dünnwandigen Stäben mit einfach oder mehrfach geschlossenem Querschnitt und mit freien Flanschen angegeben. Entsprechend dem in einer früheren Mitteilung (Abh. I.V.B.H., Band 6, 1940/41) für offene Querschnitte angegebenen

Verfahren wird die Belastung aufgeteilt in zwei Anteile, von denen der eine nur verdrehungsfreie Biegung, der andere nur biegungsfreie Verdrehung erzeugt. Ausgehend vom Schubmittelpunkt, der als Querkraftsmittelpunkt bei verdrehungsfreier Biegung bestimmt wird und der wegen der vorausgesetzten Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes gleichzeitig Verdrehungszentrum ist, kann auch der Torsionsfall leicht untersucht werden. Als Elastizitätsbedingung wird für beide Belastungsanteile die durch die Wirkung von Querverbänden weitgehend gewährleistete Annahme eingeführt, daß die Querschnittsform während der Verformung erhalten bleibt; für den Fall der verdrehungsfreien Biegung führt dies auf die Elastizitätsbedingung vom Ebenbleiben der Querschnitte der klassischen Biegungslehre. Die vorgelegte Berechnungsmethode stellt somit eine Erweiterung der klassischen Biegungslehre dar, womit auch ihre grundsätzlichen Gültigkeitsgrenzen abgesteckt sind. Der bei geschlossenen Querschnitten auch bei Biegung auftretende Schubfluß wird als überzählige Größe nach den bekannten Regeln zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme bestimmt.

**Résumé**

L'auteur expose un procédé statique simple pour le calcul des barres prismatiques élancées à parois minces, de section fermée simple ou multiple, et à ailes libres, soumises à des contraintes de flexion et de torsion. Suivant le procédé indiqué dans une communication antérieure (Mémoires A.I.P.C., tome 6, 1940/41), pour des sections ouvertes, la charge est décomposée en deux parties, dont l'une ne met en jeu qu'une flexion exempte de torsion, tandis que l'autre ne produit qu'une torsion exempte de flexion. Le cas de la torsion proprement dite peut également être étudié aisément en partant du centre de torsion, qui est déterminé comme centre des efforts tranchants dans le cas de la flexion exempte de torsion et qui constitue en même temps le centre de torsion dans l'hypothèse de la validité de la loi de réciprocité.

L'auteur introduit comme condition d'élasticité pour les deux parties de la charge l'hypothèse, largement assurée par l'effet des entretoisements, suivant laquelle la forme de la section est conservée au cours de la déformation. Dans le cas de la flexion exempte de torsion, cette hypothèse conduit à la condition d'élasticité portant sur le maintien de la planéité des sections de la théorie classique de la flexion.

La méthode de calcul ici exposée constitue ainsi une extension de la théorie classique de la flexion et ses limites de validité de principe se trouvent ainsi définies. L'effet du flux de glissement qui se manifeste même dans le cas de la flexion, sur les sections fermées, est déterminé en tant que grandeur surabondante, d'après les règles connues concernant le calcul des systèmes hyperstatiques.

**Summary**

A simple structural-static method is given for calculating prismatic slender and thin-walled bars with singly or multiply closed cross-section and with free flanges. Corresponding to the method given in a previous communication (I.A.B.S.E. Publications, vol. 6, 1940/41) for open cross-sections, the loading is subdivided into two parts, one of which causes only bending without any torsion, and the other causes torsion without any bending. Starting from the centre of shear, which is determined as application point of the transverse force in the case of bending without torsion and which is at the same time the centre of twist because of the presumed validity of the law of reciprocity, also the case of torsion can be easily examined. As condition of elasticity, for both subdivisions of loading, the assumption is made — to a large extent justified by the action of transversal bracing — that the shape of the cross-sections remains unchanged during the deformation. In the case of bending without torsion, this leads to the condition of elasticity of the classic theory of bending, i.e. that plane cross-sections remain plane. The present method of calculation consequently represents an extension of the classic theory of bending, through which its fundamental limits of validity are marked out. The shear flux occurring also in the case of bending with closed cross-sections is determined as redundant magnitude according to the known rules for calculating statically indeterminate systems.

Leere Seite
Blank page
Page vide